

Frage 1: Vereinfachen Sie $\overbrace{(5+3i)}^{=z_1} \underbrace{(4-8i)}_{=z_2} = z_2$

$$= 5 \cdot 4 + 3i \cdot 4 - 8i \cdot 5 - 8i \cdot 3i = 20 + 12i - 40i - 24i^2$$

$$= 20 - 28i - (-24) = \underline{\underline{44 - 28i}}$$

Frage 2: Vereinfachen Sie $\overbrace{(5-3i)}^{=\bar{z}_1} \underbrace{(4+8i)}_{=\bar{z}_2} = \bar{z}_2$

Regel: $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$

$$\Rightarrow (5-3i)(4+8i) = \overline{(5+3i)} \cdot \overline{(4-8i)} = (\quad)(\quad)$$

$$= \overline{44 - 28i} = \underline{\underline{44 + 28i}}$$

Frage 3: Vereinfachen Sie $(1+3i)^4$

$$= ((1+3i)^2)^2 = (1 + 2 \cdot 3i + (3i)^2)^2 = (1 - 9 + 6i)^2$$

$$= (-8 + 6i)^2 = 64 - 2 \cdot 8 \cdot 6i - 36 = 28 - 96i$$

Frage 4: Vereinfachen Sie $(1-3i)^4$

Allgemeinere Regel: $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow (1-3i)^4 = (\overline{1+3i})^4 \stackrel{\downarrow}{=} \overline{(1+3i)^4} = 28 + 96i$$

Frage 5: Ist $\operatorname{Re}(\underbrace{(3+i)^4}_{=z} \cdot \underbrace{(5-7i)}_{=\bar{z}}) = \operatorname{Re}(\underbrace{(3+i)^4}_{=z} \underbrace{(5-7i)}_{=\bar{z}})$? ✓

Gilt $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$? Ja, jedes $z \in \mathbb{C}$!

Denn: Schreibe $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = a = \operatorname{Re}(\bar{z}) \checkmark$$

Außerdem: $\operatorname{Im}(z) = b = -(-b) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$, d.h. $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$

Frage 6: Wenn $(3+4i)^{10} = A+iB$, was ist $i \cdot (3-4i)^{10}$?

$$\Rightarrow (3-4i)^{10} = A-iB$$

$$\Rightarrow i \cdot (3-4i)^{10} = i \cdot (A-iB) = i \cdot A - i^2 B = B + i \cdot A$$

$$(A = -9'653'283, B = 1'476'984.)$$

Frage 7: Wenn $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann ist $z \cdot \bar{z} = \dots$

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Frage 8: $\operatorname{Re}(z) = \dots$

$$\frac{z+\bar{z}}{2}, \text{ denn } \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z)$$

Frage 9:

	$\frac{1}{z}$	$\operatorname{Re}(\frac{1}{z})$	$\operatorname{Im}(\frac{1}{z})$	$\operatorname{Re}(\frac{1}{\bar{z}})$	$ \frac{1}{z} $	$ z $	$ \bar{z} $	$\frac{z}{ z ^2}$
$1+3i$	$\frac{1}{10} - i\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	$\frac{1-3i}{10}$
$2+5i$	$\frac{2}{29} - i\frac{5}{29}$	$\frac{2}{29}$	$-\frac{5}{29}$	$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{\sqrt{29}}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{29}$	$\frac{2-5i}{29}$
$-3-4i$	$-\frac{3}{25} + i\frac{4}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{1}{\sqrt{25}}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{25}$	$\frac{-3+4i}{25}$

Welche Beziehungen zwischen diesen Grössen gelten immer?

$$\cdot \frac{1}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \right|?$$

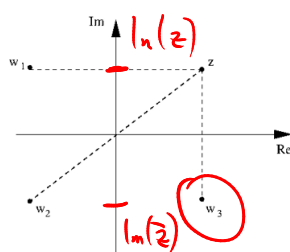
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

Frage 10: Wahr oder falsch: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\text{Ja, denn } \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Frage 11: wo liegt \bar{z} ?



Frage 12:

13.10.2021 08:15 - 10:00

V - Analysis I

LAUFZEIT

00:03:55

ANZAHL STIMMEN

0316

<<< >>>

Start

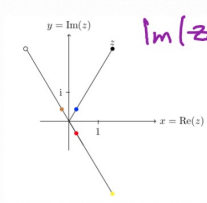
Zurücksetzen

RESULTATE ANZEIGEN

LIVE

Wahlbild (New)

Welche Farbe gehört zu $1/z$ für $z \neq 0$?



$\operatorname{Im}(z) > 0$
 $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) < 0$
da $\operatorname{Im}(\bar{z}) < 0$ und $|z|^2 \in \mathbb{R}$.

Weiss

Braun

Blau

Rot

Runde 1

2% | 6 Anzahl Stimmen

Runde 2

1% | 3 Anzahl Stimmen

Runde 1

3% | 8 Anzahl Stimmen

Runde 2

2% | 5 Anzahl Stimmen

Runde 1

36% | 90 Anzahl Stimmen

Runde 2

31% | 99 Anzahl Stimmen

Runde 1

54% | 133 Anzahl Stimmen

Runde 2

64% | 202 Anzahl Stimmen

Runde 1

4% | 11 Anzahl Stimmen

Frage 13:

13.10.2021 08:15 - 10:00

V - Analysis I

LAUFZEIT

00:03:20

ANZAHL STIMMEN

0272

<<< >>>

Start

Zurücksetzen

RESULTATE ANZEIGEN

LIVE

Wahlbild (New)

Für ein gegebenes, komplexes z_0 sei M die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = 16\}$. Dann beschreibt M einen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt z_0 .

Diese Aussage ist korrekt

Diese Aussage ist falsch

Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = R^2$

Hier: $|z - z_0| = 16 \Rightarrow z$ und z_0 haben Abstand 16
 $\Rightarrow M$ ist ein Kreis mit Radius 16 um z_0

Runde 1

39% | 86 Anzahl Stimmen

Runde 2

27% | 73 Anzahl Stimmen

Runde 1

61% | 134 Anzahl Stimmen

Runde 2

73% | 199 Anzahl Stimmen

Frage 14:

13.10.2021 08:15 - 10:00

V - Analysis I

LAUFZEIT

00:03:17

ANZAHL STIMMEN

0314

<<< >>>

Start

Zurücksetzen

RESULTATE ANZEIGEN

LIVE

Wahlbild (New)

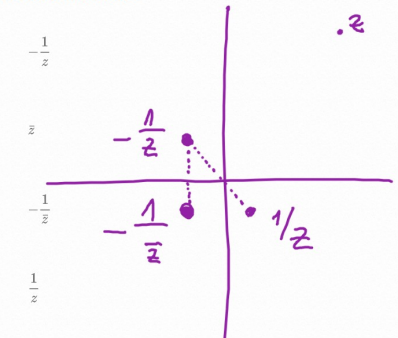
Sei z eine komplexe Zahl in der oberen Halbebene. Welche der folgenden Zahlen sind dann ebenfalls in der oberen Halbebene?

$-\frac{1}{z}$

z

$-\frac{1}{\bar{z}}$

$\frac{1}{z}$



Runde 1

79% | 211 Anzahl Stimmen

Runde 2

86% | 270 Anzahl Stimmen

Runde 1

4% | 10 Anzahl Stimmen

Runde 2

2% | 5 Anzahl Stimmen

Runde 1

26% | 69 Anzahl Stimmen

Runde 2

21% | 66 Anzahl Stimmen

Runde 1

15% | 39 Anzahl Stimmen

Runde 2

10% | 31 Anzahl Stimmen

Runde 1

4% | 10 Anzahl Stimmen

Frage 15:

13.10.2021 08:15 - 10:00

V - Analysis I

LAUFZEIT

00:02:48

ANZAHL STIMMEN

0218

<<< >>>

Start

Zurücksetzen

RESULTATE ANZEIGEN

LIVE

Wahlbild (New)

Was ist die geometrische Bedeutung der komplexen Abbildung $f: z \mapsto -iz$?

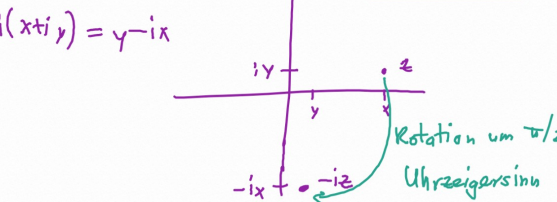
Spiegelung an der x -Achse

Spiegelung an der y -Achse

Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn

Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn

$-i(x+iy) = y-ix$



Runde 1

15% | 20 Anzahl Stimmen

Runde 2

7% | 16 Anzahl Stimmen

Runde 1

17% | 23 Anzahl Stimmen

Runde 2

10% | 22 Anzahl Stimmen

Runde 1

22% | 30 Anzahl Stimmen

Runde 2

11% | 25 Anzahl Stimmen

Runde 1

46% | 61 Anzahl Stimmen

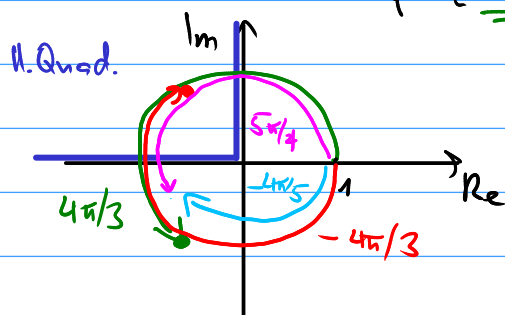
Runde 2

71% | 155 Anzahl Stimmen

A.3

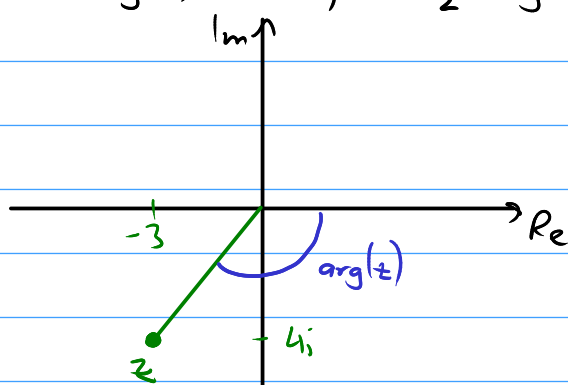
Frage 1: Sei z eine komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel φ .

Für welche $\varphi \in \{ \underline{4\pi/3}, \underline{-4\pi/3}, \underline{5\pi/4}, \underline{-4\pi/5} \}$ liegt z im 11. Quadranten?



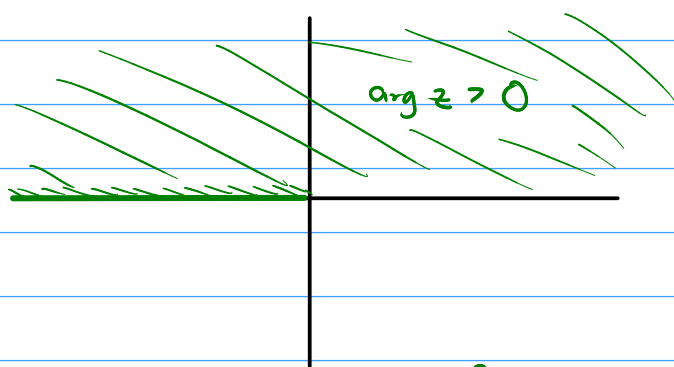
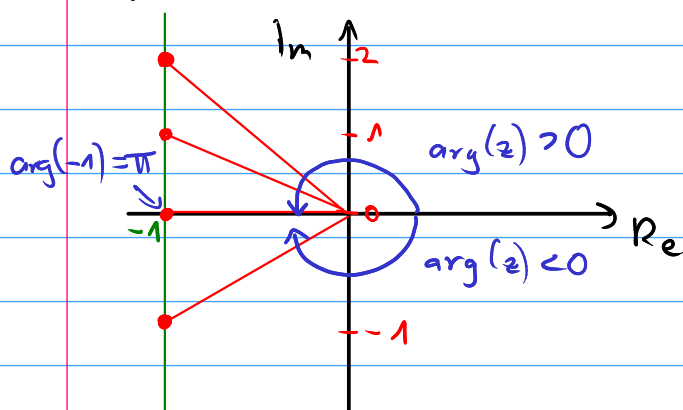
Frage 2: Sei $z = -3 - 4i$. Für das Argument gilt:

$$0 < \arg(z) < \pi/2, \quad \pi/2 < \arg(z) < \pi, \quad \underline{\underline{-\pi < \arg(z) < -\pi/2}}, \quad -\pi/2 < \arg(z) < 0$$



Der Winkel kann irgend eine reelle Zahl sein. Das Argument ist aber immer $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Das Argument ist gewissermaßen der "gekürzte" Winkel.

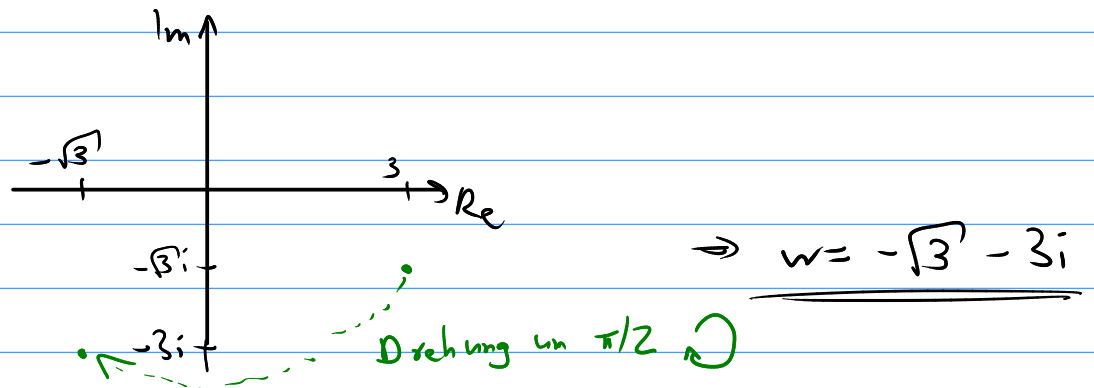
Frage 3: Sei $z = \underline{-1} + iy$. Für welche $y \in \{ \underline{-1}, 0, 1, 2 \}$ ist $\arg(z) > 0$?



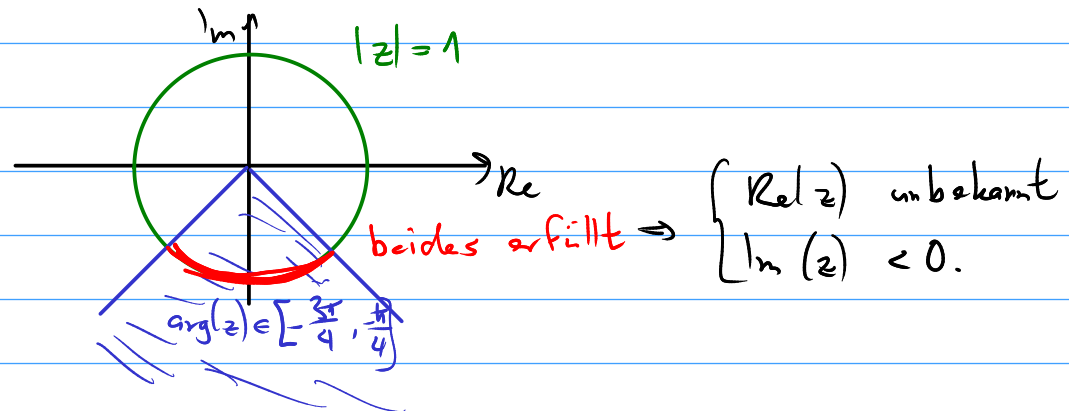
Frage 4: Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl mit Betrag r und Winkel φ . Welcher Winkel gehört zum Produkt $z \cdot \bar{z}$?

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 > 0 \Rightarrow \text{positive reelle Zahl} \Rightarrow \arg(z \cdot \bar{z}) = 0.$$

Frage 5: Wenn wir die komplexe Zahl $z = 3 - \sqrt{3}i$ um den Winkel $\pi/2$ im Uhrzeigersinn drehen, erhalten wir $w = \dots$

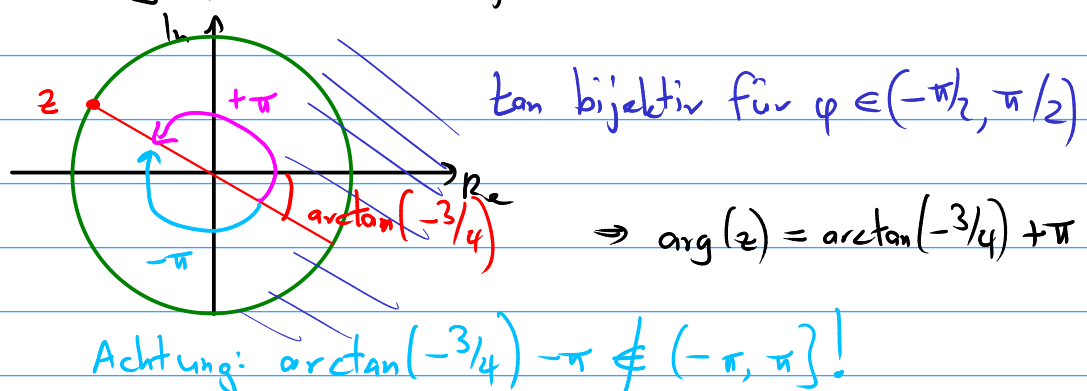


Frage 6: Sei z so dass $|z| = 1$ und $\arg(z) \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$. Welche Vorzeichen haben $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$?



Frage 7: $z = 1 + \sqrt{3}i$ hat in Polarform $r = \dots$ und $\varphi = \dots$?
 $r = |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi/3$.

Frage 8: $z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. In der Polarform ist $r = 1$ und $\arg(z) = \arctan(-\frac{3}{4}) + \dots$



Frage 9: Sei $z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$. Dann hat z^2 vom Ursprung den Abstand

$$\begin{aligned} |z^2| &= |z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Frage 10: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $r=3$ und Polarwinkel φ . Dann ist...

$$z = 3 \cos(\varphi) + 3i \sin(\varphi).$$

Frage 11: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $r=3$ und Polarwinkel $-\varphi$. Dann gilt:

$$\bar{z} = \overline{3 \cos(-\varphi) + 3i \sin(-\varphi)} = 3 \cos \varphi - 3i \sin \varphi = 3 \cos \varphi + 3i \sin \varphi$$

\uparrow \cos gerade \uparrow \sin ungerade
 \uparrow \neg Konjugation

Frage 12: Seien z mit $r=1$ und Winkel $\frac{\pi}{3}$, w mit $r=1$ und Winkel φ .

Für welche $\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right\}$ ist $z \cdot w$ reell?

$$z \cdot w = 1 \cdot e^{i\pi/3} \cdot 1 \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\pi/3 + \varphi)}$$

$$z \cdot w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z \cdot w) \in \{0, \pi\}, \text{ also für } \varphi \in \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Frage 13: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|=2$ und $\arg(z) = \pi/6$, $w = 5\sqrt{3} + b \cdot i$, $b \in \mathbb{R}$.

Für welches $b \in \left\{ -\frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{6}{\pi}, -\frac{6}{\pi}, -5, 0 \right\}$ ist $z \cdot w$ reell?

$$\arg(z) = \pi/6 \Rightarrow \arg(w) \in \left\{ -\pi/6, 5\pi/6 \right\} \text{ damit } z \cdot w \in \mathbb{R}$$

$$\text{Gesucht: } b, \text{ so dass } \arg(w) = \arctan\left(\frac{b}{5\sqrt{3}}\right) = -\pi/6$$

$$\tan(-\pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{b}{5\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ist gesucht}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = -5}}$$

Frage 14: Was ist der Realteil von e^{-i} ?

$$e^{-i} = e^{i \cdot (-1)} = \cos(-1) + i \sin(-1) = \cos 1 - i \sin 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(e^{-i}) = \cos 1.$$

Frage 15: Was ist der Imaginärteil von $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$?

$$\begin{aligned} \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi) &= e^{i3\varphi} = (e^{i\varphi})^3 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

Heute: Multiplikation in Polarkoordinaten, Wurzelziehen

Frage 1: $(\sqrt{3} + i)^7 =$

Sei $z = \sqrt{3} + i$. Dann ist $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

$$\Rightarrow |z^7| = |z|^7 = 2^7 = 128.$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6 \hat{=} 30^\circ$$

$$\Rightarrow z = 2 \cdot e^{i\pi/6} \Rightarrow z^7 = 128 \cdot e^{i7\pi/6} = 128 e^{-i5\pi/6} \in (-\pi, \pi]!$$

$$\Rightarrow \arg(z) = -5\pi/6$$

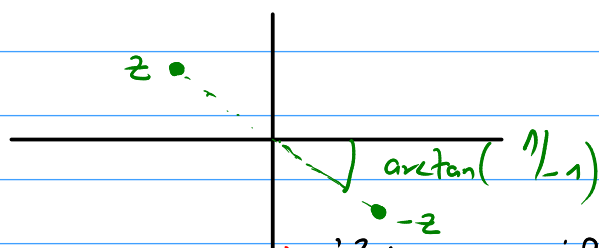
Frage 2: Sei z gegeben. Mit welchem w muss man z multiplizieren, so dass eine Drehung um 45° und eine Stauchung auf den halben Betrag resultiert?

Antwort: $w = \frac{1}{2} \cdot e^{-i\pi/4} \hat{=} 45^\circ$
 (Drehung \downarrow $-i\pi/4$)
 (Stauchung)

Frage 3: $(-1 + i)^4 = \dots?$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi$$

$$= -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$$



$$\Rightarrow z^4 = 4 \cdot e^{i3\pi} = 4 \cdot e^{i\pi} = 4 \cdot e^{i\pi} = -4.$$

Frage 4: Die komplexe Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi}$ liegt auf einem Kreis K um den Nullpunkt. Liegt dann $w \cdot z$ mit $w = e^{i\alpha}$, $\alpha < 0$ auch auf K ?
Ja, denn: $w \cdot z = e^{i\alpha} \cdot r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i(\alpha+\varphi)} \Rightarrow |w \cdot z| = r = |z|$

Frage 5: Für welche Zahl z_1 erhalten wir $z \cdot z_1$ an der roten Stelle?

$$\cdot |z \cdot z_1| = |z| \Rightarrow |z_1| = 1$$

$\cdot z \cdot z_1$ ist weiter \curvearrowright

$$\Rightarrow \arg(z_1) < 0$$

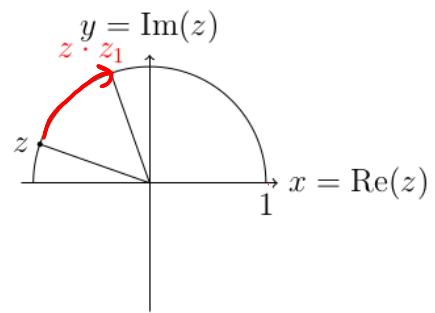
$$z_1 \in \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Quad., 2. Quad.

4. Quad.

$$\arg(z_1) < 0$$



Frage 6: Für welche z_1, z_2 liegt $z_1 \cdot z_2 \in B = \left\{ z = r \cdot e^{i\varphi} \mid \begin{matrix} r \in [2, 4] \\ \varphi \in [\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}] \end{matrix} \right\}$

$$\times \text{ i) } z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \Rightarrow |z_1| = 3, |z_2| = 4 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| > 4.$$

$$\checkmark \text{ ii) } z_1 = 5 \cdot e^{i\pi/15}, z_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{i\pi/6} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 5/2, \arg(z_1 \cdot z_2) = \frac{7}{30}\pi$$

$$\times \text{ iii) } z_1 = 3e^{i\pi/3}, z_2 = e^{i\pi/4} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 3, \arg(z_1 \cdot z_2) = \frac{7}{12}\pi$$

Regel: Bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Frage 7: Wenn $z = e^{i\pi/4}$, dann ist $z^2 = \dots$
 $= (e^{i\pi/4})^2 = e^{i\pi/2} = i.$

Frage 8: Unterschiede und Gemeinsamkeiten von $z_1 = e^{i\pi}$ und $z_2 = e^{i\pi+2i\pi}$?

Esgilt $z_1 = z_2$, ist also die gleiche komplexe Zahl.

Bei z_1 ist der Winkel bereits das Argument, bei z_2 nicht.

Beim Wurzelziehen verwenden wir dies: Naiv betrachtet ist

$$\sqrt{z_1} = z_1^{1/2} = e^{i\pi/2} = i, \quad \sqrt{z_2} = e^{\frac{1}{2} \cdot (i\pi+2i\pi)} = e^{3i\pi/2} = -i.$$

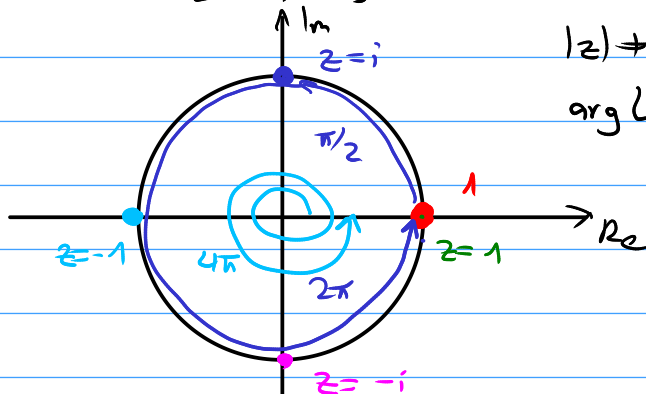
Frage 9: Wir betrachten die Gleichung $z^2 = i$. Wie viele komplexe Lösungen hat diese Gleichung?

Es sind 2: $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i\pi/4 + \frac{2i\pi}{2}} = e^{i\pi/4 + i\pi} = e^{5i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$.

Kontrolle: $z_1^2 = e^{i\pi/2} = i \checkmark$, $z_2^2 = e^{-6i\pi/4} = e^{-3i\pi/2} = e^{i\pi/2} = i \checkmark$

Frage 10: Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 1$.

$z \in \{\pm 1, \pm i\}$ erfüllen $z^4 = 1$.



$|z| \neq 1 \Rightarrow |z^4| \neq 1$, d.h. es muss $|z| = 1$ gelten.
 $\arg(z)$? $z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^4 = e^{4i\varphi} \stackrel{!}{=} e^0$.

Frage 11: Wahr oder falsch? "Für $c \neq 0$ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Gleichung $z^n = c$ genau n Lösungen." – Wahr!

Frage 12: Zur Lösung von $z^3 = -3+3i$...

... berechnet man erst die Polarform von $-3+3i$.

Frage 13: Die Lösungen von $z^3 = -3+3i$ erfüllen...

• $|-3+3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} =: r$

• $\arg(-3+3i) = \arctan\left(\frac{3}{-3}\right) + \pi = 3\pi/4 =: \varphi$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\varphi/3} = \sqrt[3]{18} \cdot e^{i\pi/4} = \sqrt[6]{18} \cdot e^{i\pi/4}$
 $z_2 = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{18} \cdot e^{i\frac{3\pi/4+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{18} \cdot e^{i\frac{11\pi}{4}} = \sqrt[6]{18} \cdot e^{i\frac{11\pi}{12}}$
 $z_3 = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{18} \cdot e^{i\frac{3\pi/4+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{18} \cdot e^{i\frac{19\pi}{4}} = \sqrt[6]{18} \cdot e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt[6]{18} \cdot e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Frage 14: Und bei $z^5 = -3 + 3i$?

$$|z| = \sqrt[5]{18} = \sqrt[10]{18}, \quad \arg(z_1) = \frac{3\pi}{4 \cdot 5} = \frac{3\pi}{20}.$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt[10]{18} e^{i \frac{3\pi}{20}}$$

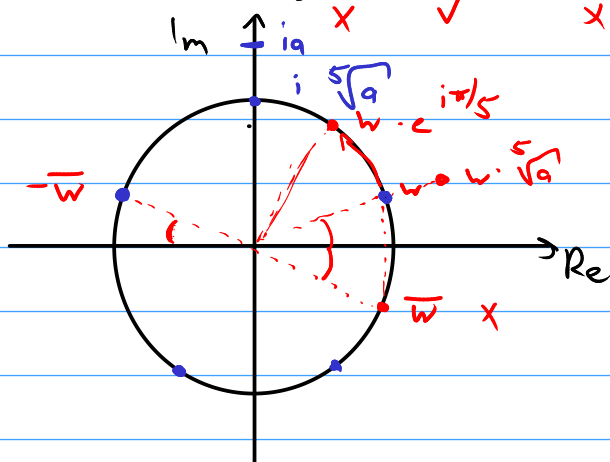
Die weiteren Lösungen ergeben sich durch Multiplikation mit $e^{i \frac{2n\pi}{5}}$, $n = 1, 2, 3, 4$

$$= e^{i \frac{8n\pi}{20}}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ keine weitere Lösung im 1. Quadranten außer z_1 .

Heute: Gleichungen, Polynomdivision, Fundamentalsatz der Algebra, Nullstellen

Frage 1: Sei w eine Lösung von $z^5 = ia$ mit $a > 1$ reell. Welche Zahl $\in \{\bar{w}, -\bar{w}, w \cdot e^{i\pi/5}, w \cdot \sqrt[5]{a}\}$ ist auch eine Lösung?



$$w = x + iy \Rightarrow -\bar{w} = -x + iy$$

$$\bullet |w| = |-\bar{w}| \quad \checkmark$$

$$\bullet \arg(-\bar{w}) = \pi - \arg(w)$$

$$\Rightarrow \arg((-w)^5) = 5(\pi - \arg(w))$$

$$= 5\pi - 5\arg(w)$$

$$\hat{=} \pi - \pi/2 = \pi/2$$

Frage 2: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$.

Wo steckt der Fehler?

$\bullet 1 = \sqrt{1}$ - \checkmark , so ist die Wurzel definiert

$\bullet \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)}$ - \checkmark , denn $1 = (-1) \cdot (-1)$

$\bullet \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ - \times , denn $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ gilt erst mal nur für $a, b \geq 0$.

Außerdem: Was ist $\sqrt{-1}$?

$\bullet \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i$ - \times , denn: Ist $\sqrt{-1} = i$ oder $\sqrt{-1} = -i$ oder beides?

$\bullet i \cdot i = -1$ - \checkmark , per Definition.

Lösung des Problems: Nie $\sqrt{-1}$ verwenden,
mit einer Ausnahme.

Nullstellen suchen von $ax^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Falls $b^2-4ac < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Frage 3: $(x^4-2x^3+2x^2-2x+1):(x-1) = \underline{\underline{x^3-x^2+x-1}}$

$$\begin{array}{r} -x^4 + x^3 \\ \hline -x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ +x^3 - x^2 \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ -x^2 + x \\ \hline -x + 1 \\ +x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Frage 4: $\frac{6x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = -\frac{3}{x^2+1} + \dots ? + \frac{Ax+B}{(x-1)^2}$ // • Haupt-
nenner

Es gilt $x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x^2+1)(x-1)^2$

Ansatz: $\frac{Ax+B}{(x-1)^2}$ oder $\frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow 6x = -3 \cdot (x-1)^2 + (Ax+B) \cdot (x^2+1)$

$\Rightarrow 6x = -3x^2 + 6x - 3 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + B$

müssen für alle x gleich sein \Rightarrow Koeffizientenvergleich

$x^3:$	$0 = A$	$\Rightarrow A=0$
$x^2:$	$0 = -3 + B$	$\Rightarrow B=3$
$x:$	$6 = 6 + A$	\checkmark
$1:$	$0 = -3 + B$	\checkmark

$\Rightarrow \frac{6x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = -\frac{3}{x^2+1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

Warum machen wir das?

$$\int \frac{6x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \underbrace{\int -\frac{3}{x^2 + 1} dx}_{\text{Formelsammlung}} + \underbrace{\int \frac{3}{(x-1)^2} dx}_{\text{einfache Regel}}$$

Frage 5: "Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten

hat ~~n verschiedene~~ Nullstellen,ⁿ mit Vielfachheit gezählt."

Frage 6: Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann hat jedes Polynom mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Nullstelle. ✓

Crashkurs Differentialgleichungen (DGL)

Gesucht sind Funktionen $y(x)$, für die gilt:

$$(H) \quad y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

Meist wird y statt $y(x)$ geschrieben

(Homogene, lineare DGL mit konstanten Koeffizienten 2. Ordnung)

Hier gilt: • Wenn y_1 und y_2 (H) lösen und $A, B \in \mathbb{R}$, dann löst auch $Ay_1 + By_2$ (H).

• DGL 2. Ordnung \Rightarrow Lösung ist ein Vektorraum der Dimension 2.

\Rightarrow Benötigen 2 Lösungen (Basisvektoren), um alle Lösungen (Vektoren) zu beschreiben.

Ansatz: $y(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Einsetzen in (H): $\underbrace{\alpha^2 \cdot e^{\alpha x}}_{y''} - 2\underbrace{\alpha e^{\alpha x}}_{y'} + 2\underbrace{e^{\alpha x}}_y = 0$

$$\Rightarrow e^{\alpha x} \cdot (\alpha^2 - 2\alpha + 2) = 0$$

Also: $y(x)$ löst (4) für alle $x \iff \underbrace{x^2 - 2x + 2 = 0}_{=: P(x)}$

Wir brauchen also die Nullstellen von $P(x)$, ein reelles Polynom.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i.$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = e^{(1 \pm i)x} = e^x \cdot e^{\pm ix} = e^x \cdot (\cos x \pm i \sin x)$$

$y_{1,2}$ sind komplex, aber wir benötigen reelle Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } \operatorname{Re}(y_1) \text{ löst (4)} &\Rightarrow y(x) = e^x \cdot \cos x \text{ lösen (4)} \\ \operatorname{Im}(y_1) \text{ löst (4)} &\Rightarrow y(x) = e^x \cdot \sin x \end{aligned}$$

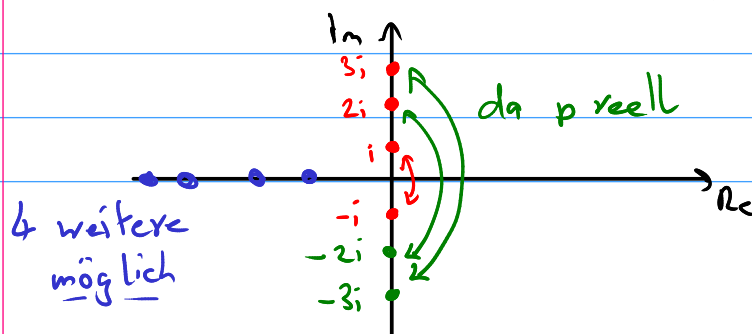
\rightarrow Die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' + 2y = 0$ ist
 $y(x) = A e^x \cdot \cos x + B \cdot e^x \cdot \sin x$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

Frage 7: $P(x) = x^4 - x = x \cdot (x^3 - 1)$, also hat $P(x)$ die einfache Nullstelle $x_1 = 0$ und die dreifache Nullstelle $x_2 = 1$.
 $x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$ und $x_{2,3} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$

Dreifach Nullstelle wäre: $(x-1)^3$

$$\begin{array}{r} \text{Hier: } x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \\ \begin{array}{r} x^3 - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x^2 - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \end{array} \end{array}$$

Frage 8: Sei p ein reelles Polynom vom Grad 10 mit
 $p(-i) = p(i) = p(2i) = p(3i) = 0$. Was ist die grösste Anzahl
an verschiedenen reellen Nullstellen, die p haben kann?



$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= z^2 - z_0 z - \bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}_0 \\ &= z^2 - z(z_0 + \bar{z}_0) + |z_0|^2 \\ &= z^2 - z(2 \operatorname{Re}(z_0)) + |z_0|^2 \end{aligned}$$