

Theorie 6

1 Mittelwertsatz

In der Analysis ist die Untersuchung globalen Eigenschaften einer Funktion aus lokalen Eigenschaften ihrer Ableitung besonders interessant. Der Mittelwertsatz (Satz von Lagrange) ist eine Grundlage dieser Aufgabe.

1.1 Der Satz

Satz. Sei eine reellwertige Funktion f auf einem geschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ dafür:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

Ein Spezialfall, der **Satz von Rolle**, besagt Folgendes.

Satz. Sei eine reellwertige Funktion f auf einem geschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, wie oben. Zusätzlich gilt $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ dafür: $f'(\zeta) = 0$.

Beweis. Wir beweisen zuerst den Satz von Rolle. Sei f konstant, dann gilt $f'(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in (a, b)$. Sonst besitzt f ein Maximum und/oder ein Minimum (Satz von Weierstrass), von $f(a) = f(b)$ verschieden. Dieser Extremum ist dann an einer Stelle ζ und dort ist $f'(\zeta) = 0$. Zum allgemeinen Fall, subtrahiert man eine lineare Funktion mit der Steigung der Sekante durch a und b . Dann gilt:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{und} \quad F(b) = F(a).$$

Durch Anwendung des Satzes von Rolle erhält man eine Stelle in (a, b) wo $F'(\zeta) = 0$.

1.2 Verallgemeinerung des Satzes

Man kann den Mittelwertsatz für Werte einer allgemeinen Funktion an den Stellen a und b , statt die Werte selber, erweitern. Der Beweis folgt **nicht** aus einfacher Quotientenbildung (in dem Fall könnten die gefundenen ζ voneinander verschieden sein).

Satz. Seien f, g reellwertige Funktionen, stetig auf einem geschlossenen Intervall $[a, b]$ und auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und $\exists \zeta \in (a, b)$ dafür gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Beweis. Wir definieren eine Analoge Funktion wie $F(x)$ von oben.

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \quad \text{und} \quad F(b) = F(a).$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es eine Stelle in (a, b) wo $F'(\zeta) = 0$. q.e.d.

1.3 Monotoniekriterium

Sei f eine auf (a, b) differenzierbare Funktion, dann gilt:

(I). $f'(x) > 0 \quad x \in (a, b) \implies f$ ist in (a, b) streng monoton wachsend;

(II). $f'(x) < 0 \quad x \in (a, b) \implies f$ ist in (a, b) streng monoton fallend;

(III). $f'(x) \geq 0 \quad x \in (a, b) \iff f$ ist in (a, b) monoton wachsend;

(IV). $f'(x) \leq 0 \quad x \in (a, b) \iff f$ ist in (a, b) monoton fallend.

Die Beweise folgen alle direkt aus dem Mittelwertsatz.

2 Regel von De l'Hospital

Satz. Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$. Für beide Fälle $f(x), g(x) \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow a^+$ und $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ mit $x \rightarrow a^+$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dies gilt auch für $x \rightarrow b^-, x \rightarrow \infty$.

Beweis. Für den ersten Fall, gelte $f(a) = g(a) = 0$. Laut dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \quad \zeta \rightarrow a.$$

Im zweiten Fall, gelte

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - A \right| < \epsilon \quad t \in (a, a + \delta).$$

Dann, laut dem gleichen Satz gilt:

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} - A \right| < \epsilon \quad x_1, x_2 \in (a, a + \delta).$$

Deswegen folgt:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}}{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}$$

Mit $x_2 = x_{2,0}$ strebt der rechte Faktor nach 1 bei $x_1 \rightarrow a^+$. Es gibt ein $\delta^* > 0$, dafür (x_1, x_2) beliebig

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \right| < \epsilon \quad x_1, x_2 \in (a, a + \delta^*).$$

Für $a < x < a + \min(\delta, \delta^*)$ gilt deswegen:

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - A \right| < 2\epsilon.$$

Endlich ist:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a^+} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = A = \lim_{x_1 \rightarrow a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Der Fall $x \rightarrow \infty$ kann durch Substitution $x = 1/y$ und $y \rightarrow 0^+$ bewiesen werden.