

# 1 Das Levi-Civita-Symbol

Das *Levi-Civita-Symbol* (total antisymmetrischer Tensor) ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k \text{ zyklische Permutation} \\ -1, & i, j, k \text{ antizyklische Permutation} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.1)$$

Im speziellen bedeutet dies für  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\text{zyklisch: } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \quad (1.2)$$

$$\text{antizyklisch: } (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \quad (1.3)$$

$$\text{sonst: } (i, j, k) = (1, 1, 3), (1, 2, 1), \dots \quad (1.4)$$

Also für  $\epsilon_{ijk}$ :

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1 \quad (1.5)$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \quad (1.6)$$

$$\epsilon_{113} = \epsilon_{333} = \dots = 0 \quad (1.7)$$

Die selben Indizes wie oben erhält man auch durch Vertauschen benachbarter Zahlenpaare:

(i,j,k)	(1,2,3)	(1,3,2)	(3,1,2)	(3,2,1)	(2,3,1)	(2,1,3)
# Permutationen	0	1	2	3	4	5

Wie man sieht, ist eine zyklische Permutation gleichbedeutend mit einer gerade Anzahl Permutationen benachbarter Zahlenpaare (vgl. oben). Analog entspricht eine antizyklische Permutation einer ungeraden Anzahl Vertauschungen.

Aus dieser Erkenntnis folgt die wichtige, namensgebende Eigenschaft des Levi-Civita-Symbols

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (1.8)$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad (1.9)$$

$$\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kji} \quad (1.10)$$

$$\text{usw.} \quad (1.11)$$

Das heisst, dass sich das Vorzeichen von  $\epsilon_{ijk}$  ändert, wenn zwei benachbarte Indizes in  $(i, j, k)$  vertauscht werden (antisymmetrisch).

# 2 Summendarstellung von Vektoren

Ein Vektor in kartesischen Koordinaten kann geschrieben werden als

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_1 \hat{e}_x + A_2 \hat{e}_y + A_3 \hat{e}_z = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (2.1)$$

hier sind  $\hat{e}_i \in \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem. Für diese gilt

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

wobei  $\delta_{ij}$  *Kronecker-Delta-Symbol* genannt wird. Diese Relation bedeutet nichts anderes, als dass die Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$  orthogonal sind (also  $\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = 1$ ,  $\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0$ , etc.) und wird später noch hilfreich sein.

### 3 Summen

Was passiert, wenn entweder ein  $\delta_{ij}$  oder  $\epsilon_{ijk}$  in einer Summe auftaucht? Betrachte dazu die folgenden Beispiele:

#### Kronecker-Delta

$$\sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i \sum_j B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i (B_1 \delta_{i1} + B_2 \delta_{i2} + B_3 \delta_{i3}) \quad (3.1)$$

$$= A_1 (B_1 \delta_{11} + B_2 \delta_{12} + B_3 \delta_{13}) \quad (3.2)$$

$$+ A_2 (B_1 \delta_{21} + B_2 \delta_{22} + B_3 \delta_{23}) \quad (3.3)$$

$$+ A_3 (B_1 \delta_{31} + B_2 \delta_{32} + B_3 \delta_{33}) \quad (3.4)$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (3.5)$$

$$= \sum_i A_i B_i \quad (3.6)$$

Wird über  $\delta_{ij}$  summiert, bleiben also nur solche Terme übrig, bei denen  $i = j$  gilt. Deshalb vereinfacht sich eine Doppelsumme über  $\delta_{ij}$  immer zu einer einfachen Summe über  $i$  (oder  $j$ ), wobei nur solche  $j$ -Terme überleben, für die gilt  $i = j$ . Im obigen Beispiel also

$$\sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_{j=i} = \sum_i A_i B_i \quad (3.7)$$

**Vektorkomponenten** Das oben gelernte kann nun auch dazu verwendet werden, eine einzelne Komponente eines Vektors zu erhalten.

$$[\vec{A}]_j = \left[ \sum_i A_i \hat{e}_i \right]_j = \left( \sum_i A_i \hat{e}_i \right) \cdot \hat{e}_j = \sum_i A_i \delta_{ij} = A_j \quad (3.8)$$

**Levi-Civita** Kommen jetzt gleichzeitig  $\delta_{ij}$  und  $\epsilon_{ijk}$  in einer Summe vor, kann folgendes passieren:

$$\sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \delta_{ij} = \sum_i \epsilon_{i,j=i,k} = \sum_i \epsilon_{iik} = \epsilon_{11k} + \epsilon_{22k} + \epsilon_{33k} = 0 \quad (3.9)$$

Die letzte Gleichung gilt, da hier der dritte Fall der Definition von  $\epsilon_{ijk}$  eintritt (zwei gleiche Indizes).

### 4 Vektoren (Zusammenfassung)

Wie oben schon gezeigt, kann ein Vektor als Summe über die Einheitsvektoren geschrieben werden. Zusammengefasst gelten die folgenden Relationen

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (4.1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left( \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (4.2)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k \quad (4.3)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{l=1}^3 A_l \left( \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_i B_j C_k \right) \cdot \hat{e}_l = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (4.4)$$

## 5 Anwendung

1a) Wie oben gesehen, können die einzelnen Komponenten eines Vektors durch Multiplikation mit dem entsprechenden Basisvektor ausgedrückt werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \left[ \vec{\nabla} \right]_j \left[ \vec{\nabla} f \right]_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \left[ \left( \sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \hat{e}_m \right) \cdot \hat{e}_j \right] \left[ \left( \sum_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \hat{e}_n \right) \cdot \hat{e}_k \right] \quad (5.1)$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (5.2)$$

Nun folgt einer der wichtigsten Tricks im Zusammenhang mit  $\epsilon_{ijk}$ : Das Ausnützen der Antisymmetrie. Generell gilt, dass die Summe über die Produkte eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Terms immer null ergibt (alle Terme löschen sich gegenseitig aus).

In unserem Fall wird das wie folgt gezeigt: Als erstes benennen wir zwei Indizes um, z.B.  $j \rightarrow \alpha$ ,  $k \rightarrow \beta$

$$\sum_{i,j,k} \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{antisym.}} \hat{e}_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}}_{\text{symm.}} = \sum_{i,\alpha,\beta} \epsilon_{i\alpha\beta} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \quad (5.3)$$

Nun benutzen wir die Antisymmetrie von  $\epsilon_{ijk}$  (im ersten Schritt) sowie die Symmetrie der partiellen Ableitung (zweiter Schritt). Im letzten Schritt kann schliesslich noch benutzt werden, dass die Reihenfolge der Indizes im Summenzeichen keine Rolle spielt ( $\sum_{i,j} = \sum_{j,i}$ )

$$\sum_{i,\alpha,\beta} \epsilon_{i\alpha\beta} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} = \sum_{i,\alpha,\beta} -\epsilon_{i\beta\alpha} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \quad (5.4)$$

$$= - \sum_{i,\alpha,\beta} \epsilon_{i\beta\alpha} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (5.5)$$

$$= - \sum_{i,\beta,\alpha} \epsilon_{i\beta\alpha} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (5.6)$$

Da wir die Indizes beliebig umbenennen dürfen (solange alles konsistent geschieht), können wir nun die folgende Wahl treffen:  $\beta \rightarrow j$ ,  $\alpha \rightarrow k$  und erhalten deshalb

$$- \sum_{i,\beta,\alpha} \epsilon_{i\beta\alpha} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = - \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (5.7)$$

Diese Wahl ist praktisch, da wir nun das gefundene Resultat mit dem Ausdruck vergleichen können, mit dem wir begonnen haben

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = - \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (5.8)$$

Die letzte Gleichung gilt, da, für jede Zahl  $x$ , für die gilt  $x = -x$ , automatisch folgt  $x = 0$  ( $1 \neq -1$ ,  $2 \neq -2$ , usw.).

1e) Der ganze Beweis einer Aussage wie  $\text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = 0$ , kann so sehr elegant geschrieben werden:

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{il}} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \quad (5.9)$$

$$\stackrel{\text{umbennennen } i \leftrightarrow j}{=} \sum_{j,i,k} \epsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} A_k \quad (5.10)$$

$$\stackrel{\text{symm. \& antisymm.}}{=} \sum_{i,j,k} -\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \quad (5.11)$$

$$= 0 \quad (5.12)$$

## 6 Zusammenfassung

### Symbole

$$\text{Kronecker-Delta: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{Levi-Civita: } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k \text{ zyklische Permutation} \\ -1, & i, j, k \text{ antizyklische Permutation} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2)$$

### Vektoren

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (6.3)$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (6.4)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (6.5)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{i,j,k} \hat{e}_i A_j B_k \quad (6.6)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (6.7)$$

### Summen

$$\sum_i \delta_{ij} = \delta_{jj} \quad (6.8)$$

$$\sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i \quad (6.9)$$

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (6.10)$$