

Theorie 15

1 Das Gebietsintegral

Wir betrachten ein Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und definieren das Doppelintegral einer Funktion in zwei Variablen als Grenzwert der Riemannschen Summe aller Teilflächen ΔF von der Aufteilung in n Untergebieten von B multipliziert mit dem Wert der Funktion $f(x, y)$ in einem Punkt (x_i, y_j) , der zu diesen Untergebiet gehört:

$$\iint_B f(x, y) dF = \lim \sum_{i=1, j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta F_{i,j}$$

Dabei bezeichnet dF ein Differential der das Flächeninhalt ΔF für verschwindend kleine Flächenelemente gut (linear) approximiert.

Die Berechnung dieses Integrals kann als Integral eines Integrals verstanden werden: wir integrieren die Funktion zuerst bezüglich einer Variable und diesen Integral nochmals bezüglich der anderen. Wir zeigen dies zuerst für den Fall des Vierecks $B = [a, b] \times [c, d]$.

Satz. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Regelfunktion (vgl. Analysis 1, Theorie 9), dann gilt:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Beweis. Wir definieren die folgende Funktion:

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

und mithilfe der Definition für die Riemannsche Summe in einer Variable:

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x) dx$$

wobei wir $[a, b]$ in Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ aufgeteilt haben. Wir verwenden den Mittelwertsatz und definieren

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x) dx = \phi(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Dann gilt:

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \phi(x_i^*) \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \int_c^d f(x_i^*, y) dy$$

Nochmals, nehmen wir (Mittelwertsatz):

$$y_j^* \in [y_{j-1}, y_j] \rightarrow \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y) dy = f(x_i^*, y_j^*)(y_j - y_{j-1})$$

Es folgt:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{d-c}{n} f(x_i^*, y_j^*) = \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta F_{i,j}$$

Nehmen wir jetzt den Grenzwert von diesem Ergebnis dann bekommen wir die Hypothese. Analog (zuerst in y , dann in x) kann die andere Beziehung bewiesen werden.

1.1 Gebiete

In diesem Kurs werden wir nur folgende Gebiete betrachten, die uns erlauben die Grenzen von Integralen mithilfe von Funktionen zu feststellen:

$$\text{Typ I} \rightarrow B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq x \leq x_1, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\};$$

$$\text{Typ II} \rightarrow B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_0 \leq y \leq y_1, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\};$$

Ein Gebiet kann natürlich auf beiden Weisen beschrieben werden, indem man die Funktionen umkehrt. Wir können den vorherigen Satz auf alle Gebiete von dieser Sorte erweitern, indem wir eine Funktion in einem Rechteck D definieren mit $B \subseteq D$:

$$\tilde{f}(\vec{r}) = \begin{cases} f(\vec{r}) & \vec{r} \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Integral über B wird dann definiert als:

$$\iint_B f(x, y) dF = \iint_D \tilde{f}(x, y) dF$$

Und kann wieder als wiederholtes Integral berechnet werden.

2 Das Volumenintegral

Analog zum Gebietsintegral kann man das Volumenintegral folgendermassen definieren:

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \lim \sum_{i=1, j=1, k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{i,j,k}$$

Wie im 2D Fall, kann man Volumenintegrale als 1D-Integral eines Gebietsintegrals berechnen.

2.1 Koordinatentransformationen

Wir untersuchen jetzt zwei alternativen Koordinatensysteme die die Berechnung von Volumenintegralen deutlich vereinfachen (zum Beispiel bei rotationsymmetrischen Gebieten).

1) Zylinderkoordinaten: Wir darstellen alle Punkte des Raums als Punkte der Mantelfläche eines Zylinders mit Radius ρ und Hauptachse parallel zu z :

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

$$z = z$$

2) Kugelkoordinaten: Wir darstellen alle Punkte des Raums als Punkte der Oberfläche einer Kugel mit Radius ρ . Wir bewegen die Spitze vom Ortsvektors mithilfe von zwei Winkeln: ϕ liegt auf der x-y Ebene und nimmt Werte zwischen 0 (Vektor liegt parallel zur x-Achse) und 2π ; θ entspricht der Winkel zwischen z-Achse und Ortsvektor und nimmt Werte zwischen 0 (Vektor liegt parallel zur z-Achse) und π .

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = \rho \cos(\theta)$$

2.2 Transformation von Gebiets- und Volumenintegralen

Bei Transformation der zu integrierenden Funktion muss auch der Volumenelement dV angepasst werden. Dazu hilft uns der **Jacobideterminante** der Koordinatentransformation. Wir zeigen zuerst die Herleitung im 2D-Fall.

Wir betrachten einen Koordinatensystem (u, v) und stellen uns einen Ortsvektor $\vec{r}_A = (u, v)^T$ vor, der zu den Punkt A zeigt. Wir bewegen uns um eine Länge du bei festem v und definieren den Punkt B (mit $\vec{r}_B = (u + du, v)^T$). Bei einer Bewegung um dv von A bekommen wir C (mit $\vec{r}_C = (u, v + dv)^T$) und definieren noch D mit $\vec{r}_D = (u + du, v + dv)^T$. Die Fläche dF innerhalb von ABCD wird dann:

$$dF = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Es gilt:

$$\vec{AB} = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v)$$

$$\frac{\vec{AB}}{du} = \frac{\vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v)}{du}$$

Lassen wir $du \rightarrow 0$, dann bekommen wir eine partielle Ableitung:

$$\frac{\vec{AB}}{du} = \frac{\vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v)}{du} = \vec{r}_u(u, v)$$

Deshalb haben wir:

$$\vec{AB} = \vec{r}_u(u, v)du$$

$$\vec{AC} = \vec{r}_v(u, v)dv$$

$$dF = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|dudv$$

Man kann alternativ die (Jacobi-) matrix $J = \text{Mat}(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ aufstellen und merkt sofort, dass der Vektorprodukt genau die Determinante ($|J|$) entspricht. Deshalb gilt für die Koordinatentransformation:

$$dF = |J|dudv$$

Im dreidimensionalen Fall gilt analog, mit dem Spatprodukt:

$$dV = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_w dudv dw$$

Der Spatprodukt entspricht die Determinante der Jacobimatrix in 3D.

Man sieht leicht, dass die partielle Ableitung des Ortsvektors, Komponente nach Komponente genau die partielle Ableitung der Funktionen die unsere Koordinatentransformation definieren ist:

$$\vec{r} = (x = f_1(u, v, \dots); y = f_2(u, v, \dots), \dots)$$

Dann, mit $x_i = f_i(u, v, \dots)$ haben wir:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$