

Theorie 1

1 Vollständige Induktion

Die Vollständige Induktion ist eine zur Anordnung der Natürlichen Zahlen \mathbb{N} gehörende Beweisstrategie. Sie kann als die Erweiterung auf allen n einer bestimmten Aussage, die am Anfang bezüglich einer einzelnen Zahl n formuliert wird.

Beweisprinzip: (I) und (II) müssen beide erfüllt sein.

(I). Die Aussage $A(n)$ sei für den Anfangsterm $A(1)$ richtig;

(II). Es wird gezeigt, dass für jede n , die Aussage $A(n+1)$ erfüllt ist.

Beispiel. Für jede natürliche Zahl $x \neq 1$ gilt die Summenformel: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

(I). Für $n = 1$ kann man leicht sehen, dass die Formel stimmt.

(II). Für $n + 1$ kann man sehen, dass: $1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$.

Und dies ergibt die Erweiterung für alle n von unserem Anfangsterm, *q.e.d.*

2 Reelle Zahlen

2.1 Körperstruktur und Anordnung von \mathbb{R}

Zuerst wollen wir das "Verhältnis" der Reellen Zahlen erklären. Wir definieren nun die Körperstruktur¹ von \mathbb{R} .

(K1). Addition und Multiplikation sind *kommutativ*:

$$a + b = b + a, \quad a * b = b * a.$$

(K2). Addition und Multiplikation sind *assoziativ*:

$$c + (a + b) = (c + a) + b, \quad c * (a * b) = b * (a * c).$$

(K3). Folgende Gleichungen sind *lösbar*:

$$a + x = b, \quad a * x = b \text{ für } a \neq 0.$$

(K4). Es gilt das *Distributivgesetz*:

$$a * (b + c) = a * b + b * c.$$

Jetzt drei Axiome² zur Anordnung von \mathbb{R} .

(A1). Jede reelle Zahl kann entweder positiv ($a > 0$), Null ($a = 0$) oder negativ ($-a > 0$) sein.

(A2). Aus $a > 0 \wedge b > 0$, folgt $a + b > 0 \wedge a * b > 0$.

¹Im mathematischen Teilgebiet der Algebra, bezeichnet der Begriff "Körper" eine Struktur bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf eine bestimmte Weise definiert sind.

²Grundlegende Begriffe die als wahr genommen werden, ohne Beweis.

(A3). $\forall a, \exists n$, dafür $n - a > 0$.

Satz. *Bernoullische Ungleichung*³, mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis. (Durch vollständige Induktion)

Der Fall $n = 1$ ist trivial. Für $n+1$ hat man...

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad q.e.d.$$

2.2 Intervalle

Wir bezeichnen jetzt die verschiedenen Typen von Intervallen in \mathbb{R} .

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen;

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offen;

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ nach rechts offen;

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ nach links offen.

a und b heissen *Randpunkte*. Ein abgeschlossenes Intervall wird auch *kompakt* genannt. Bei ∞ Rändern werden als Konvention $()$ benutzt.

2.3 Schranken, Infimum und Supremum

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben bzw. nach unten *beschränkt*, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall x \in M$:
 $x \leq s$ bzw. $x \geq s$ gilt; s heisst dann obere bzw. untere *Schranke* der Menge.

Die kleinste obere Schranke heisst *Supremum* ($s = \sup(M)$), die grösste untere Schranke heisst *Infimum* ($s = \inf(M)$) der Menge M . Es existiert nur eine Zahl die als Supremum bzw. Infimum einer bestimmten Menge bezeichnet werden kann.

Die Beweise zu den folgenden Sätzen sind auf S.14 und folgenden vom *Königsberger*⁴ zu finden.

Satz. *Jede nach oben (unten) beschränkte, nicht leere Menge $M \in \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).*

Satz. *Zu je zwei reellen Zahlen (x, y) mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl q mit $x < q < y$. (Man sagt: \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} .)*

3 Folgen

Wir betrachten jetzt ein grundlegendes Thema der Analysis. Eine Folge kann man sich als eine geordnete Auflistung von diskreten Werten vorstellen.

³Als Folgerung von (A1) und (A2).

⁴Konrad Königsberger, Analysis 1, Springer-Verlag, 1990

3.1 Definitionen

Definition. Folge: Als Folge bezeichnet man eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; diese kann z.B. als $(a_n)_n$ oder explizit durch die Terme $a_n = f(n)$ geschrieben werden. Eine Folge kann auch rekursiv durch eine Beziehung zwischen, z.B. a_n und a_{n+1} definiert werden:

$$a_{n+1} = a_n + 5n$$

Definition. Konvergenz, Grenzwert: Eine Folge heisst konvergent, wenn es eine Zahl a gibt, die die folgende Eigenschaft zuweist: zu jedem (beliebig kleinem) Zahl $\epsilon > 0$ gibt es einen $N \in \mathbb{R}$, dafür gilt die Beziehung

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N.$$

Diese Zahl a heisst Grenzwert der Folge und man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Falls $a = 0$ spricht man von einer Nullfolge.

Definition. Beschränktheit: Eine Folge heisst beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, so dass:

$$|a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition. Asymptotische Gleichheit: Zwei Folgen sind asymptotisch gleich, wenn $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$. Solche Folgen sind zugleich konvergent oder divergent ($a_n \simeq b_n$ für $n \rightarrow \infty$).

Satz. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Seien a der Grenzwert und N ein Index der gegebenen Folge $(a_n)_n$. Sei noch $|a_n - a| < 1$ für $n > N$. Dann gilt $|a_n| \leq s$ indem s per Definition den Wert $\max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}$ nimmt, $\forall n$.

Wir beschreiben jetzt kurz zwei bekannte Folgen (und zugeordneten Reihen⁵).

(FI). Arithmetische Folge

Die a.F. wird als eine Progression definiert:

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ (rekursiv)} \quad a_n = a_1 + d(n-1) \text{ (explizit)}$$

Die dazugehörige arithmetische Reihe sieht folgendermassen aus:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_1 + (k-1)d = na_1 + \frac{dn(n-1)}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Eine Anwendung sieht man bei der Aufgabe 2.b, Schnellübung 1.

(FII). Geometrische Folge

Die g.F. lautet:

$$a_n = a_1 * q^{n-1}$$

⁵Eine Reihe ist auch eine Folge. Sie wird explizit durch eine Summe mit dem Operator Σ definiert

Und die dazugehörige geometrische Reihe:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_1 q^k d = \frac{a_1}{1-q}$$

Eine Anwendung sieht man bei der Aufgabe 4, Schnellübung 1.

3.2 Rechenregeln

Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergenten Folgen, so dass $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ gilt, dann...

(R1). $a_n + b_n \rightarrow a + b$;

(R2). $a_n b_n \rightarrow ab$;

(R3). sei $b \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Satz. Sei $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, mit $a_n \leq b_n$ für fast alle⁶ n , dann ist $a \leq b$.

Beweis: siehe S.43.

3.3 Sandwichsatz

Der folgende Satz ist sehr hilfreich für die Berechnung (oder die Herleitung) von wichtigen Grenzwerten.

Satz. Sei $a_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow b$, mit $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dann konvergiert die Folge b_n nach b .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$; weil a_n und c_n gegen b konvergieren, gibt es zwei Werte n_1 und n_2 mit $|a_n - b| < \epsilon \quad \forall n > n_1$ und $|c_n - b| < \epsilon \quad \forall n > n_2$. Sei $N := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt $\forall n > N$: $b - \epsilon < a_n < b_n < c_n < b + \epsilon$. Daraus folgt $|b_n - b| < \epsilon$, die ist die Definition von Grenzwert einer Folge.

3.4 Monotone Folgen

Definition. Eine Folge heisst monoton fallend (bzw. wachsend), wenn $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$ bzw. $a_{n+1} \geq a_n$ gilt. Stricht-monoton, wenn die Beziehungen $a_{n+1} < a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$ gelten.

Satz. Jede beschränkte, monotone Folge konvergiert; eine wachsende gegen $\sup(A)$ und eine fallende gegen $\inf(A)$, wobei A die Wertemenge der Folge bezeichnet.

Beweis. Sei $s = \sup(A)$ die kleinste obere Schranke, dann gibt es $\forall \epsilon > 0$ ein a_N mit $s - \epsilon < a_N$ und es folgt: $s - \epsilon < a_N \leq a_n \leq s$ für $n > N$. Mit $(-a_n)$ wird den Fall $s = \inf(A)$ bewiesen.

3.5 Der Satz von Weierstrass-Bolzano*

Wir betrachten jetzt einen der bekanntesten Sätzen über Folgen.

Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen, dann gibt es eine konvergente Teilfolge⁷ $(x_{n_k})_{n_k}$. Dieser Satz hat einen Analogon über das Thema der Maxima und Minima von Funktionen.

⁶Gültig für alle $n \geq N$.

⁷Durch das Rausziehen von manchen Termen einer Folge, neu entstehende Folge.

Beweis. Nach der Hypothese wissen wir, dass es zwei Werte (a_0, b_0) gibt, so dass $a_0 \leq x_n \leq b_0$. Wir bezeichnen jetzt c_0 als der Mittelpunkt vom Intervall $[a_0, b_0]$: $c_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}$ und können sicherstellen, dass entweder $[a_0, c_0]$ oder $[c_0, b_0]$ unendlich viele Glieder der Folge $(x_n)_n$ enthält (wir rechnen mit dem ersten weiter). Die Länge wird $\frac{b_0 - a_0}{2}$. Wir setzen jetzt $a_1 = a_0$ und $b_1 = c_0$. Jetzt wiederholen wir das Verfahren: $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ und definieren wir zwei Intervalle der Länge $\frac{b_0 - a_0}{2^2}$. Im allgemeinen erhalten wir für jeden Schritt, Intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ mit Mittelpunkt c_k . Wir setzen wieder $a_{k+1} = a_k$ und $b_{k+1} = c_k$. Die Länge der Intervalle I_{k+1} ist dann $\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$. Somit haben wir zwei Folgen erhalten, $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ mit der Eigenschaft:

$$a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k$$

Diese sind **monoton** und **beschränkt** und damit konvergieren sie ($a_k \rightarrow a, b_k \rightarrow b$). Jetzt berechnen wir die Grenzwerte:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k - a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Daraus folgt, dass $b - a = 0$ und $b = a$. Die Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ konvergieren deshalb zum gleichen Grenzwert, den wir a nennen (wir sind fast fertig!!).

Vom Intervall $[a_0, b_0]$ wählen wir jetzt den Wert x_{n_0} aus der ursprünglichen Folge, sowie x_{n_1} aus $[a_1, b_1]$ usw. Für x_{n_k} gilt dann die Beziehung:

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k$$

Mithilfe des **Sandwichsatzes** gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Und die Teilfolge ist konvergent q.e.d.