

Theorie 11

1 Partialbruchzerlegung

1.1 Motivation

Betrachtet man eine rationale Funktion durch den Bruch von Polynomen definiert: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. In vielen Fällen, z.B. beim Integrieren, lohnt es sich diesen Bruch in einer Summe von Faktoren niedrigeren Grad zu zerlegen, wobei $\text{Grad}(N(x)) < \text{Grad}(D(x))$. Dies kann man durch einen Ansatz und Auflösen eines LGS erreichen.

Beispiel. Man betrachte die Funktion ($\text{Grad}(D(x)) = 2$):

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Wir wollen Diese in zwei Terme mit $\text{Grad}(D(x)) = 1$ zerlegen. Wir bemerken sofort, dass:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$$

und entscheiden uns dafür zwei Parameter zu finden, so dass:

$$f(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

Wir multiplizieren bedseitig mit $D(x)$ und erhalten ein Gleichungssystem durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x + 1) + B(x - 1) \\ 1 &= x(A + B) + 1(A - B). \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen schlussendlich $A = 1/2$ und $B = -1/2$:

$$f(x) = \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$

1.2 D(x) in wiederholten, lineare Terme zerlegbar

Für Funktionen der Form:

$$f(x) = \frac{N(x)}{L_1^{n_1}(x)L_2^{n_2}(x)\dots L_m^{n_m}(x)}$$

wobei $L_m(x)$ einen linearen Polynom $(a + bx)$ bezeichnet und $n_m \in \mathbb{N}$ gilt, benutzen wir am besten den folgenden Ansatz, der uns garantiert eine eindeutige Lösung für das LGS zu finden:

$$f(x) = \frac{A_1}{L_1(x)} + \dots + \frac{A_m}{L_1^{n_1}(x)} + \dots + \frac{Z_1}{L_m(x)} + \dots + \frac{Z_m}{L_m^{n_m}(x)(x)}$$

Wir multiplizieren beidseitig mit $D(x)$ und erhalten das System durch Koeffizientenvergleich auf die Terme $x, x^2, \dots, x^{\max(n_1, n_2, \dots, n_m)}$.

1.3 $D(x)$ enthält nichtlineare Terme

Für Funktionen der Form:

$$f(x) = \frac{N(x)}{P_1^{n_1}(x)P_2^{n_2}(x)\dots P_m^{n_m}(x)}$$

wobei $P_m(x)$ einen nichtlinearen Polynom bezeichnet und $n_m \in \mathbb{N}$ gilt, benutzen wir am besten den folgenden Ansatz:

$$f(x) = \frac{\alpha_1(x)}{P_1(x)} + \dots + \frac{\alpha_m(x)}{P_1^{n_1}(x)} + \dots + \frac{\zeta_1(x)}{P_m(x)} + \dots + \frac{\zeta_m(x)}{P_m^{n_m}(x)}$$

Und für jeden Term beim Zähler benutzen wir einen unbekannten Polynom mit Grad kleiner um 1 als der vom Nenner, zum Beispiel:

$$\text{Grad}(P_1(x)) = 3 : \quad P_1(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad \text{dann} \quad \alpha_1(x) = A_1x^2 + A_2x + A_3.$$

Beispiele unter <https://www.purplemath.com/modules/partfrac.htm>

2 Volumenberechnung

Wir können mit einem heuristischen Ansatz, einen 3D-Körper mit Ebenen der Form $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : z = k$, mit Scharparameter k zuschneiden. Damit erhalten wir, sofern als der Körper physikalisch sinnvoll ist, eine auf $[z_0, z_1]$ stetige Funktion $F(z)$ die unsere Schnittfläche an jeder Höhe z darstellt. Wir multiplizieren die Fläche mit einer differentiellen Dicke dz und bilden unsere Riemannsche Summe. Das ergibt ein Integral zur vereinfachten Berechnung von einem Volumen. Mehr dazu in der Analysis II.

$$V = \int_{z_0}^{z_1} F(z) dz.$$

2.1 Rotationskörper

Für eine stetige Funktion $f(x), x \in [x_0, x_1]$, die um die x-Achse rotiert, ergeben sich Querschnittsflächen $F(x) = \pi f(x)^2$. Unser Volumen ergibt sich dann (und analog für die y-Achse) mit:

$$V_{rot} = \pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 dx.$$

3 Oberflächenberechnung von einem Rotationskörper

Gegeben sei eine offene, einfache parametrisierte Kurve $\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))^T$ im Bereich $[t_0, t_1]$. Wir wollen die Mantel-Oberfläche des Körpers berechnen, das entsteht, wenn wir die Orthogonale Fläche zwischen Kurve und x-Achse um die x-Achse selber rotieren. Mit den Beziehungen $\dot{x}(t) \approx dx, \dot{y}(t) \approx dy$ erhalten wir den Längenelement $ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$. Die gesuchte Oberfläche ist dann die Riemannsche Summe der Mantelflächen von Achsenparallelen Zylindern mit Radius $y(t)$ und Höhe ds .

$$V_{rot} = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Analog kann man eine Formel für die Rotation um die y-Achse finden.