

Theorie 2

1 Funktionen

1.1 Grundbegriffe

Als *reelwertige Funktion* $f(x)$ bezeichnet man eine Zuordnung von Elementen einer reellen Menge D auf eine Untermenge W von \mathbb{R} ($D \subseteq \mathbb{R}, W \subseteq \mathbb{R}$). D ist der *Definitionsbereich* und W der *Wertebereich* der Funktion. Man schreibt:

$$f : D \rightarrow W \text{ und } x \rightarrow f(x)$$

Unter dem *Graphen* von $f(x)$ versteht man die folgende Menge:

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}$$

Definition. Monotonie: Eine Funktion heisst *monoton fallend* bzw. *wachsend*, wenn $\forall (x_1, x_2) \in D$ mit $x_2 \geq x_1$ gilt $f(x_2) \leq f(x_1)$ bzw. $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Folgendes gilt offensichtlich:

$$(I). (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(II). (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(III). \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für } g(x) \neq 0$$

1.2 Zusammensetzung von Funktionen

Man betrachte die folgende verkettete Beziehung: $D_f \rightarrow D_g \rightarrow \mathbb{R}$. Dies bezeichnet eine Abbildung von dem Definitionsbereich einer Funktion f zum Definitionsbereich einer Funktion g und eine weitere zur Menge \mathbb{R} . Das entspricht die *zusammengesetzte* Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Wir haben somit eine "Funktion einer Funktion" definiert. Zusammengesetzte Funktionen zeigen interessante Eigenschaften in der Integral- und Differentialrechnung, wie wir sehen werden.

2 Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *stetig* im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D \quad \text{mit } |x - x_0| < \delta.$$

Der Graph einer auf einem Intervall stetigen Funktion verläuft über dem ganzen Intervall. Falls ein universelles $\delta(\epsilon)$ existiert (d.h. $\forall x_0$ von D bestimmt), spricht man von **gleichmässigen Stetigkeit**.

Die Stetigkeit einer Funktion wird auf einer **Umgebung** definiert. Sei $a \in D$; eine Umgebung von a ist eine Teilmenge $U \subset D$ der Form $U_\epsilon(a) \cap D$. Dabei bezeichnet U_ϵ eine Menge die infinitesimal verkleinert werden darf. Ein erklärendes Beispiel kann auf S.81 vom Königsberger gelesen werden.

Satz. Folgenkriterium: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$ wenn $\forall \{x_n\} \in D$ mit $x_n \rightarrow x_0$, gilt: $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Beweis. Sei f stetig in x_0 , dann gibt es eine Umgebung U von x_0 in D , so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in U$. Konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen x_0 , so gilt $x_n \in U$ und damit $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ für fast alle n , d.h. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

2.1 Lipschitz

Eine spezielle, wichtige Form von Stetigkeit ist die *Lipschitz-Stetigkeit*. Sie wird folgendermassen definiert:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|, \text{ wobei } L \text{ eine Konstante ist. Dies gilt für alle } (x_1, x_2)$$

Die Geometrische Bedeutung der Lipschitz-Stetigkeit ist, dass die *Abstandsverzerrung* der Funktion von einer Konstante beschränkt wird. Dabei gilt $\delta = \frac{\epsilon}{L}$.

2.2 Rechenregeln

Es gelten die folgenden Rechenregeln mit stetigen Funktionen:

(I). Seien f, g stetig in $x_0 \in D$, dann sind auch $f + g$ und fg in x_0 stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$ so ist $\frac{f}{g}$ stetig. Beweise mit dem Folgenkriterium, S. 82.

(II). Seien die Funktionen f und g in x_0 stetig, dann ist auch $f \circ g$ stetig.

3 Stetige Fortsetzung und Grenzwerte von Funktionen

Sei eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Dies *muss nicht* aber *darf* zu D gehören. Wir sind an einer Funktion F , die auf $D \cup \{x_0\}$ stetig ist, interessiert. Diese Funktion stimmt mit f auf $D \setminus \{x_0\}$ überein. Diese Funktion F heisst *stetige Fortsetzung* von f in x_0 . Dieser Konzept wird relevant wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist.

Definition. Häufungspunkt: x_0 ist ein Häufungspunkt von D , wenn jede Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte enthält.

Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann gilt der folgende Satz.

Satz. Einzigkeitssatz: Eine auf $D \setminus \{x_0\}$ definierte Funktion besitzt höchstens eine stetige Fortsetzung in x_0 .

Satz. Hilfssatz zum Beweis: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , so gibt es eine Umgebung von x_0 in der gilt (überall in der Umgebung) $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)|$. Beweis S.83.

Beweis. Nach dem Hilfssatz, gibt es zu in x_0 stetigen Fortsetzungen F_1, F_2 eine Umgebung U von x_0 in $D \cup \{x_0\}$, so dass: $|F_1(x) - F_2(x)| \geq \frac{1}{2}|F_1(x_0) - F_2(x_0)|$
 x_0 ist ein Häufungspunkt, das bedeutet, es gibt einen $x \neq x_0$ in U . Auf solchen x ist aber die Stetige fortsetzung gleich wie die Funktion $f(x)$, das heisst:
 $F_1(x) - F_2(x) = 0, \quad F_1(x_0) = F_2(x_0) \quad \text{q.e.d.}$

3.1 Grenzwerte

Eine Funktion f besitzt in seinem Häufungspunkt x_0 vom Definitionsbereich D den Grenzwert a , wenn $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ dafür gilt:

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Dann konvergiert die Funktion gegen a und man schreibt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Definition. Zwei Funktionen f, g sind **asymptotisch gleich**, falls der Limes zu x_0 von $\frac{f}{g}$ gleich 1 ist.

Satz. Folgenkriterium für die Konvergenz: Aus dem Kriterium für Stetigkeit folgt, dass die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in x_0 genau dann den Grenzwert a , wenn $\forall \{x_n\}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$

3.2 Rechenregeln

Es gelten die folgenden Regeln, für $f(x) \rightarrow a$, $g(x) \rightarrow b$, falls $x \rightarrow x_0$ (Beweise auf S.96):

$$(I). f(x) + g(x) \rightarrow a + b$$

$$(II). f(x)g(x) \rightarrow ab$$

$$(III). \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Bemerkung: Eine analoge Version des **Sandwichssatzes** für Folgen gilt auch für Funktionen. Der Beweis ist auch ganz analog.

3.3 Einseitige Grenzwerte(I), Grenzwert bei Unendlich(II), uneigentliche Grenzwerte (III)

Definition. (I)

Eine Funktion f hat in x_0 den linksseitigen Grenzwert (bzw. rechtsseitig) $a \in \mathbb{R}$ wenn $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass gilt: $|f(x) - a| < \epsilon$ für $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0)$. Linksseitig, analog definiert man den rechtsseitigen Grenzwert. Man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

Diese stimmen nicht unbedingt überein.

Definition. (II)

Eine Funktion f in einem unbeschränkten Bereich D besitzt den Grenzwert bei Unendlich $a \in \mathbb{R}$ wenn $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N$ so dass gilt: $|f(x) - a| < \epsilon$ für $x > N, x \in D$. Man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

Dieser Grenzwert ist eine Verallgemeinerung des Grenzwerts einer Folge. Hier gilt aber eine Definition für $+\infty$ sowie eine für $-\infty$. Asymptotisch gleiche Funktionen werden analog in diesem Fall definiert.

Definition. (III)

Eine Funktion besitzt in x_0 den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$ wenn $\forall K \in \mathbb{R}$ eine punktierte Umgebung ¹ $U^*(x_0)$ gibt, so dass: $f(x) > K$ bzw $f(x) < K \quad \forall x \in U^*(x_0) \cap D$
Man schreibt ebenfalls:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Für uneigentliche Grenzwerte gelten die trivialen Rechenregeln auf S.102.

4 Einige Grenzwerte

Grenzwerte können nicht immer direkt und einfach durch Einsetzen berechnet werden. Falls wir uns vor solchen *nicht determinierten Formen* uns befinden, müssen wir einen anderen Weg (Vereinfachung oder "Tricks") verwenden, um den Grenzwert zu bestimmen.

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

¹Entsteht durch das Entfernen von x_0 selber

4.1 Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \frac{1}{2} & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cos(f(x)) - 1}{f(x)^2} &= \frac{1}{2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= 0 & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cos(f(x)) - 1}{f(x)} &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x^2} &= \frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{x} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} &= 1
 \end{aligned}$$

4.2 Wachstumsgeschwindigkeit

Bei Brüchen kann man die "Geschwindigkeit" (Grossenordnung) der Funktionen betrachten, bei Unendlichen und bei 0. Eine schnellere Funktion, durch eine langsamere dividiert, ergibt bei $x \rightarrow \infty$ den Limes ∞ . Umgekehrt, wird der Grenzwert 0.

Ein Beispiel ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. In diesem Fall, schreibt man mithilfe des Landau symbols $o()$:

$$\ln(x) = o(x)$$

Um zu bemerken, dass x schneller als $\ln(x)$ ist.

4.3 Eulersche Zahl

Aus den Eigenschaften von e (siehe Stammbach, Teil A, Kapitel 1.1) kann man die folgende Grenzwerte leicht herleiten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \quad \lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \frac{1}{e}$$