

# Theorie 12

## 1 Reihen und Konvergenz

Eine reelle Reihe ist eine Folge von unendlich vielen Partialsummen. Das heisst, sie wird mithilfe der folgenden Formel für  $(s_n)$  geschrieben:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Um eine Reihe als Summe von Gliedern zu schreiben, benutzt man die Sigma-Notation:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Jede  $s_n$  ist dann eine *Partialsumme* der Reihe. Sei der Limes von  $s_n$  für  $n \rightarrow \infty$  endlich, dann **konvergiert** die Reihe, sonst **divergiert** sie. Ein Beispiel von Konvergenz ist die geometrische Reihe:

$$1 + q + q^2 + q^3 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad |q| < 1$$

Man kann Zeigen, dass sie gegen  $\frac{1}{1-q}$  konvergiert. Die harmonische Reihe divergiert aber gegen  $\infty$ :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

**Beweis.** Wir nehmen  $n \geq 2^k$ .

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \dots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Und natürlich divergiert der letzte Ausdruck.

## 2 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nicht immer intuitiv. Es gibt deswegen eine grosse Menge von Mitteln, die uns helfen können, sie zu bestimmen.

### 2.1 Cauchy - Majorantenkriterium

Die Konvergenz einer Reihe wird folgendermassen nach Cauchy formuliert:

**Definition.**  $\sum a_n$  konvergiert genau dann, wenn es ein  $N$  und ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass für  $n > m \geq N$ :

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| < \epsilon$$

Das erlaubt uns zu sagen, dass eine Konvergente Reihe eine Nullfolge als Folge ihrer Glieder besitzt. Es reicht aber nicht, dass die Glieder nach 0 streben, um die Konvergenz der Reihe zu bestätigen, wie die harmonische Reihe zeigt. Noch zu bemerken ist, dass wenn man endlich viele Glieder einer Reihe ändert, die Konvergenz nicht geändert wird.

**Satz. Majorantenkriterium**

Sei  $|a_n| \leq |c_n|$  und sei  $\sum c_n$  konvergent, dann konvergiert auch  $\sum a_n$ . Es gilt:

$$\left| \sum a_n \right| \leq \sum |c_n|.$$

Der Satz lässt sich mithilfe der Rechenregeln von Folgen direkt zeigen. Zum Beispiel, jede Summe von Gliedern  $a_n q^n$  mit  $|a|, |q| < 1$  konvergiert, weil die Geometrische Reihe ein Majorant davon ist.

**2.2 Reihen mit nicht-negativen Gliedern**

Die Partialsummenfolge von diesen Reihen ist monoton wachsend. Es reicht deswegen zu zeigen, dass sie **beschränkt** ist, um zu sehen, dass die Reihe konvergiert.

**Beispiel.** Wir wollen zeigen, dass die Reihe  $\sum \frac{1}{n^s}$  nur für  $s > 1$  konvergiert.

Wir nehmen  $2^\nu - 1 > n$  und schreiben:

$$s_n < s_{2^\nu - 1} = 1 + \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^{(\nu-1)s}} + \dots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^s} \right) \leq 1 + 2 \frac{1}{2^s} + \dots + 2^{\nu-1} \frac{1}{2^{(\nu-1)s}} < \sum \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^k.$$

Wobei die letzte die geometrische Reihe ist. Nach dem Majoranten konvergiert dann die Reihe für  $s > 1$ .

**2.3 Reihen mit alternierenden Vorzeichen**

So eine Reihe wird folgendermassen definiert:

$$s_n = \sum (-1)^n a_n$$

**Beispiel.** Leibniz-Reihe:  $s_n = \sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

Wir nennen kurz, ohne Beweis, den sogenannten Leibniz-Kriterium.

**Satz.** Sei  $a_n$  (wie bei der Alternierenden Reihe definiert) eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe.

**2.4 Absolute Konvergenz**

**Definition.**  $\sum a_n$  heisst absolut konvergent falls  $\sum |a_n|$  konvergiert.

**Satz.** Eine absolut-konvergente Reihe ist konvergent.

**Beweis.** Man sieht sofort, dass  $\sum |a_n| \geq \sum a_n$  immer gilt (Dreiecksungleichung). Nach dem Majorantenkriterium, konvergiert dann  $\sum a_n$ .

Zum Thema absolute Konvergenz gehören zwei Kriterien.

**2.5 Wurzelkriterium**

Wir definieren  $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- Falls  $L < 1$  dann konvergiert die Reihe;
- Falls  $L > 1$  konvergiert die Reihe nicht;
- Für  $L = 1$  bleibt die Frage unentschieden.

Wenn die Reihe konvergiert, dann gilt  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

**Beweis.** Für die Konvergenz: sei  $q$  eine Zahl mit  $L < q < 1$ . Dann  $\exists N$  dafür  $|a_n| \leq q^n$  für  $n \geq N$ .  $q^n$  konvergiert ( $\sum |q| < 1$ ) und deshalb auch die Reihe wegen des Majorantenkriteriums.

## 2.6 Quotientenkriterium

Der Beweis zu diesem Kriterium folgt aus dem Wurzelkriterium (siehe S. 65).

Wir definieren  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

Die Fallunterscheidung ist analog zu der vom Wurzelkriterium (die Reihe konvergiert für  $q_1$ ).

## 3 Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist die Summe von Potenzen mit Basis  $q$ , multipliziert mit Koeffizienten  $a_n$ .

$$P(q) = \sum a_n q^n.$$

### 3.1 Konvergenzradius

Dieser Begriff hilft uns, die Konvergenz einer Potenzreihe zu untersuchen.  $\rho$  ist der Konvergenzradius.

**Satz.** Konvergiert die Potenzreihe  $P$  in einem Punkt  $q_0 \neq 0$ , so konvergiert sie absolut in jedem Punkt  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < |q_0|$ .

**Beweis.** Es gibt ein  $S \geq |a_n q_0^n|$ , dann gilt:  $|a_n q^n| = |a_n q_0^n| \left| \frac{q}{q_0} \right|^n \leq S \left| \frac{q}{q_0} \right|^n$  mit  $\left| \frac{q}{q_0} \right| < 1$ . Dies beweist die Konvergenz, indem wir einen konvergenten Majorant gefunden haben.

Wir definieren jetzt den Konvergenzradius  $\rho$ .

$$\rho = \rho(P) = \sup \{r \in \mathbb{R} : P(r) \text{ konvergiert}\}$$

Für

$$|q| < \rho$$

konvergiert die Potenzreihe absolut, andererseits

$$|q| > \rho$$

bedeutet, dass die Potenzreihe divergent ist.

$\rho$  kann entweder als  $\rho = \frac{1}{L}$  oder als  $\rho = \frac{1}{R}$  berechnet werden ( $L$  und  $R$  wie oben definiert).

Zu bemerken ist, dass bei  $\rho = 0$  die Reihe nur für  $q = 0$  konvergiert, für  $\rho = \infty$  konvergiert sie für alle  $q$ .

### 3.2 Taylorreihen

Wir motivieren jetzt die Formel von Taylor mit Restglied nach Peano.

**Satz.** Sei  $f(x)$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion und existiere  $f(x_0)$ . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x)$$

wobei  $R(x) = o[(x - x_0)^n]$ .

**Beweis.**

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0)$$

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Wir setzen jetzt:

$$R(x) = f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Beim  $k$ -mal ableiten dieses Ausdrucks bemerken wir folgendes:

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^k(x_0)}{k!}(k!)(x - x_0)^0 = f^k(x_0)$$

erste Ableitung:

$$R'(x) = f'(x) - \frac{d}{dx}f(x_0) - \dots - \frac{f^n(x_0)}{n!}(n)(x - x_0)^{n-1}$$

$(n-1)$ -te Ableitung:

$$R^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^n(x_0)(x - x_0).$$

Wobei alle terme mit Potenz von  $(x - x_0)$  kleiner als  $(n - 1)$  verschwunden sind.

Mithilfe von diesen Ableitungen (Regel von Bernoulli) können wir den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n}$$

Sei dieser Grenzwert gleich 0, dann beweisen wir die letzte Aussage des Satzes, diese bedeutet, dass unsere Fehlerfunktion-Restglied ( $R(x) = f(x) - \dots$ ) schnell genug nach null konvergiert und deshalb sei die Taylorreihe im Satz eine gute Approximation für  $f(x)$ . Wir leiten dann Zähler und Nenner im Grenzwert  $(n-1)$ -mal ab:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^n(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\ & \frac{1}{n!} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^n(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} \right] \\ & \frac{1}{n!} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^n(x_0) \right] = 0 \end{aligned}$$

Wobei der Bruch links ebenfalls die Definition von Ableitung der Funktion  $f^{n-1}(x)$  darstellt.

Wir betrachten jetzt die Reihe der Form

$$\sum a_n(x - x_0)^n$$

Man kann leicht zeigen, dass für geraden  $f(x)$  sind alle  $a_n$  mit  $n$  ungerade gleich 0 (und umgekehrt).

Durch **Koeffizientenvergleich** kann man leicht und schnell die Koeffizienten einer Reihenentwicklung ausgehend von denen einer Bekannten Taylorreihe berechnen. Beispielweise ( $a_n$  gesucht,  $b_n$  und  $c_n$  bekannt):

$$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n = \frac{\sum b_n(x - x_0)^n}{\sum c_n(x - x_0)^n}$$

Durch Ausmultiplizieren und Vergleichen der Koeffizienten jeder Potenz von  $x$  kann man die  $a_n$  finden. Die Berechnung wird für eine gegebene Anzahl  $n$  an Gliedern durchgeführt. Der Restglied kann dabei einfach ignoriert werden.