

Theorie 5

1 Die Ableitung

Wir betrachten jetzt die Differentiation von reellwertigen Funktionen. Die Ableitung ist ein mächtiger Werkzeug der Analysis, sie entspricht intuitiv das Wachstumsverhältnis von Funktionen.

1.1 Drei Formulierungen der Differenzierbarkeit

Die folgende Definitionen sind logisch äquivalent.

I Formulierung.

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst in $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der folgende Grenzwert (Differentialquotient) existiert.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Man kann x als $x_0 + h$ schreiben. Dann gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometrisch interessant ist die lineare Funktion

$$L(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Diese stellt die Sekante durch die Punkte $p_0(x_0, f(x_0))$ und $p(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dar. Sei die Funktion in x_0 differenzierbar, das strebt die Steigung nach $f'(x_0)$ und die Gerade

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wird die Tangente in diesem Punkt.

II Formulierung.

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $q(x)$ gibt, so dass:

$$f(x) = f(x_0) + q(x)(x - x_0).$$

Eine in x_0 differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.

Beweis. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dann ist die Funktion $q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ in x_0 stetig fortsetzbar und der Wert dieser Funktion ist dort ebenfalls $q(x_0) = f'(x_0)$.

III Formulierung.

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass:

$$F(x_0) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - f(x)}{x - x_0} = 0.$$

Es gilt:

$$F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$F(x) - f(x)$ strebt mit $x - x_0$ nach 0 schneller als $x - x_0$.

Diese dritte Formulierung ist ein erster Schritt zur Definition der *lokalen* Approximation einer Funktion, was später mithilfe der Taylorentwicklung erweitert wird.

1.2 Ableitungsregeln

Die Beweise zu den folgenden Regeln sind ab S.129 von *Königsberger* zu finden.

(I).**Summe:** $\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx};$

(II).**Produkt:** $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + \frac{dg(x)}{dx}f(x);$

(III).**Division:** $\frac{d(f(x)/g(x))}{dx} = \left(\frac{df(x)}{dx}g(x) - \frac{dg(x)}{dx}f(x) \right) \frac{1}{g^2(x)};$

(IV).**Kettenregel:** $\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$ (Differenzierbarkeit beachten!);

(V).**Inverse Funktion:** Sei g die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, so ist g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dg(x_0)}{dx} = \frac{1}{df(y_0)/dx} = \frac{1}{df(g(x_0))/dx}$$

1.3 Wichtige Ableitungen

$\frac{d}{dx}k = 0$	$\frac{d}{dx}x = 1$
$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$	$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\frac{d}{dx}\log_a(x) = (x \ln(a))^{-1}$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} x = \frac{ x }{x}$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$
$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$	$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$