

Theorie 8

1 Ebene Kurven

1.1 Parametrisierte Kurven

Definition. Eine parametrisierte Kurve ist eine Abbildung

$$\gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad t \rightarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Die Komponenten sind auf I stetige Funktionen. Die Kurve ist differenzierbar, wenn diese Funktionen zu C^1 gehören. $\gamma(I)$ heisst **Spur** der Kurve.

Ein Beispiel von Spur wäre die Gleichung eines Kreises. Natürlich kann man unendlich viele Parametrisierungen um Kurven mit der gleichen Spur zu bezeichnen.

Beispiel. Die von der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

definierte Kurve kann mithilfe der beiden Parametrisierungen definiert werden, in zueinander gegenseitigen **Durchlaufsinnen**:

$$t \rightarrow (r \cos(t), r \sin(t))^T; \quad t \rightarrow (r \cos(t), -r \sin(t))^T. \quad t \in [0, 2\pi]$$

Satz. Sei $\gamma(x(t), y(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und habe die Komponentenableitung $\dot{x}(t)$ keine Nullstelle, dann gibt es eine Funktion f auf $J = x(I)$ deren Graph die Spur von γ ist. Die Ableitung von f in x_0 ist

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Beweis: S. 231.

Definition. Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst **regular** an der Parameterstelle t_0 wenn $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ ist. Das heisst, die Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve auf keinem Punkt verschwindet.

1.2 Begleitende Zweibein, Krümmung

Wir definieren den Tangentialvektor als Grenzfall der Sekante.

Definition. Ist γ differenzierbar, dann heissen

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$$

Der Tangentialvektor der Kurve. Ferner ist der Betrag $\|\dot{\gamma}(t)\|$ die Geschwindigkeit. Sei diese Geschwindigkeit $\neq 0$, dann definiert man den Tangentialeinheitsvektor:

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Diese werden nicht ortlich, sondern über den Parameter t definiert. Es kann sein, dass bei einem **Doppelpunkt** (eine Überschneidung der Kurve) der Tangentialvektor zwei verschiedene Werte annimmt.

Die **Krümmung** von Kurven in \mathbb{R}^2 definiert man als Mass der Abweichung vom Geradlinigen Verlauf. Wir nehmen zu diesem Zweck eine Kurve mit konstanten Geschwindigkeit $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Es gilt für die Änderung der Tangente an der Stelle s mit $T(s) = \gamma'(s)$:

$$\left\| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{T(s + \Delta s) - T(s)}{\Delta s} \right\| = \|T'(s)\|.$$

Betrachten wir jetzt die Umdrehung um $\pi/2$ in mathematisch-positiven Sinn $D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$.

Definition. Der Vektor $N(t) = DT(t)$ (T sei normiert) heisst **Normaleneinheitsvektor** an der Stelle t . Die beide Vektoren $N(t)$ und $T(t)$ definieren ein stellen-abhängiges Koordinatensystem, der **begleitende Zweibein** der Kurve γ an der Stelle t .

Die Krümmung $\kappa(s)$ der Kurve kann als **Rotation des begleitenden Zweibeins** definiert werden. Bei konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Das heisst, die Krümmung entspricht die Schnelligkeit mit der sich die Richtung der Tangente bei Durchlaufgeschwindigkeit 1 ändert.

Satz. An jeder regulären Stelle der 2-mal stetig differenzierbaren Kurve $\gamma = (x(t), y(t))$ gilt:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Für den Graphen einer C^2 -Funktion $y = f(x)$ haben wir, insbesondere:

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}.$$

Auf jedem Punkt der Kurve, wo die Krümmung definiert wird, kann man den sogenannten **Krümmungskreis** einzeichnen. Der besitzt den gleichen Tangentialvektor wie $T(t)$ und die gleiche Krümmung der Kurve. Dabei definiert man $\frac{1}{\kappa(t)}$ **Krümmungsradius** der Kurve an der Stelle t . Der Ort aller Mittelpunkte der verschiedenen **Krümmungskreisen** die man um die Kurve einzeichnet heisst **Evolute** ϵ von γ . Die Parametrisierung der Evolute lautet:

$$\epsilon : t \rightarrow \gamma(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)}.$$