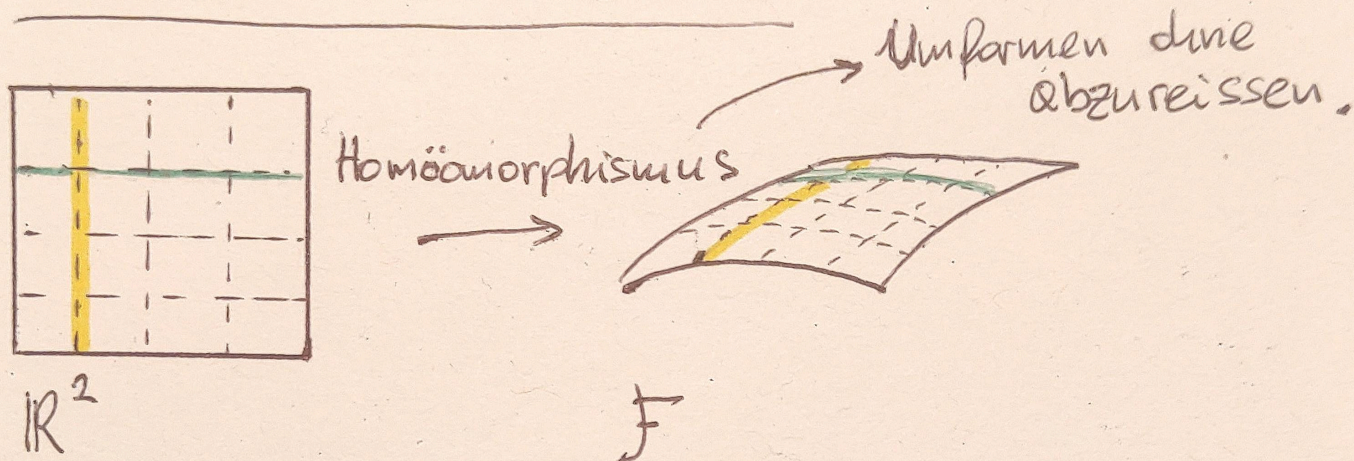


Theorie 17

1. Parametrisierbare Flächen



• Eine Oberfläche im Raum ist ein Spezialfall ($n=2$) einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

• DEF eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist an jedem Punkt lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n .

• DEF eine " mit Rand ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}_+^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0 \forall i \}$

\Rightarrow wo $x_i = 0$ liegen Punkte, die zum Rand ∂F durch den Homöomorphismus abgebildet werden.

1.1 Beispiele von Parametrisierungen

• Kugel

Gleichung: $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}_{\text{zentrum}} = \underbrace{R^2}_{\text{Radius}} \}$

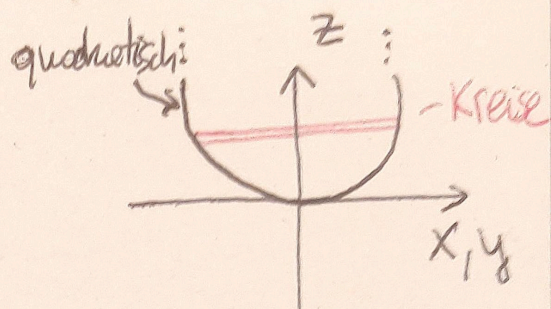
N.B.: Allgemein, n -dimensional: $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2 = R^2$

Parametrisierung: $\vec{c}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, \pi] \end{matrix}$

Paraboloid

Gl: $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$

$z = R^2$ für jeden Querschnitt.

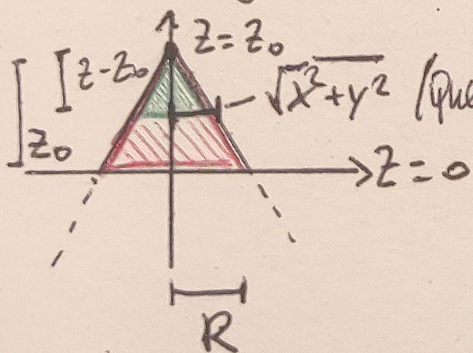


Per: $r \in [0, \sqrt{z_{\max}}]$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\vec{c}(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$
gegeben
damit $z = r^2$!

Kegel (nach unten geöffnet, Spitze bei $(0, 0, z_0)$)
Radius R am "Boden"

Gl: $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0 - \frac{z_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\}$

Herleitung:



▲ und ▲ ähnlich:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z_0 - z} = \frac{R}{z_0}$$

$$\Rightarrow z = z_0 - \frac{z_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow z = z_0 - z_0 \frac{r}{R} = z_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

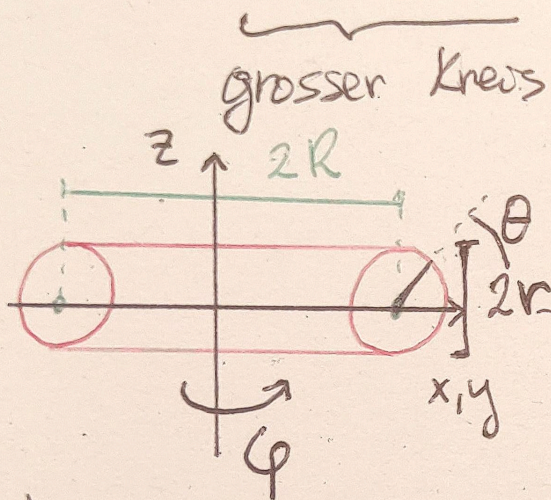
Per: $\vec{c}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \end{pmatrix}$

Torus (Kleiner Radius r , grosser R)

Gl: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$

Per:

$$\vec{c}(\varphi, \theta) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \varphi, \theta \in [0, 2\pi]$$



Kleiner Kreis der
beim grossen Radius
konstruiert wird

Rotation von einem Kreis in der (x, z) -Ebene:

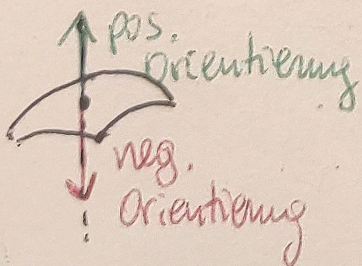
$$(x-R)^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \vec{c}_K(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 0 \\ r \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix um z-Achse: $R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 ← multipl. um zu rotieren

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta + R \\ 0 \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi + r \cos \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi + r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \square$$

1.2 Eigenschaften

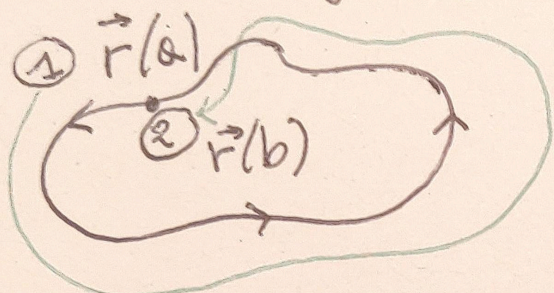
• Normaleinheitsvektor: $\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)|}$



→ je nachdem, was für einen Vorzeichen gewählt wird.

DEF Eine Fläche F heißt "regulär", falls $\vec{r}(u, v)$ stetig diff'bar und $\vec{n} \neq 0$ zu jedem Punkt.

DEF eine Fläche heißt "orientierbar" falls
 $\exists \vec{n} \neq 0$ und für jede geschlossene Kurve, die
auf F liegt, gilt: $\lim_{t \rightarrow b^-} \vec{n}(\vec{r}(t)) = \vec{n}(\vec{r}(a))$



a : Anfang, b : Ende

$[\vec{r}(a) = \vec{r}(b) \text{ (Kurve ist geschlossen)}]$

\Rightarrow Also $\vec{n}(\vec{r}(t))$ zeigt
 stetig in die gleiche
 Richtung...

DEF Eine Fläche ist geschlossen wenn sie
 keinen Rand besitzt.

1.3 Oberflächenelemente in \mathbb{R}^3

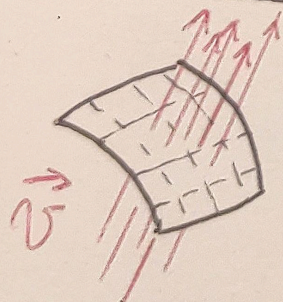
$$\vec{r}(u,v) \Rightarrow dO = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = |J| du dv$$

Kartesisch: $f(x,y) = z \Rightarrow \vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))^T$

$$\vec{r}_x = (1, 0, f_x)^T \quad \vec{r}_y = (0, 1, f_y)^T$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \left| \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

1.4 Fluss



$$d\Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} dO \quad (\vec{n} \text{ ist per. Def. normiert})$$

Gegeben Parametrisierung $\vec{r}(u,v)$, dann:

$$\Phi = \iint_F \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \pm \iint_F \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

$$= \pm \iint_F \vec{v} \cdot \tilde{n} du dv$$

\hookrightarrow nicht
 normiert: Größe vom Flächenelement
 ist hier enthalten.