

Theorie 7

1 Extremalaufgaben

1.1 Maxima und Minima

Sei eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Diese Funktion besitzt ein *globales Maximum* wenn $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$ gilt; sie besitzt ein *lokales Minimum* wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 gilt. Analog definiert man das globale und lokale *Minimum*. Nach dem *Satz von Weierstrass* besitzt eine stetige, reelle, auf einer kompakten Menge definierte Funktion ein globales Maximum und Minimum. Das folgende Kriterium beruht auf die Extremalstellen von differenzierbaren Funktionen.

Satz. Sei f in einer Umgebung von x_0 definiert und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Besitzt sie ein Extremum in x_0 , dann gilt:

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion in einer Umgebung U von x_0 und nehmen an, dass sie dort ein Maximum besitzt. Dann gilt für $x \rightarrow x_0^-$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Für $x \rightarrow x_0^+$ gilt $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Wegen Stetigkeit (die Funktion ist einmal differenzierbar), muss die Ableitung genau am Punkt verschwinden. Analog beweist man den Satz für Minimalstellen.

Wir werden sehen, dass diese nur eine notwendige Bedingung für Extrema gegeben die Differenzierbarkeit der Funktion, ist. Um alle Extrema zu finden, muss man folgende Kandidaten einer Extremalstelle betrachten:

- (I). Die Randpunkte von $[a, b]$;
- (II). Punkte wo f nicht diff'bar ist;
- (III). Punkte wo $f'(x_0) = 0$ gilt.

1.2 Höhere Ableitungen

Sei f in I differenzierbar und f' ebenfalls in I differenzierbar, dann heisst die Ableitung von f' in $x_0 \in I$ die zweite Ableitung von f und man schreibt

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Rekursiv kann man die n -te Ableitung definieren.

Definition. f heisst in I **stetig differenzierbar**, falls die Ableitung f' existiert und ebenfalls stetig ist.

1.3 Differentiationsklassen

Wir definieren folgende Bezeichnungen:

- $C^0(I)$ ist der \mathbb{C} -Vektorraum der Stetigen Funktionen auf I .
- $C^n(I)$ ist der \mathbb{C} -Vektorraum der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I .
- $C^\infty(I)$ ist der \mathbb{C} -Vektorraum der unendlich-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I .

1.4 Kriterien für Extrema

Sei eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ in $x_0 \in (a, b)$, so besitzt sie in x_0 :

- (I). Ein lokales Minimum, wenn x_0 eine Umgebung (α, β) besitzt mit $f'(x_0) \leq 0$ für $x \in (\alpha, x_0)$ und $f'(x_0) \geq 0$ für $x \in (x_0, \beta)$;

(II). Ein lokales Maximum, wenn x_0 eine Umgebung (α, β) besitzt mit $f'(x_0) \geq 0$ für $x \in (\alpha, x_0)$ und $f'(x_0) \leq 0$ für $x \in (x_0, \beta)$.

Der Beweis folgt aus der Definition der Ableitung von monoton steigenden und fallenden Funktionen.

Zusätzlich gilt für 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen:

(I). lokales Minimum mit $f''(x_0) > 0$;

(II). lokales Maximum mit $f''(x_0) < 0$.

1.5 Konvexität

Eine Funktion heisst auf einem Intervall *konvex* falls die Sekante durch zwei Punkte von diesem Intervall oberhalb des Graphen liegt.

Definition. Sei I ein Intervall, eine Funktion f ist konvex wenn für jede $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Satz. Für die Tripel von oben, ist f genau dann konvex, wenn gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Wir zeigen jetzt das Kriterium für Konvexität bezüglich der Ableitungen (Beweis: S.146).

Satz. Eine in $[a, b]$ stetige und (a, b) differenzierbare Funktion ist genau dann konvex, wenn ihre Ableitung f' monoton wächst.

Als Folgerung gilt:

Satz. Eine Funktion f , stetig in $[a, b]$ und in (a, b) zweimal differenzierbar, ist dann konvex wenn $f'' \geq 0$ ist.

Definition. Wendepunkt. Sei eine stetige Funktion gegeben auf (a, b) , auf (a, x_0) konkav (oder konvex) und auf (x_0, b) konvex (bzw. konkav), dann ist $(f(x_0), x_0)$ ein Wendepunkt.

Satz. Sei f in einer Umgebung von x_0 3-mal stetig differenzierbar, mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so ist $(f(x_0), x_0)$ ein Wendepunkt.

Iterativ, können wir diesen Begriff mit folgendem Satz verallgemeinern.

Satz. Sei f in einer Umgebung von x_0 n -mal stetig differenzierbar, $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ und $f^n(x_0) \neq 0$ mit n **ungerade**, so ist $(f(x_0), x_0)$ ein Wendepunkt. Sei n **gerade**, dann ist $(f(x_0), x_0)$ eine lokale Extremalstelle.

1.6 Der Satz von Weierstrass*

Definition. Eine Menge $K \in \mathbb{R}$ heisst **kompakt** wenn jede Folge x_n eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt. Jedes geschlossene Intervall $[a, b]$ ist gemäss dieser Definition kompakt (Satz von Bolzano-Weierstrass). Eine Kompakte Menge ist beschränkt: es gibt ein S mit $|x| \leq S \quad \forall x \in K$.

Satz. Weierstrass.

Jede stetige Funktion f auf einem Kompaktum nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis. Wir betrachten den Fall vom Maximum. Wir setzen:

$$s = \begin{cases} \sup(f(K)) & \text{falls } f(K) \text{ nach oben beschränkt;} \\ \infty & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wir wählen einen Punkt x_n mit

$$s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s \quad \text{falls } s < \infty;$$
$$n < f(x_n) \quad s = \infty.$$

Nach dem Folgenkriterium ist $f(\zeta) = \lim f(x_n)$. Die Folge ist beschränkt, was schliesst den Fall $s = \infty$ aus. Es folgt:

$$f(\zeta) = \lim f(x_n) = s.$$

Wegen $f(x_n) \leq s \quad \forall x \in K$ ist ζ eine Maximalstelle von f in K .