

Theorie 1b

1. Vektorfeld

DEF: $f: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$

n : Variablen, m : Anzahl Dimensionen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ v_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = v_i(x_j)$$

jede Komponente v_i ist eine Funktion $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$.

2. Differentialoperatoren

$$\begin{bmatrix} \text{grad}(f) \\ \nabla f \\ (a) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{div}(\vec{v}) \\ \nabla \cdot \vec{v} \\ (b) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{rot}(\vec{v}) \\ \nabla \times \vec{v} \\ (c) \end{bmatrix} \quad \nabla := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{e}_j$ (mit $(x, y, z) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$)

b) $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

c) $\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{e}_i \epsilon_{ijk}$

(*) \Rightarrow Einsteinsche Summenkonvention: wenn ein Index wiederholt erscheint, wird implizit darüber summiert.

$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \in \{[123], [312], [231]\} \\ 0 & \text{sonst} \\ -1 & ijk \in \{[132], [321], [213]\} \end{cases}$: Levi-Civita Symbol

Tatsächlich: $\text{rot}(\vec{v}) = (v_{3,y} - v_{2,z}) \hat{e}_x + (v_{1,z} - v_{3,x}) \hat{e}_y + (v_{2,x} - v_{1,y}) \hat{e}_z$
 $\xrightarrow{\epsilon_{132} = -1} \epsilon_{132} = -1$
 $\xrightarrow{\epsilon_{123} = 1} \epsilon_{123} = 1$

$n=3 \Rightarrow$ "Realität", aber Grundsätzlich können $\nabla \cdot \vec{v}$ und ∇f auf n -Dimensionen erweitern.

2.1 Eigenschaften

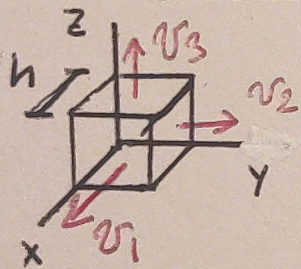
Linearität der Ableitung \Rightarrow Linearität von div , grad .
 Linearität vom Vektorprodukt \Rightarrow Linearität von rot .

Also:

- $\text{grad}(af + bg) = a \text{grad}(f) + b \text{grad}(g) \quad a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{div}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a \text{div}(\vec{v}) + b \text{div}(\vec{w})$
- $\text{rot}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a \text{rot}(\vec{v}) + b \text{rot}(\vec{w})$
- $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$ (unabhängig von den Koordinaten)
- $\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$ (gezeigt in der Serie).

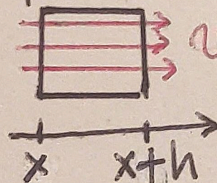
2.1.1 Quellenfreiheit

Annahme: nur senkrechter Durchfluss



- \vec{v} : beschreibt eine Flüssigkeit mit $\rho=1 \Rightarrow dm = dV = dx dy dz$
- "wieviel \vec{v} " fließt durch den Würfel?

Seiten sieht:



- Φ : Fluss [Vol/s]
- \vec{v}_i : Geschwindigkeit
- $A \cdot v \Rightarrow m^2 \cdot \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{Vol}{s}$

\rightarrow Es fließt "rein" bei x und "raus" bei $x+h$

Netto: $[v_1(x+h, y, z) - v_1(x, y, z)] \cdot h^2$

h^3

\rightarrow Normalisiert mit dem Volumen.

Fläche

An den Grenzwert: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[v_1(x+h, y, z) - v_1(x, y, z)]}{h} := \frac{\partial v_1}{\partial x} = \Phi_1$

Analog für y und z , wenn alle Beiträge summiert werden, ergibt sich: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \text{div}(\vec{v})$

Also: $\text{div}(\cdot)$ beschreibt das Verhältnis einer Punktquelle

Für $\text{div}(\cdot) \equiv 0 \Rightarrow$ Feld ist quellenfrei (keine Dilatation/Kompression)

2.1.2 Wirbelfreiheit

Wir nehmen $P(x, y, z)$, einen Punkt, die Geschwindigkeit von P ist:

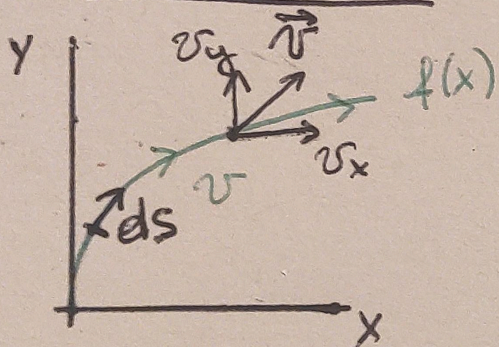
$$\vec{v}(P) = \omega \times \vec{PO} + \underbrace{\vec{v}_{tr}(P)}_{\text{rein translatorisch, kann als homogenes Feld dargestellt werden: } \vec{v}_{tr} = (c_1, c_2, c_3) = \text{konst}}$$
$$P = (x, y, z)^T$$

$$\text{rot}(\vec{v}(P)) = \text{rot}(\omega \times \vec{PO}) + \text{rot}(\vec{v}_{tr}(P))$$
$$= 0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_1 \\ 2\omega_2 \\ 2\omega_3 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}$$

$\text{rot}(\cdot)$ entspricht also lokale Winkelgeschwindigkeit,
 $\text{rot}(\vec{v}) \equiv 0 \Leftrightarrow$ Feld ist "Wirbelfrei"

3 Feldlinien



- Wir wollen die Linien "berechnen"!
- ds tangential zur "unbekannten" Funktion $f(x)$.

$$\bullet |ds \times v| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} := f'(x)$$

$$ds = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$
$$= v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y$$

• Also: $\int f'(x) dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{v_y}{v_x} dx = f(x)$