

# Theorie 3

## 1 Umkehrfunktionen

Um die Bedingungen für die Umkehrung einer Funktion zu verstehen, muss man zuerst einige Definitionen festlegen.

**Definition. Injektivität.** Eine Abbildung von einer Definitionsmenge  $A$  zu einer Zielmenge  $B$  heisst **injektiv** falls zu jedem Element von  $B$  **höchstens ein**<sup>1</sup> Element von  $A$  angeordnet ist. Dieser Begriff kann natürlich bei Funktionen benutzt werden.

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  ist injektiv, wenn zu jedem  $y \in W$  höchstens ein  $x \in D$  angeordnet ist.

Dies bedeutet auch: falls  $f(x_1) = f(x_2)$ , dann gilt  $x_1 = x_2$ . Alle streng monotone Funktionen sind injektiv.

**Definition. Surjektivität.** Eine Abbildung von einer Definitionsmenge  $A$  zu einer Zielmenge  $B$  heisst **surjektiv** falls zu jedem Element von  $B$  **mindestens ein** Element von  $A$  angeordnet ist. Dieser Begriff kann auch bei Funktionen benutzt werden.

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  ist surjektiv, wenn zu jedem  $y \in W$  mindestens ein  $x \in D$  angeordnet ist. In diesem Fall wird  $W$  äquivalent zum Bildbereich der Funktion.

Eine Funktion ist dann auf  $\mathbb{R}$  surjektiv, wenn sie jeden Wert von  $\mathbb{R}$  mindestens einmal nimmt. Sei eine Funktion gleichzeitig injektiv und surjektiv, dann wird sie **bijektiv** genannt.

**Definition. Umkehrfunktion.** Dies bezeichnet eine Funktion  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  dafür gilt  $g(f(x)) = x$ . Manchmal wird  $g(x)$  auch als  $f^{-1}(x)$  bezeichnet.

Eine bijektive Funktion ist immer **umkehrbar**. Jeder Injektiven Funktion kann auch eine umkehrfunktion angeordnet werden, falls der Wertebereich auf den Bildbereich eingeschränkt wird. Der Graph  $G(g)$  der Umkehrung einer bijektiven Funktion auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  resultiert durch *Spiegelung* an die Gerade  $y = x$  von  $G(f)$ .

## 2 Asymptoten

Eine Funktion  $g(x)$  ist eine Asymptote von  $f(x)$  falls:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Asymptoten sind sehr hilfreich um das Verhältnis von komplizierten Funktionen bei grossen  $x$  mittels einfacheren Funktionen zu untersuchen. Die einfachste Form von Asymptot ist eine Gerade.

## 3 Der Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz ist eine Grundlegende Aussage der Analysis. Der folgende Beweis ist äquivalent zu dem etwas "praktischeren" aber auch längeren Beweis auf dem Vorlesungsskript, Teil A.1, S 34.

**Satz.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Diese Funktion nimmt jeden Wert  $\gamma$  zwischen  $\alpha = f(a)$  und  $\beta = f(b)$  zumindest an einer Stelle  $c \in [a, b]$ .

**Beweis.** Genommen wird den Fall  $\alpha < \gamma < \beta$ . Wir betrachten die Menge:

$$M = \{t \in [a, b] : f(t) \leq \gamma\}.$$

---

<sup>1</sup>Eventuell gar kein!

Diese Menge ist per Definition beschränkt und nicht leer, deshalb gilt  $c = \sup(M)$ . Unser Ziel ist  $f(c) = \gamma$  zu zeigen.

Da  $c$  die kleinste obere Schranke von  $M$  ist, gibt es eine zur Menge gehörende Folge  $\{t_n\}$  mit  $t_n \rightarrow c$ . Es gilt ausserdem  $f(t_n) \leq \gamma$  laut Definition der Menge. Das Folgenkriterium Impliziert dann:

$$f(c) = \lim f(t_n) \leq \gamma.$$

Das bedeutet auch  $c \neq b$  und deshalb  $c < b$ . Analog, kann man durch eine Folge  $\{x_n\}$  auf der Menge  $[b, c]$  zeigen, dass:

$$f(c) = \lim f(x_n) \geq \gamma.$$

Aus diesen beiden Grenzwerten folgt offensichtlich, dass  $f(c) > \gamma$  und  $f(c) < \gamma$  ungültig sind und dann  $f(c) = \gamma$  q.e.d.

Eine direkte, wichtige Folgerung des Satzes ist die Existenz von Nullstellen bei stetigen Funktionen die Werte  $f(x_1) \leq 0$  und  $f(x_2) \geq 0$  annehmen.