

## VIII Potenzreihen

Kapitel I: Geometrische Reihe  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ ,  
falls  $|x| < 1 \Rightarrow$  Reihe ist eine elementare Funktion

Kapitel II: Lineare Ersatzfunktion:  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$   
approximiert  $f$  an der Stelle  $x_0$  linear.

$$\cdot e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Kapitel III: Manche Funktionen haben keine elementare Stammfunktion.  
Wie rechnet man damit?

### VIII.1 Zu Konvergenz und Divergenz von Reihen

Zu einer Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  gibt es eine zugehörige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Diesem Ausdruck kann man einen Wert zuweisen:

Def:  $s_n := a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$  ist eine **Partialsumme**

Wenn die Folge  $(s_n)$  gegen  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert, ist die  
**Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  **konvergent** und  $s$  ist ihre **Summe** / ihr Wert,

$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Wenn  $(s_n)$  divergiert, ist die Reihe **divergent**.

Bsp: Für  $x \in \mathbb{R}$  fix sei  $a_k := x^k \Rightarrow s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

↙  
falls  $|x| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{falls } |x| < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases}$$

• Für  $|x| < 1$  konvergiert auch

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + \boxed{\phantom{x}} + \boxed{\phantom{x}}^2 + \boxed{\phantom{x}}^3 + \dots$$

falls  $|\boxed{\phantom{x}}| < 1$

$$\text{Hier: } \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

denn  $|(-x)| < 1$  und die Reihe konvergiert

$$\text{Etwas komplizierter: } \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

konvergiert falls  $|\boxed{-x^2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

$$\cdot f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-\boxed{x^2}} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

Konvergenz:  $|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

•  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ , Harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert

•  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $n \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , die **alternierende harmonische Reihe**

Satz: Diese Reihe konvergiert.

$$\text{Beweis: } s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= s_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- $\Rightarrow s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , d.h.  $(s_n)$  springt in immer kleiner werdenden Abständen hin und her.  
 $\Rightarrow (s_n)$  konvergiert, der Grenzwert liegt immer zwischen  $s_{n-1}$  und  $s_n$ , für alle  $n$ .  $\square$

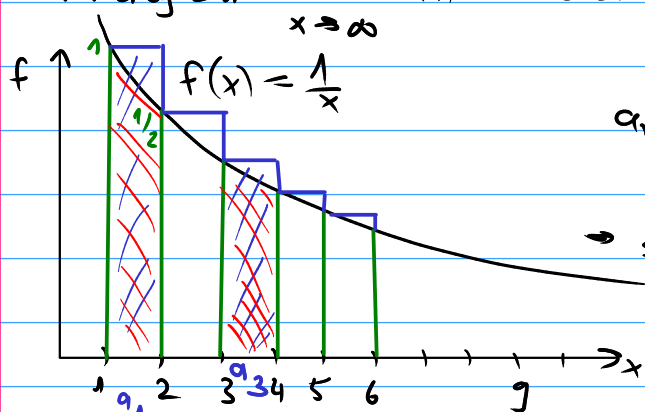
Satz: Wenn  $(a_n)$  eine alternierende Folge ist mit  
 •  $a_n$  hat ein anderes Vorzeichen als  $a_{n-1}$ , für alle  $n$   
 •  $|a_n| < |a_{n-1}|$ , d.h.  $(|a_n|)_n$  ist strikt monoton fallend,  
 dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent.

Satz: Wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann ist  
 $(a_n)$  eine Nullfolge, d.h.  $a_n \rightarrow 0$ .

Beweis:  $a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = \underline{\underline{0}}$ .  $\square$

Vorsicht:  $a_n \rightarrow 0$  reicht nicht, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert,  
 siehe Harmonischen Reihe:  $a_n := \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

Analog zu:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  reicht nicht für die Konvergenz von  $\int_a^{\infty} f(x) dx$



$$a_n = \frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
 &\geq \left( \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \dots + \int_n^{n+1} \right) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \left[ \ln x \right]_1^{n+1} = \ln(n+1)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \underline{\underline{\infty}}$$

$\Rightarrow$  Die harmonische Reihe divergiert.

## VIII.2 Potenzreihen

Def: Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{Koeffizient}} \underbrace{x^k}_{\text{Variable}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

(meistens  $\in \mathbb{R}$ )

Die Menge der reellen Zahlen  $x$ , für die diese Reihe konvergiert, ist der **Konvergenzbereich** der Potenzreihe.

Bsp: Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist eine Potenzreihe mit  $a_k = 1$  für alle  $k \geq 0$  und Konvergenzbereich  $(-1, 1)$ .

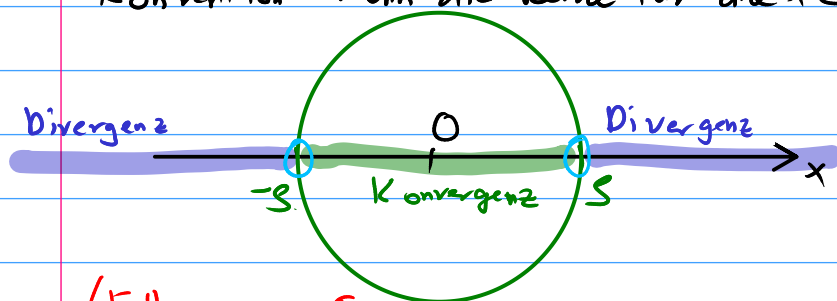
$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

( $\Rightarrow |x| < 1 = s$ )

Frage: Für welche Funktionen existieren Potenzreihen und was ist dann der Konvergenzbereich?

Satz: Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist ein Intervall mit Mittelpunkt 0. (offen, halb offen, abgeschl.)

Def: Die grösste Zahl  $s$ , so dass die Reihe für alle  $x$  mit  $|x| < s$  konvergiert, heisst **Konvergenzradius** der Potenzreihe.  
Konvention: Wenn die Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, ist  $s = \infty$



(Falls  $a_k, x \in \mathbb{C}$ :  
Bereich = Scheibe)

Es gilt:

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

falls der Grenzwert existiert.

Bsp:  $\cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , d.h.  $a_k = 1$

$$\Rightarrow s = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1.$$

Bemerkung: AdS  $x = \pm s$  ist sowohl Konvergenz wie auch Divergenz möglich, benötigt individuelle Untersuchung.

$\cdot a_k := \frac{1}{k}, k \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$  hat Konvergenzradius

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = 1.$$

$\cdot x = 1 \Rightarrow$  Harmonische Reihe, divergent

$\cdot x = -1 \Rightarrow$  Alternierende harmonische Reihe, konvergent.

$\Rightarrow$  Konvergenzbereich =  $[-1, 1)$

$\cdot a_k = \frac{1}{k!} \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty = s$

$$(e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$

Satz: Im Inneren des Konvergenzbereichs darf man Potenzreihen gliedweise addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, ableiten und integrieren.

Bsp:  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x}$

$$= \left( \underline{1} - \underline{x} + \underline{x^2} - \underline{x^3} + \dots \right) \cdot \left( \underline{1} + \underline{x} + \underline{x^2} + \underline{x^3} + \dots \right)$$

$\leftarrow$  gliedweise multiplizieren

$$= 1 + (-1+1) \cdot x + (1-1+1) \cdot x^2 + (-)x^3 + \dots = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

$\cdot$  Für  $|x| < 1$  ist  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \dots dt \\
&= \left[ \underset{\downarrow}{t} - \underset{\downarrow}{\frac{t^2}{2}} + \underset{\downarrow}{\frac{t^3}{3}} - \underset{\downarrow}{\frac{t^4}{4}} + \dots \right]_0^x \quad \text{gliedweise integrieren} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k,
\end{aligned}$$

Potenzreihe von  $\ln(1+x)$ , Konvergenzradius  $g=1$ .

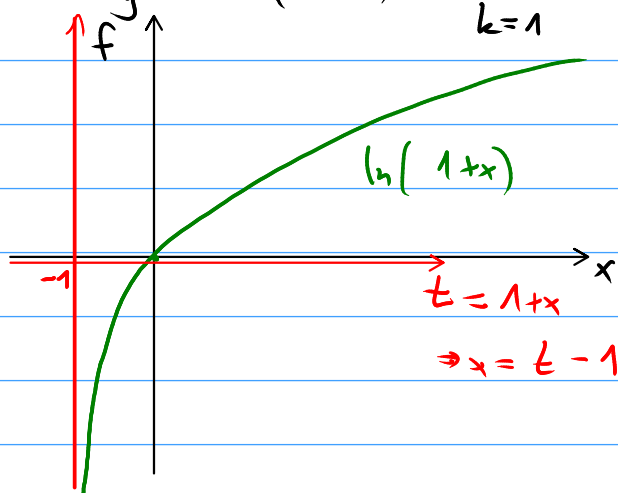
$x=1 \Rightarrow \underline{\ln(2)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , alternierende harmonische Reihe

Themen: Potenzreihen mit verschobenem Mittelpunkt, Taylorpolynom, Taylorreihe

$$\bullet \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots \quad \text{für } |t| < 1.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \right]_0^x \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad \text{für } |x| < 1
\end{aligned}$$

Erinnerung:  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$



Konvergenzbereich:  $x \in (-1, 1]$

$$\ln(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (t-1)^k$$

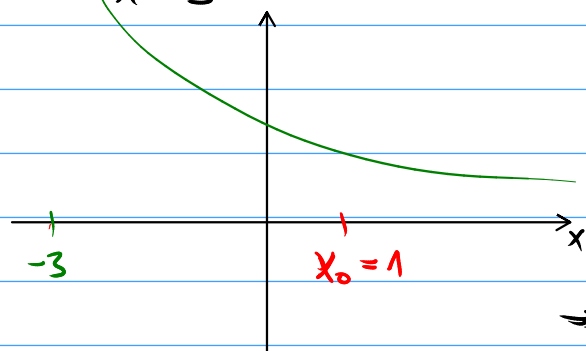
Konvergenzbereich:  $t \in (0, 2]$

Verschiebung des Mittelpunkts

Def:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$  ist eine Potenzreihe mit Mittelpunkt  $x_0$ .

⇒ Konvergenzbereich ist ein Intervall mit Mittelpunkt  $x_0$ .  
 Konvergenzradius  $= s$  bedeutet:  $|x - x_0| < s \Rightarrow$  Reihe konvergiert,  
 d.h.  $(x_0 - s, x_0 + s)$  ist im Konvergenzbereich.

Bsp:  $\frac{1}{x+3}$  als Potenzreihe mit Mittelpunkt  $x_0 = 1$ .



Pol bei  $x = -3 \Rightarrow s \leq 4$

Prinzip: Geometrische Reihe in  $(x-1)$

⇒ Schreibe  $\frac{1}{x+3}$  als  $a \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{b}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+3} = a \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{b}} = a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x-1}{b} \right)^k \quad \text{Geom. Reihe in } \square$$

$a_k = \frac{a}{b^k}$

Wie findet man  $a$  und  $b$ ?

Trick:  $x+3 = 4 + (x-1) = 4 \cdot \left( 1 - \frac{x-1}{-4} \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{4 \cdot \left( 1 - \frac{x-1}{-4} \right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{-4}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{4} \right)^k \cdot (x-1)^k, \text{ Potenzreihe um } x_0 = 1. \end{aligned}$$

Konvergenz:  $\left| \frac{x-1}{-4} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 4 \Leftrightarrow x \in (-3, 5)$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ x_0 & s & x_0 - s & x_0 + s \end{matrix}$

Noch offen: Konvergenz bei  $x = -3$ ,  $x = 5$

### VIII.3 Das Taylorpolynom

Sei  $P(x)$  ein Polynom:  $P(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}x + \underline{a_2}x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

⇒ Koeffizienten aus Ableitungen:

$P(0) = a_0$	$= 0! \cdot a_0$
$P'(0) = a_1$	$= 1! \cdot a_1$
$P''(0) = 2 \cdot a_2$	$= 2! \cdot a_2$
$P'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$	$= 3! \cdot a_3$
$\vdots$	
$P^{(n)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$	$= n! \cdot a_n$

Ableitungen um  $x_0 = 0$

Koeffizienten

der "Potenzreihe" um  $x_0 = 0$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \text{denn } a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

Dies funktioniert auch für Funktionen  $f$  statt Polynomen!

Def: Das Taylorpolynom von  $f$  vom Grad  $n$  ist

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Mit Mittelpunkt  $x_0$  statt 0:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Bsp:  $f(x) = \cos(x)$ ,  $x_0 = \pi/6$ ,  $n=2$

$$\Rightarrow P_2(x) = \underbrace{\frac{\cos(\pi/6)}{0!} \cdot (x - \pi/6)^0}_{k=0} + \underbrace{\frac{-\sin(\pi/6)}{1!} \cdot (x - \pi/6)^1}_{k=1} + \underbrace{\frac{-\cos(\pi/6)}{2!} \cdot (x - \pi/6)^2}_{k=2}$$



$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x - \pi/6) - \frac{\sqrt{3}}{4} (x - \pi/6)^2$$

$$\bullet f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \text{ für alle } x \text{ und } k.$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

- Eigenschaften:
- Taylorpolynome approximieren die Funktion
  - Je grösser  $n$ , desto besser die Approximation
  - Je grösser  $n$ , desto breiter ist der Bereich mit guter Approximation
  - Der Fehler  $|f(x) - P_n(x)|$  kann abgeschätzt werden, Stichwort "Restgliedabschätzung" (Nicht Teil von dieser Vorlesung)

### VIII.4 Die Taylorreihe

$$\text{Für } f(x) = e^x \text{ und } x_0 = 0 \text{ ist } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Def: Die **Taylorreihe** (Taylorentwicklung) von  $f$  ad  $x_0$  ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Frage: Gilt  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$ ? Wenn ja, wo?

Sprechweise: "Die Taylorreihe stellt die Funktion dar."

Meistens ist das auf dem Konvergenzbereich der Reihe der Fall.

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{aligned} &1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots + \frac{(ix)^k}{k!} + \dots \\ &+ 1 + (-ix) + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \dots + \frac{(-ix)^k}{k!} + \dots \end{aligned} \right)$$

Gerader Exponent  $\Rightarrow$  2 mal der gleiche Ausdruck

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \text{ Taylorreihe des Cosinus um } x_0 = 0.$$

(Kann auch über Ableitungen hergeleitet werden)

Konvergenzradius  $\rho = \infty$ , da dies schon bei  $\exp(ix)$  so ist.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sin^{(k)}(0) \cdot x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\sin(b) = \sin(b) = 0 = \sin^{(4)}(b)$$

$$\sin'(0) = \cos(0) = 1 = \sin^{(5)}(0)$$

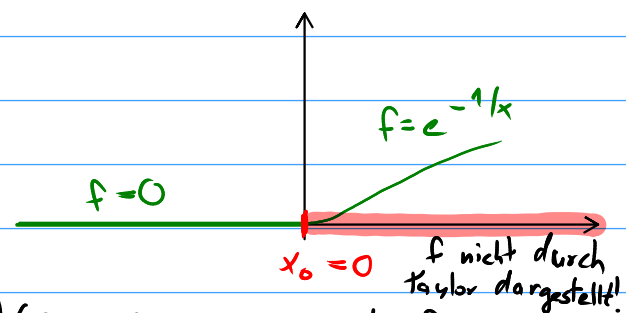
$$\sin''(0) = -\sin(0) = 0 = \sin^{(6)}(0)$$

$$\sin^{(n)}(0) = -\cos(0) = -1 = \sin^{(7)}(0)$$

$$s = \infty$$

- $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

Taylorreihe um  $x_0 = 0$ ?



Linksgrenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(4)}(x) = 0$  da dort  $f \equiv 0$

Rechts Grenzwerte:  $g(x) = e^{-1/x}$  für  $x \neq 0$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

2. Ableitung:  $g''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-1/x} + \frac{1}{x^4} e^{-1/x} = e^{-1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g''(x) = 0 \quad \Rightarrow f''(0) = 0$$

3., 4., n.-te Ableitung:  $f'''(0) = f^{(4)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$

$\Rightarrow$  Taylorreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Konvergenzradius  $\infty$ , aber die Reihe stellt  $f$  nur für  $x \leq 0$  dar.

Satz: Stellen 2 Potenzreihen mit gleichem Mittelpunkt  $x_0$  die gleiche Funktion dar, dann stimmen ihre Koeffizienten überein.

$\Rightarrow$  Jede konvergente Potenzreihe, die die Funktion darstellt, ist auch die Taylorreihe von  $f$  um  $x_0$ .

Bsp:  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$   
ist eine darstellende Potenzreihe und damit Taylorreihe

Analog beim  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

Themen: Taylorreihen von (un)geraden Funktionen,  $(1+x)^\alpha$ , Anwendungen

Satz: Die Taylorreihe um  $x_0=0$  einer ungeraden Funktion enthält nur Terme mit ungeraden Exponenten. Analog mit geraden Funktionen und geraden Exponenten.

Beweis: Sei  $f$  ungerade, d.h.  $f(-x) = -f(x)$   $\parallel \frac{d}{dx}$   
 $\Rightarrow +f'(-x) = +f'(x)$   $\parallel \frac{d}{dx}$   
 $\Rightarrow f'$  ist gerade

$$\Rightarrow -f''(-x) = f''(x)$$

$\Rightarrow f''$  ist ungerade

$$f \text{ ungerade} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f' \text{ ungerade} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$\vdots$

$$f^{(2k)} \text{ ungerade} \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

hat nur ungerade nicht-verschwindende Koeffizienten & Exponenten.

- Sei  $f$  gerade  $\Rightarrow f'$  ungerade  $\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$   
hat nur gerade nicht-verschwindende Koeffizienten & Exponenten.  $\square$

Folgerung: Jede Funktion lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben, indem man die Taylorreihe entsprechend aufteilt.

Bsp: Taylorreihe von  $\arcsin(x)$  um  $x_0 = 0$

- $\arcsin$  ist ungerade, dh. nur ungerade Exponenten.

•  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  geht noch, aber bereits die dritte Ableitung ist kompliziert.

Wie weiter?  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$

Bsp:  $f(x) := (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

Idee: Mit  $\alpha = -1/2$  wird  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ . Setze dann  $-x^2$  statt  $+x$  ein  $\Rightarrow$  Reihe für  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , die wir dann gliedweise integrieren können.

$$\bullet f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$\bullet f''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+2) \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} =: \binom{\alpha}{n}, \quad \begin{array}{l} \text{Für } \alpha \in \mathbb{R}! \text{ Für } \alpha \in \mathbb{N} \\ \text{ist dies der} \\ \text{normale} \\ \text{Binomialkoeffizient} \end{array}$$

der verallgemeinerte Binomialkoeffizient.

$$\Rightarrow \text{Taylorreihe von } (1+x)^\alpha \text{ um } x_0=0: (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Konvergenzbereich: Ohne Beweis:  $|x| < 1$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$  Unabhängig von  $\alpha$  konvergiert die Reihe für  $|x| < 1$  immer.

Argument modifizieren:

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixiert und  $g$  dazu bekannt

$$\Rightarrow \text{Wenn } |g(x)| < 1, \text{ gilt } (1+g(x))^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (g(x))^n$$

Für arcsin:  $g(x) = -x^2$ ,  $\alpha = -1/2$ .

$$\Rightarrow f(x) = (1+g(x))^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n$$

$$= \binom{-1/2}{0} - \binom{-1/2}{1} x^2 + \binom{-1/2}{2} x^4 - \binom{-1/2}{3} x^6 + \dots$$

$$\binom{-1/2}{0} = 1.$$

$$\binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1} = -1/2$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{\overbrace{(-1/2)}^{\alpha} \cdot \overbrace{(-3/2)}^{\alpha-1}}{2!} = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2)}{3!} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2) \cdot (-7/2)}{4!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$4! = 3! \cdot 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}x^8 + \dots$$

Konvergenz: Ok, da  $g \geq 1$  und  $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow |-x^2| < 1$   
 $\Leftrightarrow |x| < 1$

Zum Schluss: Gliedweise integrieren:

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^x \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \dots \right) dt \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, \\ &\text{konvergiert sicher f\"ur } |x| < 1. \end{aligned}$$

### Taylorreihen via Koeffizientenvergleich

Taylorreihe des Tangens um  $x_0 = 0$ :  $\tan x$  ist ungerade  $\Rightarrow$  Nur ungerade Expon.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos x}_{\text{Taylorreihe bekannt}} \cdot \boxed{\tan x} = \underbrace{\sin x}_{\text{Taylorreihe?}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)}_{\cos x} \cdot \underbrace{\left( a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots \right)}_{\tan x} \\ = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}_{\sin x} \end{aligned}$$

Beide Seiten sind nach dem Ausmultiplizieren Potenzreihen des Sinus  
 $\Rightarrow$  Müssen gleiche Koeffizienten haben.

$$\cos \cdot \tan = \sin$$

Vergleich:  $x^0$ :

$$0 = 0$$

$x^1$ :

$$1 \cdot a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$x^3$ :

$$-\frac{1}{2} \cdot a_1 + 1 \cdot a_3 = -\frac{1}{6} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$x^5: 1 \cdot a_5 - \frac{1}{2} \cdot a_3 + \frac{1}{24} \cdot a_1 = \frac{1}{5!} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots \quad \text{mit } g = \pi/2 \quad (\text{ohne Beweis})$$

### VIII.5 Anwendungen

Bsp: Bogenlänge der Ellipse  $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $a > b$

$$\begin{aligned} \text{Umfang? } U &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt, \quad \text{nicht elementar integrierbar} \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}_{=: k^2} \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt \quad \text{mit } 0 < k^2 < 1 \end{aligned}$$

Ansatz: Taylorreihe von  $\sqrt{1-x}$  via  $(1+g(x))^\alpha$   
 $\Rightarrow \alpha = 1/2, g(x) = -x$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^3 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots, \quad \text{für } |g(x)| < 1$$

$$\Leftrightarrow |1-x| < 1$$

$$\Leftrightarrow |k^2 \cos^2 t| < 1 \quad \checkmark$$

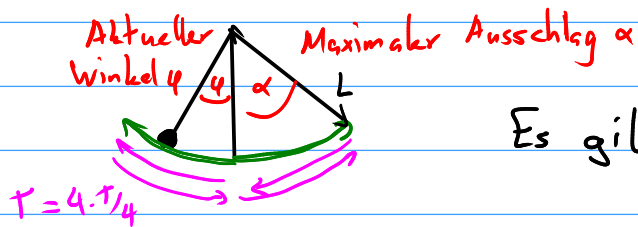
$$\Rightarrow U = 4a \cdot \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{k^2 \cos^2 t}{2} - \frac{k^4 \cos^4 t}{2 \cdot 4} - \frac{k^6 \cos^6 t \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \right) dt$$

$$\text{Mit III.6: } \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

$$\Rightarrow U = 4a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right)$$

Diese Formel konvergiert schnell für  $|k|$  klein, d.h.  $a \approx b$

Bsp: Mathematisches Pendel ohne Linearisieren



Es gilt:  $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha} = \frac{d\varphi}{dt}$

Periodenlänge T?

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

$$T = \int_0^T dt = 4 \cdot \int_0^{T/4} dt = 4 \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

Substitution:  $\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2) \cdot \sin u$

↑  
neue Variable

Ableiten  $\Rightarrow \frac{1}{2} \cos(\varphi/2) d\varphi = \underbrace{\sin(\alpha/2)}_{=:k} \cdot \cos u du$

$$\cos(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2) = 1 - 2k^2$$

$$\cos(\varphi) = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2) = 1 - 2k^2 \sin^2 u$$

$$\cos(\varphi/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{2k \cos u du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad u \text{ von } 0 \text{ bis } \pi/2$$

$$\Rightarrow T = 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2k^2 \sin^2 u - 1 + 2k^2}} \cdot \frac{2k \cos u du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

~~$-2 \sin^2 u + 2$~~

$$= 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2} du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right)$$

Linearer Term:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ , wie bei linearisierter DGL.

Freitag:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots = -1/12 ?$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = 1/4 ?$$