

## W.1 Schräge Beispiele

$$\begin{array}{l}
 S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \rightarrow 0 \\
 S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \rightarrow 1
 \end{array}$$

$$2S_1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \Rightarrow \underline{\underline{S_1 = 1/2}}$$

$$\begin{array}{l}
 S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\
 S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots
 \end{array}$$

$$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S_1 = 1/2 \Rightarrow \underline{\underline{S_2 = 1/4}}$$

$$\begin{array}{l}
 S_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\
 -4S_3 = -4 - 8 - 12 - \dots
 \end{array}$$

$$-3S_3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = S_2 = 1/4 \Rightarrow \underline{\underline{S_3 = -1/12}}$$

$$\begin{array}{l}
 S_4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\
 -2S_4 = -2 - 2 - 2 - \dots
 \end{array}$$

$$-S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S_1 = 1/2 \Rightarrow \underline{\underline{S_4 = -1/2}}$$

So absurd ist das alles gar nicht, wenn man es richtig macht!

(Wikipedia, Englisch: Divergent Series)

# W.2 Binomialkoeffizienten und das Pascaldreieck

Bekannt:

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1 \\(1+x)^1 &= 1+x \\(1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4\end{aligned}$$

Koeffizient von  $x^m$  in  $(1+x)^n$ :  $\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$

Pascaldreieck:

$n=-2$	0	0	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	...	$= 1/4 = S_2$
$n=-1$	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	$= 1/2 = S_1$
$n=0$	...	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$= 1 = 2^0$
$n=1$	...	0	1	1	0	...							$= 2 = 2^1$
$n=2$	...	0	1	2	1	0	...						$= 4 = 2^2$
$n=3$		0	1	3	3	1							$= 8 = 2^3$
$n=4$		0	1	4	6	4	1						$= 16 = 2^4$
$n=5$		0	1	5	10	10	5	1					$= 32 = 2^5$

$m=0$   $m=1$   $m=2$

$(1+1)^n$

Was passiert bei  $n=-1$ ?

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} = 2^n$$

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - 1x + 1x^2 - 1x^3 + 1x^4 - 1x^5 + \dots$$

$\binom{-1}{0} \binom{-1}{1} \binom{-1}{2} \binom{-1}{3} \binom{-1}{4} \binom{-1}{5}$

$$n=-2: \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots$$

$m=0$   $m=1$   $m=2$

Tatsächlich:  $\binom{-1}{m} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-m)}{m!} = (-1)^m$

$$\binom{-2}{m} = \frac{(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot \dots \cdot (-m-1)}{m!} = (-1)^m \cdot (m+1)$$

$\Rightarrow$  Dreiecksregel, Binomialkoeffizienten & Reihenentwicklung stimmen überein.

Youtube: Veritasium Pi

## W.3 Abelsummierung

Sei  $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe um  $x_0=0$  und  $s=1$ .

Satz von Abel: Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  existiert, gilt  $\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Idee: Nutze  $\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x)$ , auch wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nicht existiert.

Def: Die **Abelsumme** einer Folge  $(a_k)_k$  ist der Linksgrenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Bsp:  $\cdot a_k = (-1)^k, k \geq 0 \rightsquigarrow S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \underline{\underline{\frac{1}{2} = S_1}}$$

$\Rightarrow 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  hat die Abelsumme  $1/2$ .

$\cdot a_k = (-1)^k (k+1) \rightsquigarrow S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{(k+1)}_{(x^{k+1})'} x^k = - \sum_{k=0}^{\infty} ((-x)^{k+1})' = - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^{k+1} \right)'$$

$$= + \left( \frac{-x}{1+x} \right)' = \frac{1+x - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \underline{\underline{\frac{1}{4} = S_2}}$$

$\Rightarrow$  Die Abelsumme von  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$  ist  $\underline{\underline{1/4}}$ .

$\cdot a_k = 1, k \geq 0 \rightsquigarrow S_4 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \infty, \text{ keine Abelsumme}$$

$\cdot a_k = k+1, k \geq 0 \rightsquigarrow S_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ , ebenfalls keine Abelsumme. Problem: Nur "+", Summe wächst schnell.

## W.4 Der Umordnungssatz

(Riemann)

Satz: Wenn  $(a_k)$  eine Folge ist, so dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert

und  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rightarrow \infty$  divergiert, dann lässt sich durch

Umordnen der Folgenglieder jeder beliebige Grenzwert erzielen.

Bsp:  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \geq 0$

Beweisidee: Sei  $M$  der Zielgrenzwert. Sortiere die positiven und negativen  $a_k$  im Betrag absteigend. Summiere so lange positive Folgenglieder, bis die Partialsumme  $> M$  ist. Summiere so lange negative Folgenglieder, bis die Partialsumme  $< M$  ist, usw. Dies konvergiert, da die beiden im Betrag absteigend sortiert sind.

## WS Zeta-Regularisierung

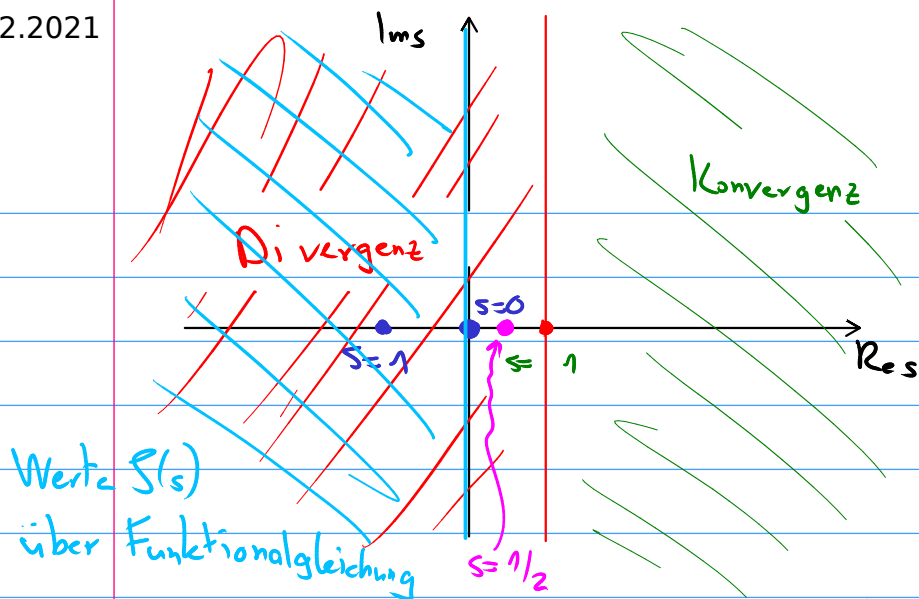
Def: Die Riemann-Zeta-Funktion ist  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$   
 $= 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \dots$

$$\left( \begin{array}{l} s = -1 \Rightarrow \zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = S_3 \\ s = 0 \Rightarrow \zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = S_4 \end{array} \right)$$

• konvergent für  $s > 1$ . Oder wenn  $s \in \mathbb{C}$ : Für  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

•  $s = 1$ : Pol:  $\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \rightarrow \infty$ , harmonische Reihe

$\zeta(s)$  verhält sich um  $s=1$  wie  $\frac{1}{s-1}$ , d.h.  $\frac{\zeta(s)}{1/(s-1)} \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1$



Riemann 1859:  $\zeta(s) = 2^{-s} \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s)$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t},$$

konvergent für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,

Pole bei  $s=0, -1, -2, -3, \dots$

$\Gamma(n+1) = n!$ , verallgemeinert Fakultät

Für  $\operatorname{Re} s \leq 0$  lassen sich damit Werte  $\zeta(s)$  berechnen

- $s = -1$ :  $\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(2) \cdot \zeta(2)$   
 $= \frac{1}{2\pi^2} \cdot (-1) \cdot 1! \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12} = \zeta_3$   
↓ Basel Problem

In diesem Sinne ist  $-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \hat{=} 1+2+3+4+5+\dots$

- $s = 0$  als Linksgrenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^-} \zeta(s) &= \lim_{s \rightarrow 0^-} 2^{-s} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{s \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) = \frac{1}{\pi} \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{2} \sin(s) \cdot \frac{1}{(1-s)-1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\sin(s)}{-s} = -\frac{1}{2} = \zeta_4 \end{aligned}$$

In diesem Sinne ist  $-\frac{1}{2} = \zeta(0) \hat{=} 1+1+1+1+1+\dots$