

Theorie 10

1 Bogenlänge

1.1 Definition und Berechnung

Es ist intuitiv möglich, eine beliebige Kurve mit einem Polygon zu approximieren. Wir benutzen dieses Konzept um die Bogenlänge einer Kurve zu verstehen.

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Jede endliche Menge Z von Punkten $t_i \in I$ mit $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ definiert ein Sehnepolygon mit Ecken $\gamma(t_i)$. Die Länge ist

$$s(Z) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Eine Kurve heisst **rektifizierbar**, falls die Menge der Längen aller Sehnepolygone beschränkt ist. Dessen Wert, die effektive Länge der Kurve ist dann:

$$s(\gamma) := \sup(s(Z)).$$

Satz. Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Parameterintervall ist rektifizierbar. Ihre Länge lautet:

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} dt.$$

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion hat die Länge:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Diese erste Formel kann man sich vorstellen, indem man an den Zurückgelegten Weg ds beim Durchlaufen mit Geschwindigkeit $\|\dot{\gamma}\|$ im Zeitintervall dt denkt. Die Summe aller diesen Elementarwegen ergibt die Länge der Kurve. (Beweis: S.234).

1.2 Umparametrisieren auf der Bogenlänge

Eine Umparametrisierung die eine Geschwindigkeit 1 ergibt, vereinfacht die Untersuchung einer Kurve in den meisten Fällen. Wir betrachten:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

und nehmen die Umparametrisierung $\beta'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ $s = s(t)$. Man erhält dann eine Kurve mit Geschwindigkeit $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.

Beispiel. Wir parametrisieren den Kreis $r(t) = (R\cos(t), R\sin(t))^T$ auf die Bogenlänge um.

$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)} = R$$

Dies ergibt mit $t_0 = 0$ ein $s(t) = Rt$. Wir ersetzen die Variable t mit $\frac{s}{R}$ und erhalten eine Parametrisierung $r(t) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R))^T$ deren Geschwindigkeit ebenfalls 1 ist.

2 Flächenberechnung

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Kurve $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wir wählen eine Einteilung von Punkten $t_k \in [a, b]$ mit $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ mit infinitesimalen Feinheit σ . Zwei Ortsvektoren $r(t_k), r(t_{k-1})$ spannen ein Parallelogramm mit Fläche $\det(M)$ auf, wobei M die Matrix mit Spalten $r(t_k), r(t_{k-1})$ ist. Die Hälfte dieser Fläche entspricht (bei Grenzübergang der Feinheit dieser Aufteilung, wie oben für die Bogenlänge erläutert) ebenfalls die von diesen beiden Vektoren gespannte Fläche A_k .

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} \det(M) = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} x(t_{k-1}) & x(t_k) \\ y(t_{k-1}) & y(t_k) \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} x(t_{k-1}) & x(t_k) - x(t_{k-1}) \\ y(t_{k-1}) & y(t_k) - y(t_{k-1}) \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} [(x(t_{k-1})(y(t_k) - y(t_{k-1}))) - (y(t_{k-1})(x(t_k) - x(t_{k-1})))] \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren α_k, β_k dafür gilt:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\alpha_k)(t_k - t_{k-1}) \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = \dot{y}(\beta_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Wir berechnen schlussendlich:

$$A_k = \frac{1}{2} [x(t_{k-1})\dot{x}(\alpha_k) - y(t_{k-1})\dot{y}(\beta_k)] (t_k - t_{k-1}).$$

Die **Sektorfläche** ist dann der Limes auf die Feinheit σ :

$$A_s = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A_k$$

Der Limes entspricht die Riemannsche Summe der Funktion $\frac{1}{2} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]$:

$$A_s = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)] dt.$$

Für Parametrisierungen in Polarkoordinaten $\rho = \rho(\phi)$ kann man den Vektor $(x(t), y(t))^T$ durch Projektionen schreiben als $(\rho(\phi)\cos(\phi), \rho(\phi)\sin(\phi))^T$ und erhält durch nachrechnen die Formel:

$$A_{\rho(\phi)} = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (\rho(\phi))^2 d\phi.$$

2.1 Flächeninhalt von geschlossenen Kurven

Wegen $(xy)' = \dot{x}y + x\dot{y}$ kann man auch schreiben:

$$A_s = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)] dt = \frac{1}{2} x(t)y(t) \Big|_a^b - \int_a^b \dot{x}(t)y(t) dt = -\frac{1}{2} x(t)y(t) \Big|_a^b + \int_a^b x(t)\dot{y}(t) dt$$

Wenn die Kurve geschlossen ist ($r(a) = r(b)$) verschwinden die Terme ohne Integralzeichen:

$$A_s = \int_a^b \dot{x}(t)y(t) dt = - \int_a^b x(t)\dot{y}(t) dt$$