

Theorie 9

1 Das bestimmte Integral

1.1 Treppenfunktion

Wir definieren eine Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass für $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ die Funktion in jedem Intervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist. Wir definieren das Integral einer Treppenfunktion als eine Summe von Rechtecken:

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{k=1}^n \Delta x_k c_k.$$

Wobei c_k den Wert der Funktion in jedem Teilintervall bezeichnet. Es ist zu bemerken, dass dies die Fläche "unter der Funktion" numerisch entspricht. Man kann zeigen, dass dies von der Art der Verteilung nicht abhängig ist.

1.2 Integration der Regelfunktionen

Wir wollen jetzt diese Beziehungen auf eine allgemeinere Klasse von Funktionen erweitern.

Definition. Eine Regelfunktion besitzt in jedem Punkt x_0 vom Intervall (a, b) einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert. Weiter besitzt Sie einen rechtsseitigen Grenzwert in $x = a$ und einen linksseitigen in $x = b$.

Stetige und monotone Funktionen sind natürlich Regelfunktionen. Man kann beweisen, dass diese mittels Treppenfunktionen approximiert werden können.

Satz. Eine Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn $\forall \epsilon$ gibt es eine Treppenfunktion so dass:

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Anders gesagt, existiert eine Folge ϕ_n von Treppenfunktionen derart:

$$\|f(x) - \phi_n(x)\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Wir betrachten eine gleiche Aufteilung, wie die von oben und wählen zwischenpunkte ζ_k mit $x_{k-1} \leq \zeta_k \leq x_k$. Wir definieren die *Feinheit* σ als $\max |x_k - x_{k-1}|$. Dazu ordnen wir die sogenannte **Riemannsche Summe**:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta x_k.$$

Und definieren das bestimmte Integral als Grenzwert von dieser Summe bezüglich der Feinheit:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta x_k.$$

2 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

2.1 Der Mittelwertsatz

Gegeben sei eine stetige Funktion f , auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert. Es existiert ein ζ in diesem Intervall, mit:

$$(b - a)f(\zeta) = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Seien m , M das Minimum bzw. Maximum der Funktion auf diesem Intervall, dann gilt $\forall x \in [a, b]$:

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

Daraus folgt:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)}{b-a} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt eine stetige Funktion jeden Wert zwischen m und M und deshalb existiert diese Stelle ζ q.e.d.

2.2 Der Hauptsatz

Sei eine Regelfunktion f auf I gegeben und einen festen Punkt a . Man setzt:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

F ist dann eine **Stammfunktion** von f : an jeder Stetigkeitsstelle x_0 wo f differenzierbar ist, gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. Weiter kann man feststellen, dass:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass F auf einem Kompaktum K Lipschitz-stetig¹ ist. Sei L eine obere Schranke von $|f|$ auf K . Für $x, y \in K$ gilt dann:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) \, dt \right| \leq L|y - x|.$$

Für $x \neq x_0$ (f sei in x_0 stetig) und $\epsilon > 0$ gilt dann für $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0) \, dt \right| \leq \frac{|x - x_0| \cdot \epsilon}{|x - x_0|} = \epsilon.$$

Für verschwindend kleinen ϵ bedeutet das, dass $F'(x_0) = f(x_0)$. Der Beweis zur zweiten Beziehung ist folgender:

$$F'(x) = f(x) \rightarrow (F(x) - c)' = (\tilde{F}(x))' = f(x) \rightarrow \tilde{F}'(x) = f(x)$$

Für $x = a$:

$$\int_a^a f(t) \, dt = 0 = F(a) = \tilde{F}(a) + c \rightarrow \tilde{F}(a) = -c$$

Für $x = b$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) = \tilde{F}(b) + c = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) + (c - c) = F(b) - F(a)$$

3 Das Integrieren, unbestimmtes Integral

Wenn die Integrationsgrenzen nicht spezifiziert sind, kann man das Integrieren als Umkehroperation der Ableitung interpretieren. Es ist zu beachten, dass beim Ableiten alle konstanten Termen in einer Summe verschwinden. Deswegen muss man beim Integrieren eine unbekannte konstante C aufsummieren, wie ein Scharparameter aller Lösungen. Sei $F'(x) = f(x)$ für x wo F differenzierbar ist, dann gilt:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

¹Siehe Theorie 2.

4 Einführung, Berechnung von Integralen

Viele Integralen können mithilfe von direkten Regeln (wie in dem Fall der Ableitung) berechnet werden. Wir listen aber jetzt die ersten hilfreichen Regeln.

(I). **Linearität:** $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx;$

(II). **Zerlegung des Intervalls:** $\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$

(III). **Partielle Integration:**

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = (f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

$$\int f(x)g'(x) \, dx = (f(x)g(x)) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Beweis. Folgt direkt aus der Produktregel für die Ableitung, mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beispiel. Wir berechnen $\int e^x \cos(x) \, dx$:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) \, dx &= - \int e^x \sin(x) \, dx + e^x \sin(x) + C \\ \int e^x \cos(x) \, dx &= - \left(- \int -e^x \cos(x) \, dx - e^x \cos(x) \right) + e^x \sin(x) + C \\ \int e^x \cos(x) \, dx &= - \int e^x \cos(x) \, dx + e^x (\cos(x) + \sin(x)) + C \\ \int e^x \cos(x) \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \sin(x)) + C \end{aligned}$$

Dabei haben wir zweimal die Formel benutzt und rekursiv den Term auf der linken Seite auch rechts bekommen. Dann haben wir es links aufsummiert und schlussendlich durch 2 dividiert.

(IV). **Substitution:** Wir wissen aus der Kettenregel:

$$\int f'(x)g'(f(x)) \, dx = g(f(x)) + C$$

Und setzen $y = f(x)$. Daher kommt:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad dy = f'(x)dx \quad \int f'(x)g'(f(x)) \, dx = \int g'(y) \, dy$$

Bei bestimmten Integralen muss man jedoch die Integrationsgrenzen anpassen. Bei stetig differenzierbaren Funktionen gilt anscheinend die folgende Formel:

$$\int_a^b g(f(t))f'(t) \, dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) \, dx.$$