

Theorie 13

1 Funktionen in zwei Variablen

In der Analysis II wird das Konzept der Funktion in einer Variable verallgemeinert. Wir klassifizieren jetzt eine Funktion nach den Eigenschaften des Definitions- und Wertebereichs.

1.1 Mengen und Abbildungen

In der Analysis I wurden schon diese Funktionen untersucht:

- **skalares** $D(f)$ und **skalares** $W(f)$, diese sind die gewöhnliche Funktionen mit Graph $\Gamma(f)$ dargestellt in \mathbb{R}^2 , $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $W(f) \subseteq \mathbb{R}$;
- **skalares** $D(f)$ und **vektorielles** $W(f)$, diese sind parametrisierte Kurven mit Graph $\Gamma(f)$ dargestellt in \mathbb{R}^2 , $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $W(f) \subseteq \mathbb{R}^2$;

In der Analysis II werden wir noch folgende Begriffe entdecken:

- **vektorielles** $D(f)$ und **skalares** $W(f)$, diese sind Funktionen in mehreren Variablen mit Graph $\Gamma(f)$ dargestellt in \mathbb{R}^n (für $n > 3$ kann natürlich die Funktion nicht mithilfe eines einfachen Graphen dargestellt werden, man muss durch einen anderen Weg das räumliche Verhältnis von f zeigen), $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W(f) \subseteq \mathbb{R}$;
- **vektorielles** $D(f)$ und **vektorielles** $W(f)$, diese sind parametrisierte Funktionen mit Graph (Kurve, Fläche, Körper usw.) $\Gamma(f)$ dargestellt in \mathbb{R}^n , $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Unter \mathbb{R}^2 versteht man eine Menge an geordneten Paaren $\{(x_1, y_1); (x_1, y_2); \dots\}$. Mit \mathbb{R}^3 ergeben sich Paare $\{[(x_1, y_1), z_1]; [(x_1, y_2), z_2]; \dots\}$ induktiv kann man dann die Menge \mathbb{R}^n definieren. Es gilt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ wobei \times der **Vektorprodukt zwischen Mengen** darstellt.

1.2 Beispiele

Um die Intuition zu fördern, betrachten wir jetzt drei Beispiele von Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel. Die Funktion $f(x, y) = z = 2x + y$ kann als die Erweiterung einer Gerade angesehen werden. Mit $z = 0$ ergibt sich eine einfache Gerade.

Durch variieren von z verändert man die ursprüngliche Gerade und verschiebt sich gleichzeitig entlang der z -Richtung.

Die **Durschnittsmenge** aller Punkte der zu jedem Wert von z gehörenden, horizontalen (zur x - y -Ebene parallelen) Ebenen mit den vertikalen (zur z -achse parallelen) Ebenen die durch die Gerade entstehen, ergibt eine Ebene im Raum.

Siehe: <https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+z%3D2x%2By>

Beispiel. Die Funktion $f(x, y) = z = x^2 + y^2$ ist die Erweiterung eines Kreises mit Radius $R = \sqrt{z}$. Mit $z = 0$ befinden wir uns auf der Ursprung. Durch variieren von z , wächst der Kreis und verschiebt er sich gleichzeitig nach oben (nur positive Werte von z sind erreichbar...). Dies ergibt einen sogenannten **Paraboloid**.

Jeder Kreis ist dann eine **Niveaulinie** der Funktion: entlang einer Linie besitzt z den gleichen Wert.

Siehe: <https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+z%3Dx%5E2%2By%5E2>

Beispiel. Die Funktion $f(x, y) = z = \sin(x) + \sin(y)$. Es geht um eine Lineare Kombination von Sinus-Funktionen, mit periodischen Maxima bei $z = 2$ und Minima bei $z = -2$.

Siehe: [https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+z%3Dsin\(x\)%2Bsin\(y\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+z%3Dsin(x)%2Bsin(y))

2 Partielle Ableitungen

Bei Funktionen mehreren Variablen ist es sinnvoll, die Partielle Ableitung zu definieren. Dabei wird nach einer Variable wie gewohnt abgeleitet und die anderen einfach als Konstanten betrachtet. Formell wird die partielle Ableitung bezüglich der Variable x folgendermassen definiert:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

und ganz analog nach der Variable y .

2.1 Satz von Schwarz

Der Satz von Schwarz besagt, dass, bei Ableitungen höherer Ordnung (partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen) die Reihenfolge der Variablen die man beim Ableiten wählt, keine Rolle spielt:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Durch Induktion (man nennt zum Beispiel $f_{xy} = g$) kann dies verallgemeinert werden zu Ableitungen beliebiger Ordnung.

Die Idee des Beweises ist es, dass die Ableitung nach einer Variable, eine infinitesimale Verschiebung in Richtung der zugehörigen Achse entspricht. Von Punkt $A(x_0, y_0)$ kann man Punkt $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ durch eine Bewegung in x -Richtung und nacher in y -Richtung oder umgekehrt erreichen.

2.2 Integrabilitätsbedingung

Die Integrabilitätsbedingung folgt direkt aus dem vorherigen Satz. Seien zwei Funktionen folgendermassen definiert:

$$\phi(x, y) = f_x \quad \psi(x, y) = f_y \quad \forall x, y \in D$$

Wenn weiter $\phi_y = \psi_x \quad \forall x, y \in D$ gilt, dann ist eine solche $f(x, y)$ in D definiert ($f_{xy} = f_{yx}$). In diesem Fall, kann man durch Integrieren von ϕ in x (die unbekannte konstante wird dann ein $C_1(y)$) und von ψ in y (mit $C_2(x)$) diese $f(x, y)$ herleiten.

Beispiel. Sei die Funktion $\phi(x, y) = e^x + 2y^2$ gegeben, deren Ableitung in y überall definiert ist. Dennoch sei $\psi(x, y) = 4xy + \sin(y)$. Dann gilt:

$$\phi_y = 4y \quad \psi_x = 4y$$

und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.

Durch Integrieren erhält man:

$$f_1(x, y) = \int \phi dx = e^x + 2xy^2 + C_1(y)$$

$$f_2(x, y) = \int \psi dy = 2xy^2 - \cos(y) + C_2(x)$$

Mithilfe eines Vergleichs, erhält man für $f(x, y) = f_1 = f_2 = 2xy^2 + e^x - \cos(y) + C$ die unsere Bedingung erfüllt.

3 Differenzierbarkeit, Tangentialebene

Wir betrachten jetzt zwei Geraden durch den Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$.

$$\begin{aligned} g_1 : z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) & y &= y_0 \\ g_2 : z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) & x &= x_0 \end{aligned}$$

In den beiden Fällen, sind diese die Linearisierungen der Funktionen $f(x_0, y)$ und $f(x, y_0)$ und stehen deshalb resp. tangential zu denen. Weil zwei Geraden eine Ebene spannen, wird dann die Kombination der beiden die Gleichung der Tangentialebene an der Funktion $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) darstellen:

$$\text{Tangentialebene} : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Existiert eine solche Ebene, dann ist die Funktion in (x_0, y_0) **differenzierbar**.

Mithilfe der Vektorschreibweise, kann man die Differenzierbarkeit einer Funktion bei \vec{r}_0 als die Existenz des folgenden Grenzwertes definieren:

$$\lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \vec{h}) - f(\vec{r}_0)}{|\vec{h}|}$$

Wir beschreiben jetzt kurz die Beziehung zwischen partiellen Ableitungen und Differenzierbarkeit. Zuerst, ist es zu bemerken, dass für

$$\vec{h} = (\Delta x, 0)^T \quad \text{bzw.} \quad \vec{h} = (0, \Delta y)^T$$

geht diese Formel zurück an die der partiellen Ableitung. Das heisst, existieren in einem Punkt $f(x_0, y_0)$ irgendwelche partielle Ableitungen nicht, dann ist die Funktion dort **nicht differenzierbar**. Allgemeiner, kann man eine **hinreichende** (aber nicht notwendige) Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion festlegen:

Satz. Sei $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion die in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig differenzierbare partielle Ableitungen (d.h. sie existieren im Punkt und sind in der gegebenen Umgebung stetig) besitzt, dann ist diese in (x_0, y_0) differenzierbar.

Eine kleine Bemerkung ist, dass es Funktionen geben kann, die zwar differenzierbar sind, aber keine **stetig differenzierbare** partielle Ableitungen besitzen. Ein Beispiel ist

$$f(x, y) = xy^{1/3};$$

wenn man die Differenzierbarkeit in der Ursprung untersucht, bemerkt man, dass obwohl die partielle Ableitungen definiert sind, ist f_y unstetig. Durch Anwendung der Definition kann man trotzdem die Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) bestätigen.

4 Linearisieren, Fehlerrechnung

Wir nehmen die Gleichung der Tangentialebene als Ausgangspunkt und definieren die folgende Fehlerfunktion (im Fall $n=2$, die aber allgemein gültig ist):

$$\phi(\Delta \vec{r}) = \phi(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (f(x_0, y_0) + \Delta x f_x(x_0, y_0) + \Delta y f_y(x_0, y_0))$$

Mithilfe des Mittelwertsatzes, kann man zeigen, dass diese Fehlerfunktion eine gute Approximation von $f(x_0, y_0)$ ist:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\phi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

oder anders geschrieben:

$$\phi(\Delta x, \Delta y) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

4.1 Das Totale Differenzial

Analog zum eindimensionalen Fall, kann man noch ein Koordinatensystem (dx, dy, df) im Punkt $f(x_0, y_0)$ einführen und das totale Differenzial der Funktion definieren:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Es gilt offensichtlich, dass:

$$\Delta f - df = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Das heisst, df ist für verschwindend kleine $\Delta x, \Delta y$ eine Approximation der Variation in f . Analog zum eindimensionalen Fall, kann man den **relativen Fehler** definieren als:

$$\frac{\Delta f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$$

Beispiel. Für das Trägheitsmoment Θ eines Vollzylinders (Radius R , Dichte ρ , Höhe h) schreibt man

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \rho R^4 h$$

Wir wissen, dass die Messung R und h von einem 1-prozentigen Fehler behaftet sind. Wie gross ist der Fehler für Θ ?

$$\Delta \Theta \approx \frac{\pi}{2} \rho 4R^3 h dR + \frac{\pi}{2} \rho R^4 dh$$

und der relative Fehler lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\left| \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \right| \approx 4 \left| \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{dh}{h} \right| = 5\%$$

5 Kurz-Tutorial: Berechnung von Grenzwerten in zwei Variablen

In vielen Fällen kann man durch einfaches Einsetzen den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} x^2 + y^2 = 0$$

weil dort der Grenzwert mit dem Wert der Funktion übereinstimmt. Sei die Funktion in einem bestimmten Punkt aber nicht definiert, oder bekommt man durch Einsetzen eine nicht determinierte Form, muss man zuerst **die Existenz des Grenzwertes überprüfen**. Existiert dann der Grenzwert, kann eine Transformation in **Polarkoordinaten** nützlich sein:

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

Wir nehmen zum Beispiel den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

und denken an einer möglichen **Einschränkung** der Funktion auf eine **eindimensionale Kurve**: $y = x$ oder $y = -x$

Durch Einsetzen bekommen wir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Das bedeutet, dass der Grenzwert nicht existiert $\left(\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}\right)$ weil er per Definition eindeutig sein muss.

Mit einem anderen Beispiel zeigen wir jetzt, wie man einen Grenzwert (der eigentlich existiert) berechnet. Wir benutzen die obige Koordinatentransformation:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{2\rho^3 \cos^2(\phi) \sin(\phi)}{\rho^2} = 2\rho \cos^2(\phi) \sin(\phi)$$

Es gilt weiter, für alle ϕ :

$$2\rho |\cos^2(\phi) \sin(\phi)| \leq 2\rho$$

Und wir wissen deshalb, dass für $2\rho \rightarrow 0$ auch die ursprüngliche Funktion nach 0 streben muss:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^2(\phi) \sin(\phi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$$

Hängt der Grenzwert vom Winkel ϕ ab, dann bekommt man dasselbe Ergebnis wie bei der Restriktion von $f(x, y)$ auf eine Kurve $y = f(x)$: der Limes existiert nicht, weil er verschiedene Werte im Gleichen Punkt, je nach "Richtung" durch die man den Punkt "erreicht", annimmt.