

# Theorie 14

## 1 Schwerpunkt, Flächenmittelpunkt

Wir berechnen den Schwerpunkt von einem Kontinuum anhand des Gleichgewichts der Momenten von Gravitationskräften am Körper. Wir definieren die Kraftdichte von einem **homogenen** Körper als  $G(x)$ , welche im Fall einem ebenen Körper die Schnitthöhe in  $y$ -Richtung darstellt. Um die  $x$ -Koordinate vom Schwerpunkt (oder Flächenmittelpunkt)  $x_s$  zu berechnen haben wir die folgende Gleichung (vom GGW hergeleitet):

$$x_s \int_a^b G(x) dx = \int_a^b x G(x) dx$$

Analog kann man die  $y_s$  folgendermassen berechnen:

$$y_s \int_c^d H(y) dy = \int_c^d y H(y) dy$$

**Beispiel.** Wegen der Rotationssymmetrie, kann diese Berechnung für Flächenmittelpunkte auf 3D-Körper erweitert werden.

Wir nehmen zum Beispiel eine homogene Halbkugel mit Dichte 1,  $\vec{g}$  in  $z$ -Richtung und Zentrum im Ursprung, dann schreiben wir (wegen symmetrie, reicht die Berechnung für die  $x$ -Achse aus):

$$x_s \int_0^r G(x) dx = \int_0^r x G(x) dx$$

mit  $G(x) = \pi(r^2 - x^2)$ : wir definieren die Fläche anhand des Abstands in  $y$ -Richtung ( $\forall x, y \quad r^2 = x^2 + y^2$ , wir bewegen uns aber entlang der  $x$ -Achse). Die Schnittflächen sind Halbkreise parallel zur  $yz$ -Ebene mit Radius  $y(x)$  und Oberfläche  $F(x) = \frac{\pi y(x)^2}{2}$ . Das wird mal 2 multipliziert, weil  $x$  zwischen 0 und  $r$  nur die Hälfte vom Halbkugel bezeichnet. Jetzt haben wir:

$$\int_0^r G(x) dx = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$x_s \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi \int_0^r x(r^2 - x^2) dx \Rightarrow x_s = \frac{3}{8} r.$$

## 2 Trägheitsmoment

Der Trägheitsmoment eines Körpers spielt eine wichtige Rolle im Bereich der Dynamik. Wir suchen den Trägheitsmoment bezüglich der  $a$ -Achse von einem system mit  $n$  Partikeln, dann haben wir folgende Definition:

$$\Theta_a = \sum_{d=1}^n d^2 m_d$$

wobei  $m_d$  die Masse von jeder Partikel mit Abstand  $d$  von der  $a$ -Achse bezeichnet.

Mit dem Übergang zu einem ebenen Kontinuum, schreiben wir diese Summe als Limes auf  $dm_d$  und deshalb als Riemannsche Summe bzw. Integral. Wir nehmen jetzt  $x$  und  $y$  als Achen und definieren die folgende Integrale:

$$\Theta_y = \rho \int_a^b x^2 G(x) dx \quad \Theta_x = \rho \int_c^d y^2 H(y) dy$$

wobei sehen wir: sei  $G(x)dx$  bzw.  $H(y)dy$  ein Flächenelement, dann ist der Massenelement gegeben als  $dm = \rho G(x)dx$  oder  $dm = \rho H(y)dy$  und  $\rho$  bezeichnet die Fläche-Massendichte. Mit  $\rho = 1$  spricht man von **Flächenträgheitsmoment**.

Analog zum Schwerpunkt, kann dieses Konzept wegen der Symmetrie auch auf Rotationskörper erweitert werden.

### 3 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten jetzt die zwei Fälle von uneigentlichen Integralen, die aus historischen Gründen in umgekehrten Reihenfolge erklärt werden.

#### 3.1 Uneigentliche Integrale 2. Gattung

Der Integrand ist stetig, das Integrationsintervall ist aber unendlich (in Form  $[a, \infty)$ , beidseitig unendliche Intervalle oder Intervalle wo  $-\infty$  können durch einfache Manipulation anhand von dieser Definition entstehen).

$$\int_a^\infty f(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^\xi f(x)dx$$

Um zu existieren, müssen diese Ausdrücke konvergieren und das hängt von der integrierenden Funktion selber. Siehe Stammach für Beispiele über die Konvergenz.

#### 3.2 Uneigentliche Integrale 1. Gattung

Bei solchen uneigentlichen Integralen ist das Intervall  $[a, b]$  endlich, die Funktion ist aber **nur** auf dem einseitig offenen Intervall  $([a, b)$  oder  $(a, b]$ ) stetig. Deshalb haben wir:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \int_\xi^b f(x)dx$$

Konvergenz ist auch in diesem Fall nicht garantiert.