

## VII Differentialgleichungen

## VII. 1 Einleitung

Bsp:  $x(t)$  Ort  
 $v(t)$  Geschwindigkeit  
 $K$  Kraft

Beziehungen:

$$\dot{x} = v$$

$$m\ddot{x} = K \Rightarrow m\dot{v} = K$$

Dies sind Differentialgleichungen, also Gleichungen von Funktionen und ihren Ableitungen.

Bsp: Kapitel II:  $y'(x) = a \cdot y(x)$  für ein festes  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{ax} \quad \text{für einen Parameter } C \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung der Gleichung  $y' = a \cdot y$  ist eine Schar von Funktionen, mit Scharparameter  $C$ , d.h. für jedes  $C \in \mathbb{R}$  ist  $y(x) = C \cdot e^{ax}$  eine Lösung, und jede Lösung hat genau diese Form.

$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{ax}$  ist die allgemeine Lösung ( $C$  ist ein freier Parameter, nicht gewählt)

Wenn  $y(x_0) = y_0$  gelten soll, wird  $C$  eindeutig bestimmt.

Def: Eine DGL der Form  $y' = ay$  mit  $y(x_0) = y_0$  ist ein Anfangswertproblem (AWP), die Lösung  $y(x) = C \cdot e^{ax}$  ist dann die spezielle Lösung ( $C$  ist bestimmt worden).

Bsp:  $m\ddot{x} = K$ ,  $K$  konstant  $\Rightarrow x(t) = \frac{K}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$ ,  
 eine Schar mit 2 Parametern  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Hier:  $C_1 = \dot{x}(0)$ , Geschwindigkeit bei  $t=0$   
 $C_2 = x(0)$ , Ort bei  $t=0$

→ Wenn  $x(0)$  und  $v(0) = \dot{x}(0)$  bekannt sind, kann man dieses AWP eindeutig lösen und erhält die spezielle Lösung.

Ziele für dieses Kapitel:

Finden von allgemeinen Lösungen von gewissen DGL  
Ausnützen von Anfangswerten, um spezielle Lösungen zu finden.

Def: Wenn  $y$  eine Funktion in  $x$  ist, nennt man die Gleichung  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL, ODE, ordinary differential equation)**. Eine Funktion  $y(x)$ , die die Gleichung erfüllt, ist eine **Lösung** der DGL.  $n$  ist die **Ordnung** der DGL, also die höchste auftretende Ableitung

Bsp:  $y'' + \omega^2 y = 0$  für ein fixes  $\omega \in \mathbb{R}$ , DGL 2. Ordnung  
 $= F(x, y, y', y'')$

Lösung:  $y(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)$  ist eine Lösung wenn  $A, B \in \mathbb{R}$ :

$$y''(x) = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega x) - \omega^2 B \sin(\omega x) = -\omega^2 y(x)$$

$$\Rightarrow y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \quad \text{für alle } \underbrace{A, B \in \mathbb{R}}_{\text{Scharparameter}}$$

## VII.2 Einige Beispiele

### (a) Ungestörtes Wachstum

Sei  $m(t)$  die Masse/Menge einer ungestört wachsenden Erregerpopulation  $\Rightarrow$  Wächst pro Zeiteinheit um einen

Prozentsatz  $p(st)$  an, d.h.  $\Delta m = p(st) \cdot m(t) \quad //: \Delta t$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{p(st)}{\Delta t} \cdot m(t)$$

Mit  $\Delta t \rightarrow 0$  gilt:  $\frac{dm}{dt} = m'(t) = \underbrace{\left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(\Delta t)}{\Delta t} \right)}_{=: a > 0, \text{ Wachstumsfaktor}} \cdot m(t)$

$$\rightarrow m' = a \cdot m \Rightarrow m(t) = C \cdot e^{at}$$

Anfangsmasse  $m_0 = m(0) = C \Rightarrow m(t) = m_0 \cdot e^{at}$

(Trennt auf bei Wirtschaftswachstum, Zinsen, Epidemiologie)

(b) Abklingvorgänge

Analog zu (a), aber mit konstanter Abnahme

$$y'(t) = -k \cdot y(t), \text{ mit } k > 0 \Rightarrow y(t) = C \cdot e^{-kt}$$

Anfangsbedingung:  $y(t_0) = y_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)}$

Bsp: • Auskühlen eines Körpers:  $y(t) \hat{=}$  Temperaturdifferenz zw. Körper & Umgebung

• Radioaktiver Zerfall: Pro Zeiteinheit zerfällt ein gewisser Prozentsatz der Atome

Halbwertszeit  $\tau$  beschreibt, nach welcher Zeit sich die Masse halbiert hat.

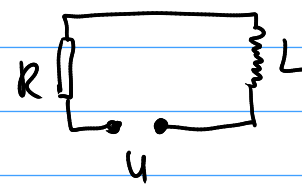
$$t_0 = 0: y_0 \cdot e^{-k\tau} = y(\tau) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \cdot y(0) = \frac{y_0}{2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\ln(2)}{k}$$

Bsp: Da  $2^{10} \approx 1000 = 10^3$ , muss man  $10\tau$  lange warten, bis  $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$  der Ursprungsmasse vorhanden ist.

### (c) Einschalten eines elektrischen Stroms

Gegeben einen Schaltkreis mit Widerstand  $R$ , Selbstinduktion  $L$ , Spannung  $U$



Stromstärke  $I(t)$ ? Physik  $L \cdot \dot{I} = -R \cdot I + U$   $//:L$

Trick:  $f(t) := I(t) - U/R \Rightarrow f'(t) = \dot{I}(t)$

$$\Rightarrow f' = \dot{I} = -\frac{R \cdot I}{L} + \frac{U}{L} = -\frac{R}{L} \cdot \left(I - \frac{U}{R}\right) = -\frac{R}{L} \cdot f$$

$$\Rightarrow f' = -\frac{R}{L} \cdot f \Rightarrow f(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$\Rightarrow I(t) = f(t) + U/R = \frac{U}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Einschalten:  $I(0) = 0 = \frac{U}{R} + C \Rightarrow C = -U/R$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)}$$

### (d) Freier Fall mit Reibung

Massepunkt  $m$  fällt frei und wird von einer linearisierten Reibungskraft proportional zu  $v(t)$  gebremst.

Awp:  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$

Kräftegleichung:  $\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Totalkraft}} = \underbrace{m \cdot g}_{\text{Gewichtskraft}} - \underbrace{a \cdot \dot{x}}_{\text{Reibung}}$ , DGL 2. Ordnung in  $x$

$x$  selbst taucht nicht auf, verwende stattdessen  $v = \dot{x}$   
( $\Rightarrow v(0) = 0$ )



$$\Rightarrow m \cdot \dot{v} = m \cdot g - a \cdot v$$

Vergleiche mit (c):  $L \cdot \dot{I} = -R \cdot I + U$ , gleiche DGL mit anderen Symbolen

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Übersetzen in Symbole von (d):  $v(t) = \frac{m \cdot g}{a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right) = \dot{x}(t)$

Integrieren

$$\Rightarrow x(t) = \frac{m \cdot g}{a} \cdot t + \frac{m^2 \cdot g}{a^2} \cdot e^{-\frac{a}{m}t} + D$$

D bestimmen durch  $x(0) = 0 = \frac{m^2 g}{a^2} + D \Rightarrow D = -\frac{m^2 g}{a^2}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{m \cdot g}{a} \cdot t + \frac{m^2 g}{a^2} \left(-1 + e^{-\frac{a}{m}t}\right)$$

Asymptotik von  $v(t)$ :  $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{m \cdot g}{a}$ , wächst nicht unbeschränkt!

Feststellung:

- Die selben Gleichungen tauchen immer wieder auf, nur mit anderen Bezeichnungen und Interpretationen
- Allgemeine, abstrakte Lösungsverfahren sind gefragt!
- DGL sind nur Modelle des realen, physikalischen Problems. Die Nützlichkeit hängt von Parametern, der Datenqualität und der Komplexität ab.

Themen: DGL 1. Ordnung, Richtungsfeld, Existenzsatz, Feldlinien eines Vektorfelds, reguläre Kurvenscharen

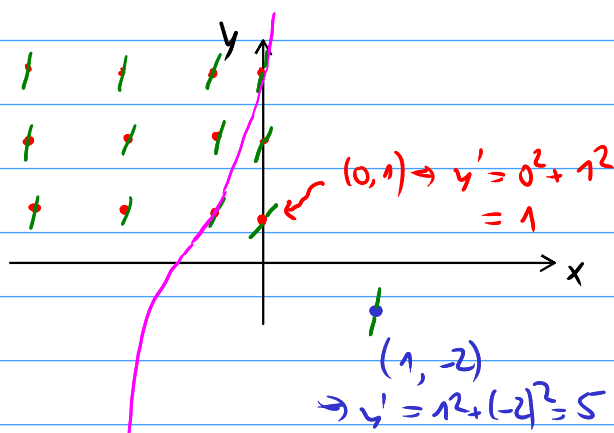
### VII. 3 Die allgemeine Lösung einer DGL 1. Ordnung

1. Ordnung  $\Rightarrow$  Gleichung der Form  $F(x, y, y') \equiv 0$

Annahme: Diese Gleichung ist nach  $y'$  auflösbar, d.h.  $y' = f(x, y)$

Bsp:  $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{DGL } y' = x^2 + y^2$

Awp:  $y(x_0) = y_0$  gegeben  $\Rightarrow y'(x_0) = x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0)$ ,  
d.h. die Ableitung an  $x_0$  ist bekannt.



Zeichne  $y'$  für ein Gitter  
von  $(x_0, y_0) \rightarrow$  Richtungsfeld der DGL

$\Rightarrow$  Der Graph  $P(y)$  einer speziellen  
Lösung  $y(x)$  ist überall  
tangential zum Richtungsfeld

Dies bildet auch die Grundlage für ein numerisches Lösungsverfahren:  
Starte in  $(x_0, y_0)$ , lasse  $x \in [x_0, x_1]$  langsam wachsen und approximiere  
dabei  $y(x)$  durch Linearisierung.

Existenzsatz: Sei  $f(x, y)$  in  $D(f)$  stetig und nach  $y$  partiell  
stetig diff'bar. Dann gibt es für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in D(f)$   
genau eine Funktion  $y(x)$  mit  $y' = f(x, y)$  und  $y(x_0) = y_0$ .

Bsp:  $f(x, y) = ay$ , d.h.  $y' = a \cdot y$ ,  $a \in \mathbb{R}$

$f$  ist stetig,  $f_y = a$  ist auch stetig  $\Rightarrow$  Existenzsatz  $\checkmark$

$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{ax}$ , allgemeine Lösung mit Parameter  $C \in \mathbb{R}$ .

Wenn  $y(x_0) = y_0$ , dann ist  $C = y_0 \cdot e^{-ax_0}$

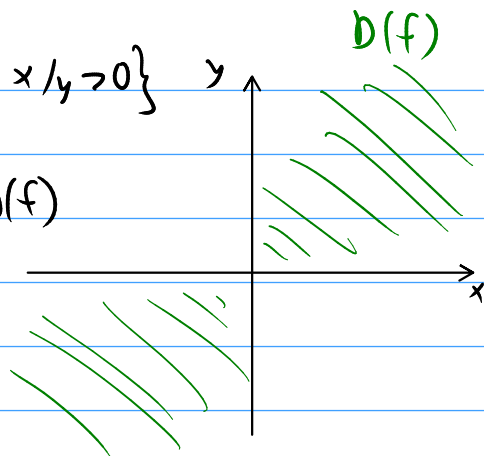
$\Rightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{a(x-x_0)}$ , spezielle Lösung des Awp

Existenzsatz: Dies ist die einzige Lösung!

•  $f(x,y) = \ln(x/y)$ .  $D(f) = \{(x,y) \mid x/y > 0\}$

$$f_y = \frac{1}{x/y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{1}{y}, \text{ stetig in } D(f)$$

⇒ Existenzsatz ist erfüllt!



•  $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2} = y^{2/3}$ , d.h.  $y' = y^{2/3}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^2$

⇒  $f$  stetig,  $f_y = \frac{2}{3} \cdot y^{-1/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

⇒  $f_y$  existiert nicht für  $y=0$ , obwohl dies in  $D(f)$  ist.

⇒ Existenzsatz gilt nicht!

Konsequenz:  $y(x) = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3$  löst diese DGL, denn

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{x-C}{3}\right)^2 = \left(\frac{x-C}{3}\right)^2 = y^{2/3},$$

aber  $y(x) \equiv 0$  löst diese DGL auch, denn  $y' = 0 = y^{2/3}$ .

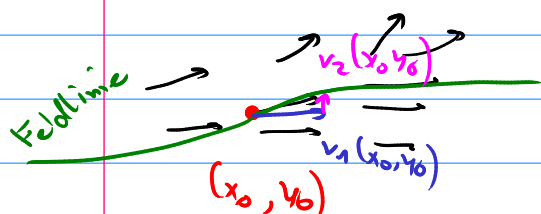
⇒ Es gibt keine eindeutige Lösung für das AWP  $y(x_0) = 0$ .

Anwendung: Feldlinien eines ebenen Vektorfelds

Sei  $\vec{v}$  ein ebenes Vektorfeld und  $(x_0, y_0) \in D(\vec{v})$

Offene Frage aus Kapitel VI: Wie berechnet man die Feldlinie durch  $(x_0, y_0)$ ?

Der Richtungsvektor  $\vec{v}(x_0, y_0)$  entspricht der Ableitung einer Funktion:



Als Steigung einer Funktion:

$$y'(x_0) = \frac{v_2(x_0, y_0)}{v_1(x_0, y_0)}$$

⇒ Aufgestellt für allgemeine  $x$ :  $y'(x) = \frac{v_2(x, y(x))}{v_1(x, y(x))}$ , DGL 1. Ordnung

Anfangswertproblem durch  $y(x_0) = y_0$

Existenzsatz: Wenn  $v_1(x, y(x)) \neq 0$  und  $\frac{v_2}{v_1}$  nach  $y$  stetig partiell diff'bar ist, dann gibt es eine eindeutige spezielle Lösung. Deren Graph  $\Gamma(y)$  ist gerade die Feldlinie von  $\vec{v}$  durch  $(x_0, y_0)$ .

Bsp:  $\vec{v}(x, y) = (y, x) \Rightarrow y' = \frac{v_2}{v_1} = \frac{x}{y} \parallel y$ , DGL 1. Ordnung

$$\Rightarrow y'(x) \cdot y(x) = x \Rightarrow \int y'(x) \cdot y(x) dx = \int x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (y(x))^2 = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 2C, \text{ implizite Form der Hyperbel}$$

$$\text{AWP: } y(x_0) = y_0 \Rightarrow \underline{y_0^2 - x_0^2 = 2C} = \underline{(y(x))^2 - x^2} \parallel + x^2 \parallel \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{y_0^2 - x_0^2 + x^2}, \text{ spezielle Lösung}$$

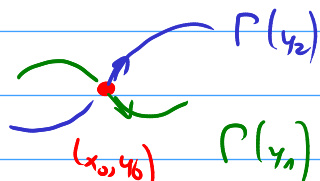
- Wahl von  $\pm$ , hängt von  $(y_0, x_0)$  ab
- Vorsicht:  $y' = v_2/v_1$  verliert die Information über Geschwindigkeit und den Durchlaufsinne der Feldlinie.

### Allgemeine Lösung und reguläre Kurvenscharen

Existenzsatz:  $y' = f(x, y)$  mit  $y(x_0) = y_0$  ist unter Bedingungen eindeutig lösbar.

⇒ Graphen  $\Gamma(y)$  von verschiedenen AWP sind entweder identisch

oder komplett disjunkt und kreuzen sich gar nicht.

Grund:   $\Rightarrow y_1'(x_0) \neq y_2'(x_0)$ , Widerspruch zur Eindeutigkeit!

→ Fixiere  $x_0$ . Für  $y(x_0) = C$  mit  $C \in \mathbb{R}$  ergibt sich eine Schar von Lösungen, die alle disjunkt.

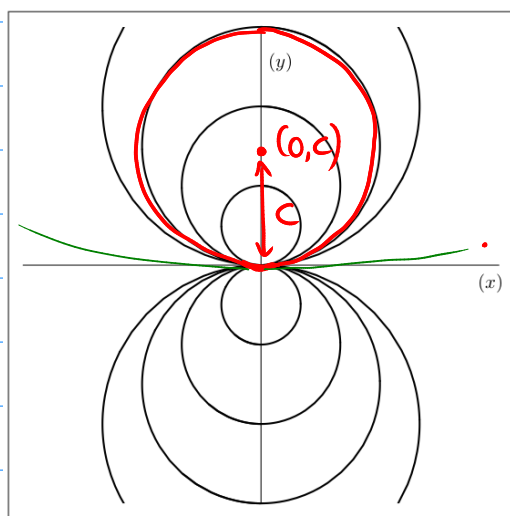
Jede Lösung eines AWP hat aber einen Wert bei  $x_0$ , d.h. es gibt für jedes AWP ein  $C$  mit  $y(x_0) = C$ , die Lösung ist Teil der Kurvenschar

→ Die allgemeine Lösung  $y' = f(x, y)$  ist vollständig beschrieben durch das parametrisierte AWP  $y(x_0) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Diese Kurvenschar der Lösungen hat keine Kreuzungspunkte und ist damit **regulär**.

Frage: Geht das auch umgekehrt? D.h. Gibt es zu einer regulären Kurvenschar auch immer eine zugehörige DGL?

Bsp: Gegeben sei die Schar der Kreise mit Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse, die die  $x$ -Achse im Ursprung berühren



Parametrisierung:

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2 \quad \parallel -C^2$$

$\uparrow$  Mittelpunkt  $(0, C)$ 
 $\uparrow$  Radius  $C$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2yC = 0 \Rightarrow C = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

Setze  $y = y(x)$  als Funktion in  $x$  und leite ab:

$$\Rightarrow 2x + 2 \cdot y \cdot y' - 2y' \cdot C = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y-2C} \stackrel{C=\frac{x^2+y^2}{2y}}{\Rightarrow} \frac{-x}{y-\frac{x^2+y^2}{2y}} = \frac{-2xy}{2y^2-x^2-y^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad \text{DGL 1. Ordnung, allgemeine Lösung} \\ \hat{=} \text{reguläre Kurvenschar}$$

## VII.4 Separierbare Differentialgleichungen

Allg. DGL 1. Ordnung ist gegeben durch  $y' = f(x, y)$

Def: Wenn  $f(x, y)$  die Form  $f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$  hat, ist die DGL **separierbar**.  
 $\swarrow$  beliebige Fkt in  $x$  bzw  $y$ .

Lösung einer separierbaren DGL:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \parallel \cdot h(y)$$

$$\Rightarrow h(y) \cdot y' = g(x)$$

$$\Rightarrow h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x) \quad \parallel \int dx$$

$$\Rightarrow \int h(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int g(x) dx$$

Substitution:  $y = y(x) \Rightarrow \int h(y) dy = \int g(x) dx$ , denn  $y'(x) dx = dy$

Integriere nun beide Seiten,  $+C$  nicht vergessen, dann auflösen nach  $y \Rightarrow$  Allgemeine Lösung der separierbaren DGL

Bsp:  $y' = ay = \frac{\textcircled{a=g(x)}}{\textcircled{1/y=h(y)}}$ , DGL ist separierbar

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = a \quad \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int a dx$$

$$\Rightarrow \ln |y| = ax + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{(\pm)}_{\text{wegen } |y|} e^{ax+C} = A \cdot e^{ax} \quad \text{mit } A = \pm e^C, \text{ wie bekannt}$$

Bsp: Logistisches Modell

$y(t) \hat{=}$  Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt  $t$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta t \cdot (G - T + E - A)$$

mit Raten von Geburten, Todesfällen, Einwanderungen und Auswanderungen.

Vereinfachung:  $E = A \Rightarrow \Delta y = \Delta t \cdot (G - T)$

- Modelle:
- $T = a \cdot y(t)$ , proportional zur Bevölkerungszahl
  - $G = c \cdot y(t)$ , analog
  - Bei  $y$  gross herrscht irgendwann Ressourcenknappheit

$$T = a \cdot y(t) + b \cdot y(t)^2, \quad y^2 \hat{=} \text{Anzahl Zusammenstöße in Bevölkerung}$$

$$G = c \cdot y(t) - d \cdot y(t)^2$$

$$\Rightarrow \Delta y = \Delta t \cdot \left( \underbrace{(c-a)}_{=: \alpha > 0} \cdot y(t) - \underbrace{(b+d)}_{=: \beta > 0} y(t)^2 \right) \quad // : \Delta t$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t) = \alpha y - \beta y^2, \text{ separierbare DGL}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = \int 1 dt$$

Rationale Funktion in  $y \Rightarrow$  Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\alpha y - \beta y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{\beta dy}{\alpha - \beta y} \right) = \int \alpha \cdot 1 dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|\alpha - \beta y| = \alpha t + C$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y}{\alpha - \beta y} \right| = \alpha t + C$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\alpha - \beta y} = \pm e^{\alpha t + C} \quad // \quad ( )^{-1}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha - \beta y}{y} = \pm e^{-\alpha t - C}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{y} = \beta \pm e^{-\alpha t - C} \quad // \quad ( )^{-1}$$

$$A := \pm e^{-C} \Rightarrow y|_{\alpha} = \frac{1}{\beta + A \cdot e^{-\alpha t}}$$

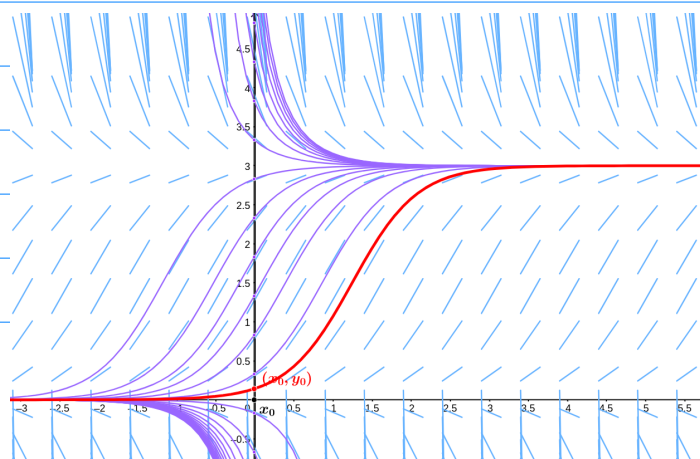
$$\Rightarrow y(t) = \frac{\alpha}{\beta + A \cdot e^{-\alpha t}}, \text{ allg. Lsg mit Parameter } A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Alwp: } y(0) = y_0 = \frac{\alpha}{\beta + A} \Rightarrow A = \frac{\alpha}{y_0} - \beta$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{\alpha}{\beta + \left( \frac{\alpha}{y_0} - \beta \right) e^{-\alpha t}}$$

Asymptote:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \alpha/\beta$ ,

Bevölkerungszahl wird also  
stabil mit  $t$  gross.





## Substitution

Manche DGL 1. Ordnung sind nicht separierbar, aber lassen sich durch Substitution separierbar machen.

$$\text{Bsp: } y' = (\underbrace{4x + 5y}_{=: u(x)})^2$$

$$= (u(x))^2$$

$$u(x) = 4x + 5y(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = (u(x) - 4x) / 5 \quad // \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{u'(x) - 4}{5}$$

$$\Rightarrow y' = \boxed{u^2} = \boxed{\frac{u' - 4}{5}}$$

DGL 1. Ordnung in  $u(x)$ , separierbar

$$\Rightarrow u' = 5u^2 + 4 \quad \rightarrow \int \frac{du}{5u^2 + 4} = \int 1 dx$$

Formelsammlung:  $\int \frac{dt}{at^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot t\right),$

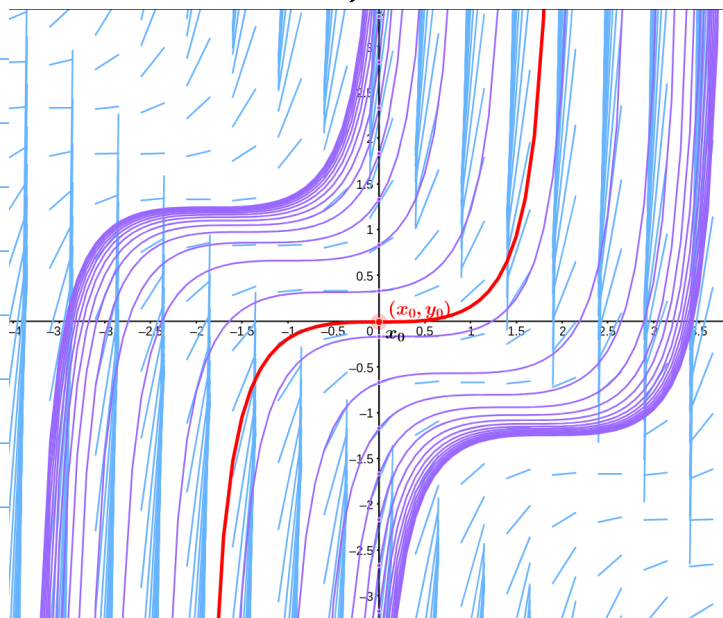
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{5}{4}} u\right) = x + C \quad \text{hier mit } t=u, a=5, b=4$$

$$\Rightarrow u = \underbrace{\sqrt{\frac{4}{5}} \tan(\sqrt{20} x + C')}_{\text{Lösung der DGL in } u(x)} = 4x + 5y \quad \text{per Definition}$$

Auflösen nach  $y$ !

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \tan(\sqrt{20} x + C'),$$

allgemeine Lösung



Bsp:  $x y' = y - 2\sqrt{xy}$ , DGL 1. Ordnung, nicht separierbar

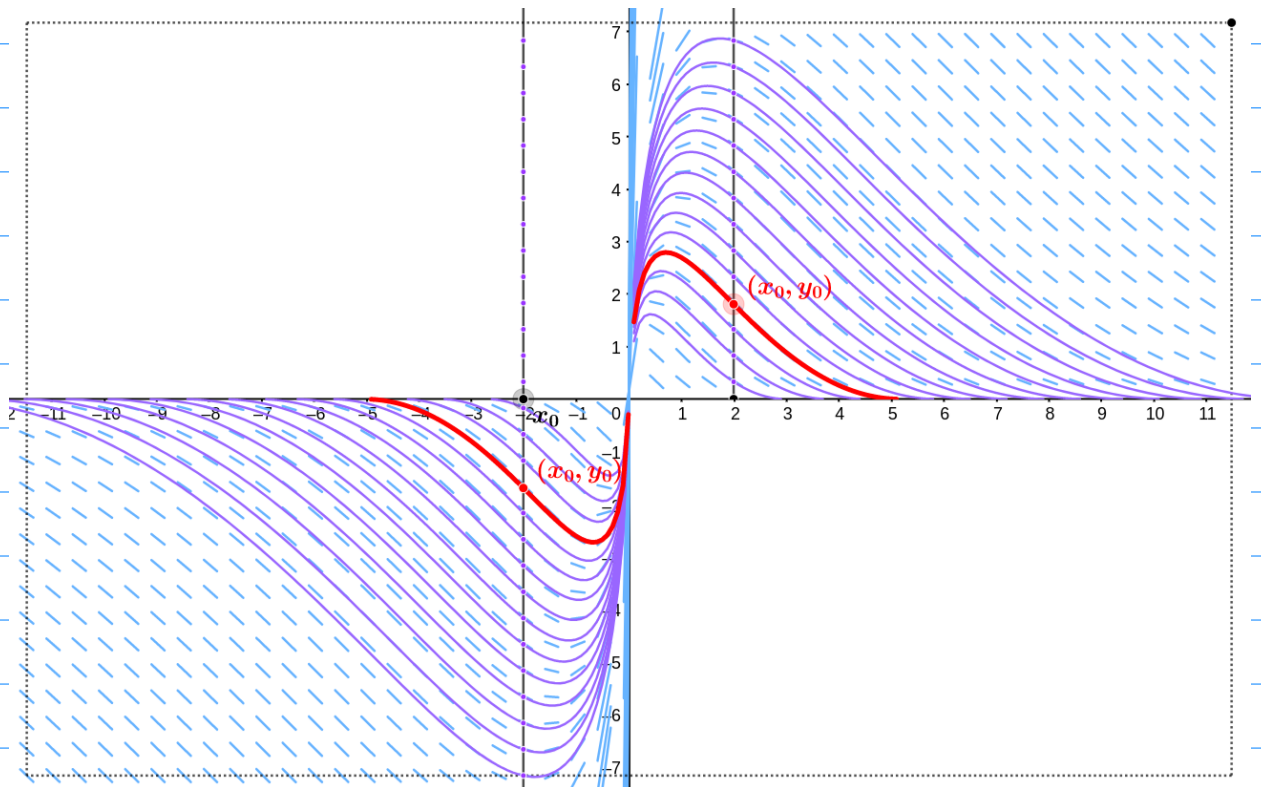
$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}$ . Setze  $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot u(x)$   
 $\Rightarrow u'(x) = u'(x) + x \cdot u'(x)$   
 $= \cancel{u} - 2\sqrt{u} = \cancel{u} + x \cdot u'$

$\Rightarrow u' = -\frac{2\sqrt{u}}{x}$ , separierbar

$\Rightarrow -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow -\sqrt{u} = \ln|x| + C \Rightarrow u = (\ln|x| + C)^2$  mit  $C \in \mathbb{R}$ ,  
 dass  $\ln|x| + C < 0$

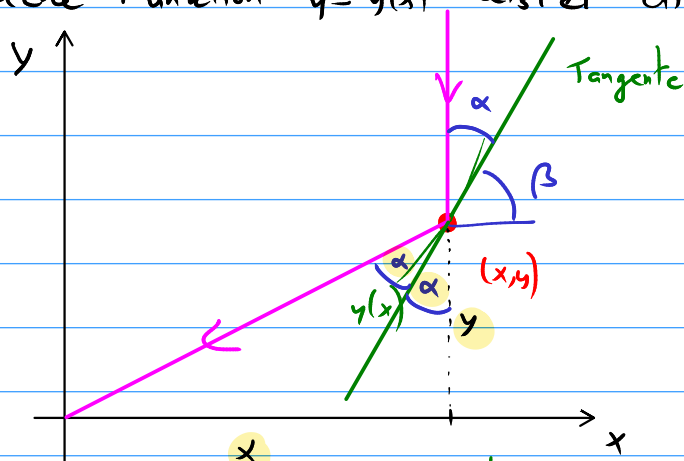
Rücksubstitution:  $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \underline{y = u \cdot x = x \cdot (\ln|x| + C)^2}$



## Anwendungsbeispiel: Parabolspiegel

Strahl senkrecht von oben, werde in  $(x, y)$  reflektiert, so dass er nachher durch den Ursprung  $(0,0)$  geht.

Welche Funktion  $y = y(x)$  leistet dies?



$\alpha$ : Reflexionswinkel

$\beta$ : Tangentensteigungswinkel

$$\rightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \cot \alpha = y'$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \cot(2\alpha) \stackrel{\text{Formel-sammlung}}{=} \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)} = \frac{(y')^2 - 1}{2 \cdot y'}$$

$$\Rightarrow (y')^2 \cdot x - 2y \cdot y' - x = 0, \text{ DGL 1. Ordnung}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + x^2}}{x} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$$

Substitution:  $u = y/x \Rightarrow y' = x \cdot u' + u = u \pm \sqrt{u^2 + 1}$

$\uparrow$  subst                       $\uparrow$  DGL

$\pm$ ? Wähle "+" für  $x > 0$ , da dann  $y' > 0$   
 "−" für  $x < 0$ , da dann  $y' < 0$  gelten muss.

$$\Rightarrow x \cdot u' = \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow u' = \frac{1/x}{1/\sqrt{u^2 + 1}}, \text{ separierbar}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arsinh}(u) = \ln|x| + C$$

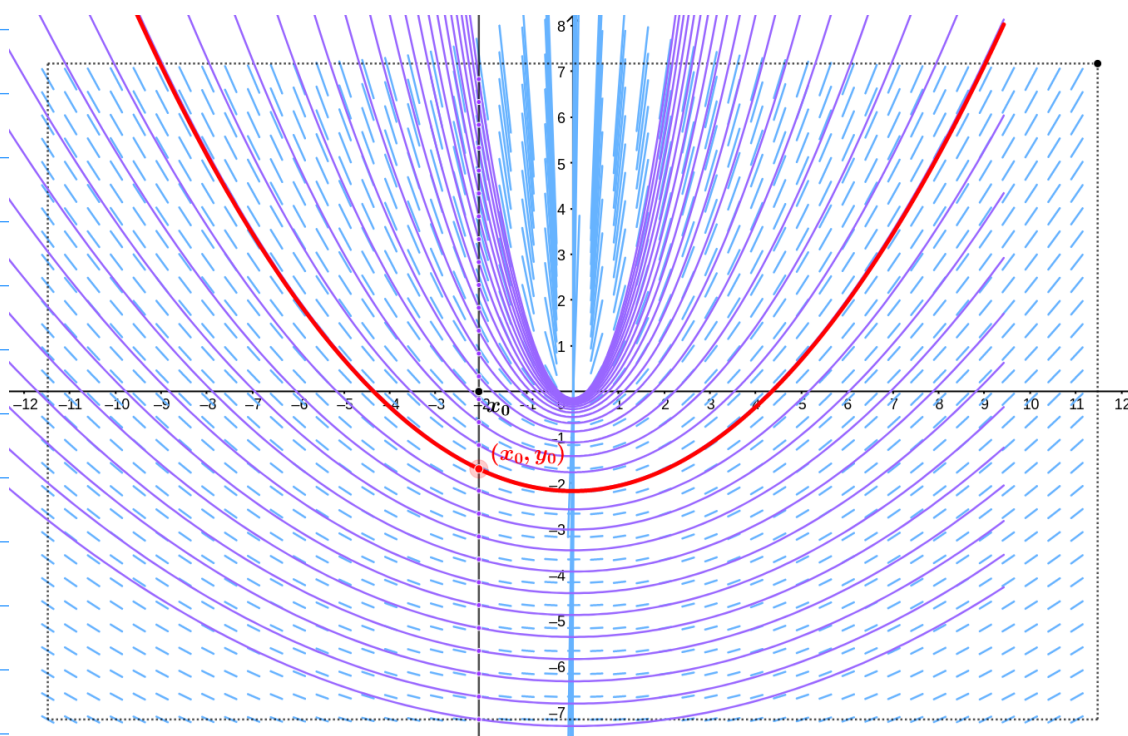
$$\Rightarrow \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \pm e^C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = A \cdot x \quad \parallel \cdot x$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{y^2 + x^2} = A \cdot x^2 \quad \xRightarrow{\text{schieben, Quadrieren}} (y - A x^2)^2 = y^2 + x^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{A^2 x^2 - 1}{2A}, \quad \text{quadratische Funktion} \Rightarrow \text{Parabel}$$



Themen: Lineare Differentialgleichungen, homogen und inhomogen, Lösungsverfahren, Variation der Konstanten, Beispiele

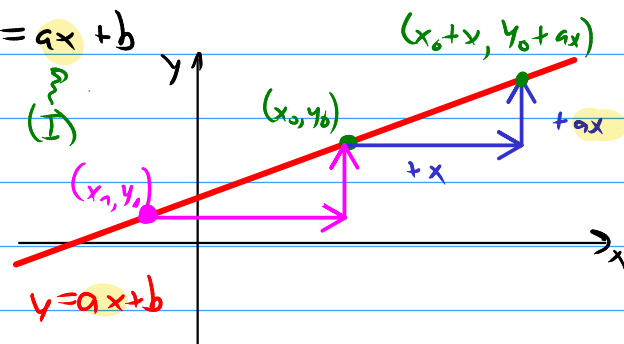
## VII.5 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Funktion:  $y(x) = a \cdot x + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

→ Lineare DGL 1. Ordnung:  $y'(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x),$   
 $p, q$  beliebige Funktionen in  $x$

Lösungen der linearen Gleichung  $y = ax + b$

- (1) Wenn  $(x_0, y_0)$  eine Lösung ist, dann ist auch  $(x_0, y_0) + (x, ax)$  eine Lösung



- (2) Wenn  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  Lösungen sind, ist  $(x_1, y_1) - (x_0, y_0)$  eine Lösung der Gleichung  $y = a \cdot x$  (H)  
 $\Rightarrow$  Jede Lösung kann wie in (1) geschrieben, sobald irgend eine grundlegende Lösung  $(x_0, y_0)$  bekannt ist.

Def: •  $q(x)$  ist der inhomogene Teil bzw. das Störglied der linearen Differentialgleichung (I)  $y' = p \cdot y + q$   
 •  $y'(x) = p(x) \cdot y(x)$  ist die zugehörige homogene DGL (H)

Behauptung 1: Wenn  $y_h$  eine Lösung von (H) ist und  $y_0$  eine Lösung von (I), dann ist auch  $y_0 + y_h$  eine Lösung von (I).

Beweis:  $(y_0 + y_h)' = y_0' + y_h' = \underbrace{p \cdot y_0 + q}_{= y_0'} + \underbrace{p \cdot y_h}_{= y_h'} = p \cdot (y_0 + y_h) + q \quad \checkmark \quad \square$

Behauptung 2: Sind  $y_0, y_1$  Lösungen von (I), dann ist  $y_1 - y_0$  eine Lösung von (H)

Beweis:  $(y_1 - y_0)' = y_1' - y_0' = p \cdot y_1 + q - p \cdot y_0 - q = p \cdot (y_1 - y_0) \quad \checkmark \quad \square$

Behauptung 1 & Behauptung 2:

Die allgemeine Lösung von (I) ist die Summe einer speziellen Lösung von (I) und der allgemeinen Lösung von (H).

Dabei spielt es keine Rolle, welche spezielle Lösung  $y_0$  gewählt wurde.

In Formeln:  $y_1 = y_0 + y_h$   
 (allg. Lsg. von (I)) (spez. Lsg. von (I)) (allg. Lsg. von (H))  
partikuläre Lsg homogene Lsg

Bsp:  $y' = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot y}_{= p(x)} + \underbrace{4x^2}_{= q(x)}$ ,

Lineare DGL 1. Ordnung

(H):  $y' = \frac{1}{x} \cdot y$ ,  
allg. Lsg. gesucht

(I)  $y' = \frac{y}{x} + 4x^2$ ,  
eine Lsg. gesucht

- Lösen von (H):  $y' = \frac{y}{x}$  ist separierbar

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow y = \pm x \cdot e^C = A \cdot x, A \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = A \cdot x \text{ ist die allg. Lsg. von (H)}$$

- Spezielle Lösung von (I):

Variante 1: Geschickter Ansatz, wähle  $y_0$  "ähnlich" wie  $\int q(x) dx$

Hier:  $q(x) = 4 \cdot x^2$ , Ansatz  $y_0(x) = B \cdot x^3$

$$\Rightarrow y_0' = \underbrace{3 \cdot B x^2}_{y_0' \text{ ausgerechnet}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\frac{B \cdot x^3}{x} + 4x^2}_{y_0 \text{ eingesetzt in (I)}} = (B+4) \cdot x^2$$

$$\Rightarrow 3B = (B+4) \Rightarrow B=2, \text{ d.h. } y_0(x) = 2x^3$$

Kontrolle:  $y_0' = 6x^2$ ,  $\frac{y_0}{x} + 4x^2 = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2 \quad \checkmark$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = y_0(x) + y_h(x) = 2x^3 + A \cdot x} \text{ ist die allg. Lsg. von } y' = \frac{y}{x} + 4x^2.$$

Was passiert, wenn man einen falschen Ansatz wählt?

Bsp:  $y_0 = C \cdot x^2$

$$\Rightarrow y_0' = 2 \cdot C \cdot x \stackrel{!}{=} \frac{C \cdot x^2}{x} + 4x^2 = C \cdot x + 4x^2$$

$$\Rightarrow \underline{C \cdot x = 4x^2} \Rightarrow C = 4x, \text{ keine Konstante}$$

$\Rightarrow$  keine Lösung!

## Variante 2: Verfahren von Lagrange, Variation der Konstante

$$y_h \text{ Lösung von (H)} \Rightarrow \frac{y_h'}{y_h} = p(x) \Rightarrow \ln|y_h| = \int p(x) dx$$

$$\Rightarrow y_h(x) = \pm e^{\int p(x) dx + C} = A \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Idee: Variiere  $A$  als Funktion in  $x$ , d.h.  $y_0 = \gamma(x) \cdot y_h(x)$  " $\gamma(x) = A(x)$ "

Was für eine Funktion muss dieses  $\gamma(x)$  sein?

$y_0'$  aus Ableitung:

$$y_0' = \gamma' \cdot y_h + \gamma \cdot y_h' \text{ löst (H)}$$

$$= \gamma' \cdot y_h + \gamma \cdot p \cdot y_h$$

$y_0$  löst (I)

$$y_0' = p \cdot y_0 + q$$

$$= p \cdot \gamma \cdot y_h + q$$

Finde  $\gamma$ , so dass diese Terme gleich sind!

$$\Rightarrow \gamma' \cdot y_h + \cancel{\gamma \cdot p \cdot y_h} = \cancel{p \cdot \gamma \cdot y_h} + q$$

$$\Rightarrow \gamma' = \frac{q}{y_h} \Rightarrow \gamma(x) = \int \frac{q(x)}{y_h(x)} dx$$

Bsp:  $y' = \frac{y}{x} + 1$  (I), zugehöriges (H):  $y' = \frac{y}{x}$  mit  $y_h = A \cdot x$ .

Variation der Konstanten:  $y_0(x) = \gamma(x) \cdot y_h(x) = \gamma(x) \cdot x$   
( $A$  in  $\gamma(x)$  versteckt)

$$y_0' = \gamma' \cdot x + \gamma \cdot 1$$

$$= \gamma' \cdot x + \cancel{\gamma} \quad \stackrel{!}{=} \quad \cancel{\gamma} + 1$$

$$\Rightarrow \gamma' = \frac{1}{x} \Rightarrow \gamma(x) = \ln|x|^{+C} \Rightarrow y_0(x) = \gamma(x) \cdot x = x \cdot \ln|x|^{+C}$$

+C ist hier egal, partikuläre Lösung da nur eine spezielle Lsg. benötigt wird

$$\Rightarrow y(x) = y_0(x) + y_h(x) = x \cdot \ln|x| + A \cdot x, \quad A \in \mathbb{R},$$

allgemeine Lösung von (I)

Bsp: Stromkreis mit Widerstand  $R$  und Selbstinduktion  $L$

Stromstärke  $I(t)$  bei (a)  $U = U_0$  konstant?

(b)  $U = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ , Wechselspannung?

Lineare DGL: (In)  $\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} \cdot I(t) + \frac{U}{L}$

$\Rightarrow$  (H)  $\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} \cdot I(t)$

$\Rightarrow I_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ , allg. Lsg. von (H)

(a)  $U = U_0$  konstant  $\Rightarrow$  Es muss eine konstante Lösung  $I_0(t) = K$  existieren

$\Rightarrow I_0' = 0 = -\frac{R}{L} \cdot K + \frac{U_0}{L} \Rightarrow K = \frac{U_0}{R} = I_0(t)$ , part. Lsg. von (In)

$\Rightarrow I(t) = I_0(t) + I_h(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ , allg. Lsg. von (In)

(b)  $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow$  (In):  $\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} \cdot I(t) + \frac{U_0 \cos(\omega t)}{L}$

(H) gleich wie vorher, d.h.  $I_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Neues Störglied:  $q(t) = \frac{U_0 \cos(\omega t)}{L}$ , trigonometrisch

Ansatz:  $I_0(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$

$\Rightarrow I_0'(t) = -a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)$

$\stackrel{!}{=} -\frac{R}{L} \cdot (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) + \frac{U_0}{L} \cdot \cos(\omega t)$

Finde  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass dies gilt!

Sinus-Terme:  $-a\omega = -\frac{R \cdot b}{L}$

Cosinus-Terme:  $b\omega = -\frac{R \cdot a}{L} + \frac{U_0}{L}$



→ 2x2 Gleichungssystem in a, b

$$\Rightarrow a = \frac{U_0 \cdot R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$b = \frac{U_0 \cdot \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\Rightarrow I_0(t) = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot (R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)), \text{ part. L\"os. von (1)}$$

$$\Rightarrow I(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + I_0(t)$$

$$\text{AWP: } I(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot R \Rightarrow C = -\frac{U_0 \cdot R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot (R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t) - R \cdot e^{-R/L \cdot t})$$

Analyse f\"ur  $t \rightarrow \infty$ :

- $I_h(t) \rightarrow 0$  verschwindet
- Nur die partikul\"are Lsg bestimmt das Langzeitverhalten, t gross

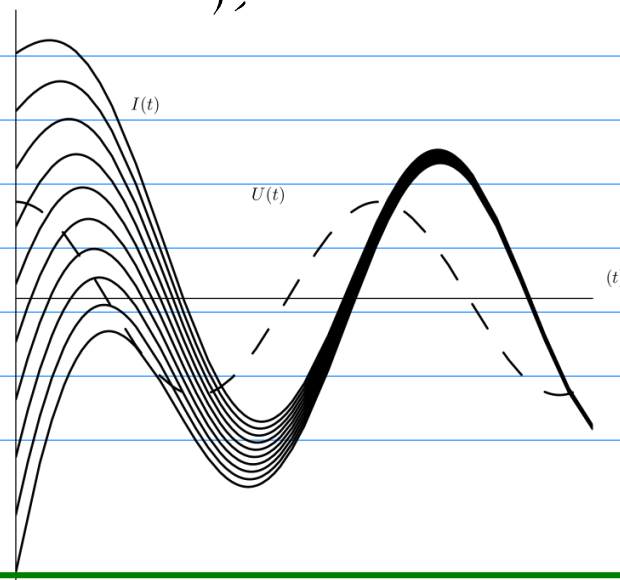
$$\begin{aligned} \text{Koeffizient von } \cos(\omega t) &= \left( - \right) \cdot R \\ \text{--- " --- von } \sin(\omega t) &= \left( - \right) \cdot \omega L \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt: } \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right)^2 + \left( \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow I(t) = C \cdot e^{-R/L \cdot t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\text{denn } \cos(\omega t - \alpha) = \cos(\omega t) \cos \alpha + \sin(\omega t) \sin \alpha$$

→  $I(t)$  schwingt wie  $U(t)$ ,  $U_0$   
jedoch mit Amplitude  $\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$   
und Phasenverschiebung  $\alpha$ ,  
wobei  $\tan \alpha = \omega L / R$ .



In VI.3 gesehen:

Ebene Vektorfelder $\vec{v}$	$\longleftrightarrow$	DGL 1. Ord.: $y' = \frac{v_2}{v_1}$
Feldlinien	$\longleftrightarrow$	Kurvenschar der allg. Lsg.
Richtung der Vektoren	$\longleftrightarrow$	Ableitung $adS(x_0, y_0)$

Hier: Potentialfelder & Niveaulinien

Gegeben  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$  Niveaulinien  $g(x, y) = C$   
 $\rightarrow$  Kurvenschar mit Parameter  $C$

Welche DGL beschreibt diese Kurvenschar?

$\leadsto$  Führt zu einer expliziten Beschreibung der Niveaulinien

Sei also  $g(x, y) = C$ , Setze  $y = y(x)$ , also  $g(x, y(x)) = C$

Ableiten nach  $x$ , verallg. Kettenregel:  $\Rightarrow g_x \cdot x_x + g_y \cdot y_x = 0$

$$\Rightarrow g_x \cdot 1 + g_y \cdot y' = 0$$

$\Rightarrow g_x(x, y) + g_y(x, y) \cdot y'(x) = 0$ , DGL 1. Ordnung  
mit allg. Lsg.  $\hat{=}$  Schar der Niveaulinien

$$\Rightarrow y'(x) = - \frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} =: f(x, y), \quad \text{falls } g_y(x, y) \neq 0.$$

Existenzsatz: Falls  $f = -g_x/g_y$  nach  $y$  partiell stetig diff'bar ist, dann gibt es für jeden Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  genau eine Lösung. Dafür muss  $g$  also 2x stetig diff'bar sein.

Bsp:  $g(x,y) = x^2 - y^2 \rightarrow$  Niveaulinien sind Hyperbeln,  
bekannt aus Kapitel IV

Explizite Herleitung via Differentialgleichungen:

$$y' = -g_x/g_y = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

Bestimmen der allg. Lsg:  $y \cdot y' = x$ , separierbar

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + C \quad \Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{x^2 + C}$$

↑  
abhängig vom AWP

Umkehrung: Gegeben  $\overbrace{\varphi(x,y)}^{=g_x} + \overbrace{\psi(x,y)}^{=g_y} \cdot y'(x) = 0$ ,  
gibt es dann ein  $g(x,y)$  mit  $g_x \equiv \varphi$ ,  $g_y \equiv \psi$ ?

Integrabilitätsbedingung: Ja, wenn  $\varphi_y \equiv \psi_x$

$\Rightarrow g$  kann über Methoden von Kapitel IV bestimmt werden.

Die Kurvenschar der DGL ist dann gerade die Schar der Niveaulinien von  $g$ .

Def: Eine DGL der Form  $\varphi(x,y) + \psi(x,y) \cdot y' = 0$  mit

$\varphi_y \equiv \psi_x$  ist **exakt**.

$\Rightarrow$  Die allg. Lösung lässt sich implizit als  $g(x,y) = C$  beschreiben.

Bsp: Gesucht: Lösung der DGL  $\underbrace{2x^2 - y^2 + y}_{=\varphi} - \underbrace{(2xy - x + 4y)}_{=\psi} \cdot y' = 0$   
mit  $y(1) = 2$ . "mit 0-"

- Nicht separierbar
- Kein offensichtlicher Ansatz für Substitution
- $\varphi_y = -2y + 1$ ,  $\psi_x = -2y + 1 \Rightarrow$  IB erfüllt, DGL exakt

$$g_x = 2x^2 - y^2 + y \Rightarrow g(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - y^2x + yx + u(y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_y &= -2xy + x + u'(y) \stackrel{!}{=} -2xy + x - 4y \\ \Rightarrow u'(y) &\stackrel{!}{=} -4y \quad \Rightarrow u(y) = -2y^2 + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2 + C,$$

beschreibt implizit die allg. Lsg. der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Awp: } y(1) &= 2 \Rightarrow g(1, 2) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + C = 0 \\ \Rightarrow \frac{2}{3} - 4 + 2 - 8 &= -C \\ \Rightarrow C &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle Lösung, implizit: } \underline{\underline{\frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2 + \frac{28}{3} = 0.}}$$

Bemerkung: Diese Gleichung lässt sich mit der quadratischen Lösungsformel sogar explizit nach  $y$  auflösen.

## Orthogonaltrajektorien

Gegeben  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Potential

→ Feldlinien von  $\text{grad} g$  stehen senkrecht auf den Niveaulinien von  $g$   
 Die Feldlinien von  $\text{grad} g$  bilden also die **Orthogonaltrajektorien** zur Schar der Niveaulinien von  $g$ , d.h. jeder Schnittwinkel der beiden Kurvenscharen beträgt  $90^\circ$ .

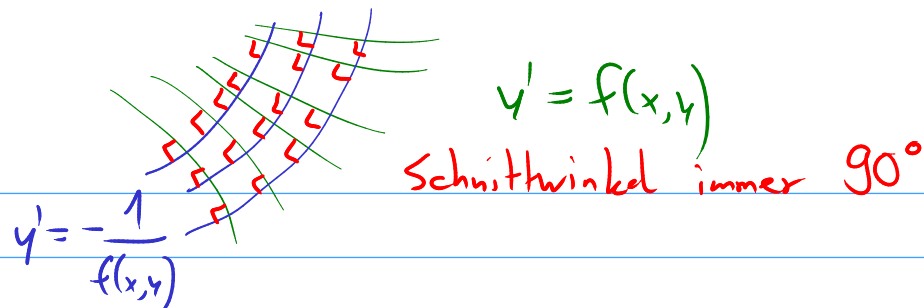
Sei  $y' = f(x, y)$  die DGL einer regulären Kurvenschar

→ Die eindeutige Lösung durch  $(x_0, y_0)$  hat an diesem Punkt die Steigung  $m = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

→ Steigung der Orthogonaltrajektorie durch diesen Punkt:  

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f(x_0, y_0)}$$

→ DGL der Schar der Orthogonaltrajektorien ist:  $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$



Bsp: Parabelschar  $y = Cx^2$ , Parameter  $C \in \mathbb{R}$ ,  
regulär ausserhalb  $(0,0)$

$\rightsquigarrow$  Niveaulinien von  $g(x, y) = C = y/x^2$  zur Visualisierung

Bestimmung der Orthogonaltrajektorien: Bestimme DGL aus Schargleichung

$$y(x) = Cx^2 \quad // \quad \frac{\partial}{\partial x} ( \quad ) \Rightarrow y' = 2 \cdot C \cdot x$$

$$\hookrightarrow C = y/x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{y'} = 2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot x = \underline{\frac{2y}{x} = f(x, y)}$$

$\Rightarrow$  DGL der Orthogonaltrajektorien:  $y' = -\frac{1}{f(x, y)} = -\frac{x}{2y}$ , separierbar

$$\Rightarrow \int y \, dy = \int -\frac{x}{2} \, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C, \text{ Ellipsen mit Halbachsen } 2\sqrt{C}, \sqrt{2C}$$

Bsp: Kurvenschar der Kreise mit Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse,  
die die  $x$ -Achse im Ursprung berühren

$$\begin{aligned} \text{Schargleichung: } x^2 + (y-C)^2 &= C^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2yC + \cancel{C^2} &= \cancel{C^2} \\ \Rightarrow \boxed{C = \frac{x^2 + y^2}{2y}} \end{aligned}$$

$$\text{DGL der Schar: } x^2 + (y-C)^2 = C^2 \quad // \quad \frac{\partial}{\partial x} ( \quad )$$

$$\Rightarrow 2x + 2 \cdot y \cdot y' - 2y' \cdot C = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y - 2C} = \frac{-2x}{2y - \frac{x^2 + y^2}{y}}$$

$$\Rightarrow \underline{y'} = - \frac{2xy}{2y^2 - x^2 - y^2} = \underline{\frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)}$$

DGL der Orthogonaltrajektorien:

$$y' = - \frac{1}{f(x, y)} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right)$$

Substitution:  $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$

$$\Rightarrow u + x \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot \left( u - \frac{1}{u} \right) \quad // -u \quad // : x$$

$$\Rightarrow u' = - \frac{1}{2} \cdot \frac{u + 1/u}{x} = - \frac{1}{x} \cdot \frac{u^2 + 1}{2u}, \text{ separierbar}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2u du}{u^2 + 1} = \int - \frac{dx}{x}$$

Abl. von  $u^2 + 1$

$$\Rightarrow \ln |u^2 + 1| = -\ln |x| + C$$

$$\Rightarrow u^2 + 1 = \underbrace{\pm e^C}_{=: A} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow u^2 + 1 = \frac{A}{x}$$

Rücksubstitution:

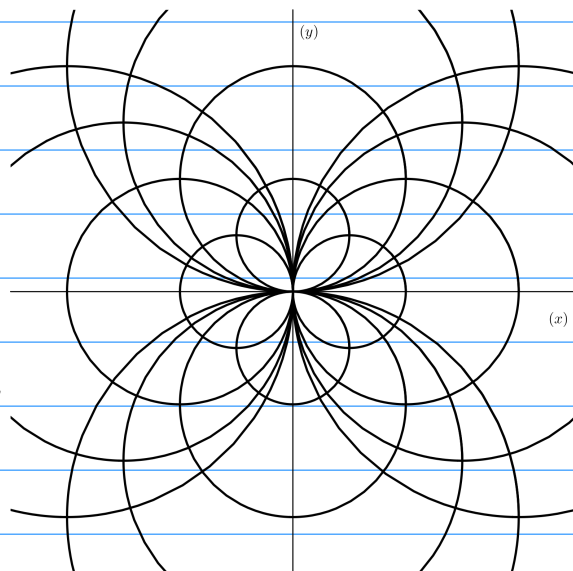
$$\left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 = \frac{A}{x} \quad // \cdot x^2$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = Ax$$

$$\Rightarrow x^2 - Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 = \frac{A^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left( x - \frac{A}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{A^2}{4}$$

Kreise mit Mittelpunkt auf x-Achse,  
berühren y-Achse im Ursprung  
da Mittelpunkt  $\hat{=}$  Radius



## VII.7: Enveloppen, singuläre Lösungen, Clairaut'sche Differentialgleichungen

Behauptung: Aus der Menge der Tangenten an eine Kurve bzw. an den Graph einer Funktion lässt sich die Kurve/Funktion rekonstruieren.

Bsp:

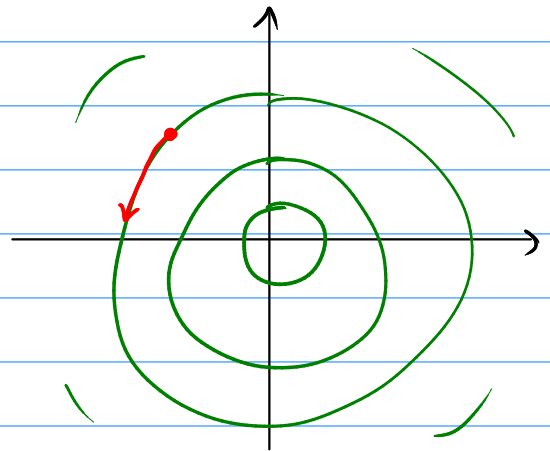


Wie lautet die Gleichung der **Envelope / Hüllkurve**?

Def: Für eine Kurvenschar ist die Envelope diejenige Kurve  $K$ , welche an jedem ihrer Punkte tangential zur Kurvenschar liegt.

Bemerkung: Existiert nicht immer, Bsp: Konzentrische Kreise:

Die einzige Möglichkeit, tangential zu folgen, ist, einer Kurve der Schar selbst zu folgen  
 $\Rightarrow$  Nicht, was wir hier suchen!



Sei die Kurvenschar beschrieben durch  $y' = f(x, y)$  und  $E$  die zugehörige Envelope  
 $\Rightarrow E$  ist ebenfalls eine Lösung von  $y' = f(x, y)$ ,  
 die **singuläre Lösung**.

Enveloppen existieren in der Regel nur für nicht-reguläre Kurvenscharen, d.h.  $y' = f(x, y)$  erfüllt den Existenzsatz nicht.  
 An jedem Punkt von  $E$  gibt es ja auch die Kurve der ursprünglichen Schar mit der gleichen Ableitung.

## Bestimmen der Envelope

Sei die Kurvenschar gegeben durch  $F(x, y, C) = 0$

Scharparameter

Sei  $(x(C), y(C))$  der Punkt, wo die Envelope die Kurve mit Parameter  $C$  berührt.

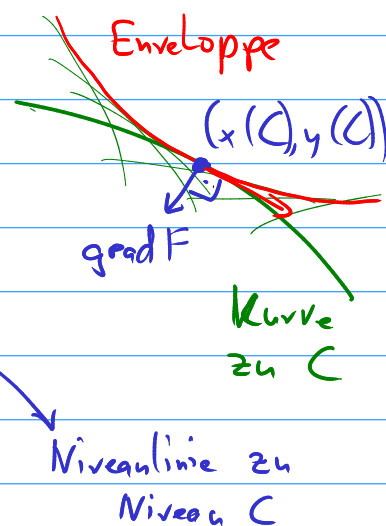
⇒ Parameterdarstellung der Envelope  $E$ :

$$C \mapsto (x(C), y(C))$$

Es muss gelten:  $F(x(C), y(C), C) = 0$

Berührung ist tangential in  $(x(C), y(C))$ :

$$\underbrace{\frac{\dot{y}(C)}{\dot{x}(C)}}_{\text{Steigung von } E} = - \underbrace{\frac{F_x(x(C), y(C), C)}{F_y(x(C), y(C), C)}}_{\text{Steigung der Niveaulinie, senkrecht zu grad } F}$$



$$\Rightarrow F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = 0 \quad (\text{durch Umstellen})$$

Verallgemeinerte Kettenregel für  $F$  nach  $C$ :  $F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_C \cdot \frac{dC}{dC} = 0$

⇒ Es muss  $F_C \equiv 0$  gelten!

Zur Bestimmung der Envelope stellt man die Funktion  $F(x, y, C)$  auf und löst das System: 
$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Dabei eliminiert man  $C$ .



Bsp: Wurf eines Massepunkts mit Geschwindigkeit  $v_0$  und variablem Wurfwinkel  $\alpha$ .

Wie sieht die Enveloppe aus, wenn  $\alpha$  alle Winkel durchläuft?

Wurfbahn für gegebenes  $\alpha$ :  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}$

Gleichung der Kurvenschar aufstellen:  $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$

$$\Rightarrow \underline{y} = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{h x^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow F(x, y, \alpha) := y - x \tan \alpha + \frac{h x^2}{\cos^2 \alpha} \stackrel{!}{=} 0, \text{ Schargleichung, Parameter } \alpha.$$

$$\Rightarrow F_\alpha(x, y, \alpha) = -\frac{x}{\cos^2 \alpha} + h x^2 \cdot (+2) \cdot (+\sin \alpha) \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos^2 \alpha} \left( -1 + \frac{2 h x \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{2 h x}, \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{(2 h x)^2}$$

$$\Rightarrow F(x, y, \alpha) = y - \frac{x}{2 h x} + h x^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{(2 h x)^2} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2 h} + h x^2 + \frac{1}{4 h} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = -h x^2 + \frac{1}{4 h}} \text{ mit } h = \frac{g}{2 v_0^2} \text{ ist die Gleichung der Enveloppe, eine Parabel.}$$

Bsp: Schar von Geraden mit Steigung =  $C$ , dem Scharparameter

$$\Rightarrow y = \underline{C} \cdot x + \underline{g(C)}$$

Steigung  $\rightarrow$   $y$ -Achsenabschnitt der Gerade mit Steigung  $C$

$$\Rightarrow F(x, y, C) = y - Cx - g(C) \stackrel{!}{=} 0, \text{ Schargleichung}$$

$$\Rightarrow F_C(x, y, C) = -x - g'(C) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -g'(C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -C \cdot g'(C) + g(C), \end{cases}$$

Parametrisierung der Enveloppe

DGL der Geradenschar herleiten:

$$y = Cx + g(C) \Rightarrow y' = C \text{ gemäss Ableitung nach } x$$

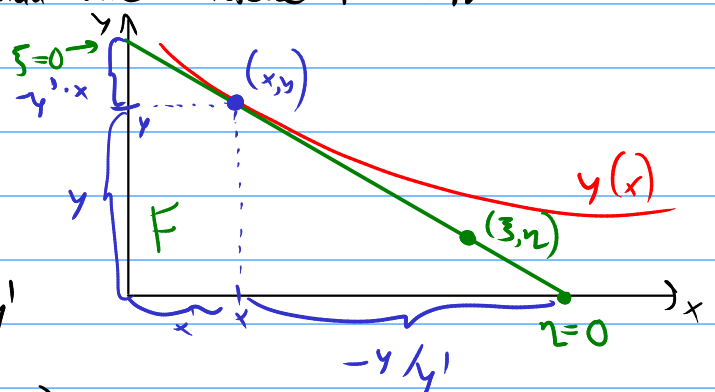
Eingesetzt in  $y$ :  $y = y' \cdot x + g(y')$ , Clairaut'sche DGL

Lösungen sind Geraden und die singuläre Lösung sowie Kombinationen davon.

Bsp: Sei  $F > 0$  gegeben. Gesucht ist eine Funktion  $y(x) > 0$ , so dass das Dreieck zwischen  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und der Tangente an  $y(x)$  für jedes  $x$  genau die Fläche  $F$  hat.

Tangente adS  $(x, y(x))$   
 $(\eta - y) = y'(x) \cdot (\xi - x)$

Achsenabschnitte:  $x - \frac{y}{y'}$ ,  $y - x \cdot y'$



$$\rightarrow F = \frac{1}{2} \cdot \left( x - \frac{y}{y'} \right) \cdot (y - x \cdot y')$$

$$= \frac{1}{2} \left( xy - \frac{y^2}{y'} - x^2 \cdot y' + xy \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{y^2}{y'} + 2xy - y' \cdot x^2 \right)$$

Umformen Richtung Clairaut, denn unsere Schar besteht aus Geraden

$$y = y' \cdot x + g(y')$$

→ Auflösen nach  $y$ : //  $\cdot 2y'$ , alles nach links schieben

$$y^2 - 2xy \cdot y' + (y'x)^2 + 2F y' = 0, \text{ quadratisch in } y$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{2xy' \pm \sqrt{4x^2(y')^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y'x)^2 + 2F y'}}{2}$$

$$= \underbrace{x \cdot y'}_{<0} \pm \sqrt{-2F y'}$$

$>0$ , da  $y' < 0$ , sonst gibts kein Dreieck!  
 $y$  muss positiv werden!

$$\Rightarrow y(x) = x \cdot y' + \underbrace{\sqrt{-2F y'}}_{=: g(y')}, \text{ Clairaut'sche DGL}$$

Allgemeine Lösung Setze  $y' = C$  ein  $\Rightarrow$  Parameter  $C$

$$\Rightarrow y = C \cdot x + \sqrt{-2FC}, \text{ Schargleichung}$$

Envelope der Schar ist das gesuchte  $y(x)$ !

$$\text{D.h.: Ableitung nach } C: \quad 0 = x - \frac{2F}{2} / \sqrt{-2FC}$$

$$\Rightarrow x = \frac{F}{\sqrt{-2FC}} \Rightarrow C = \left(\frac{F}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{-2F} = -\frac{F}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x)}} = -\frac{F}{2x^2} \cdot x + \sqrt{+2F \cdot \frac{F}{2x^2}} = -\frac{F}{2x} + \frac{F}{x} = \underline{\underline{\frac{F}{2x}}}$$

Themen: DGL Höherer Ordnung, Existenzsatz, n-parametrische Kurvenschar

## VII.8 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine DGL n. Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Annahme: Diese Gleichung ist nach  $y^{(n)}$  auflösbar, d.h. es gibt ein  $f$  mit  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

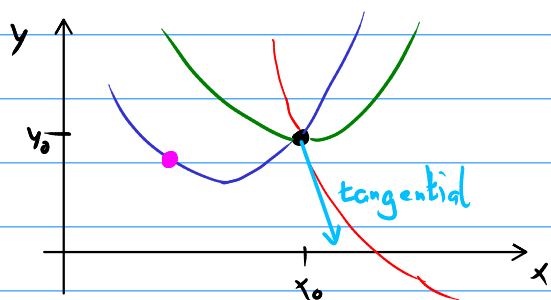
Bsp:  $y'' = a \in \mathbb{R}$ , DGL 2. Ordnung

2 mal integrieren  $\Rightarrow y(x) = \frac{a}{2} x^2 + C_1 x + C_2$

$\Rightarrow$  Allgemeine Lösung besteht aus Parabeln mit gleichen Öffnungsparameter, mit 2 weiteren Scharparametern  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Anfangsbedingung:  $y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{a}{2} x_0^2 + C_1 x_0 + C_2$

Diese Gleichung ist noch nicht eindeutig lösbar, sondern gibt nur eine Abhängigkeit zwischen  $C_1$  und  $C_2$ .



$\Rightarrow$  Parabeln mit gleicher Öffnung und  $y(x_0) = y_0$ , können aber verschoben sein.

Wie erhält man eindeutige Lösungen?

- Einen weiteren Punkt  $y(x_1) = y_1$  festlegen
- Ableitung beim Anfangswert definieren:  $y'(x_0) = y_1$

Meistens hat man mehr Daten zur Ableitung, nicht weitere Punkte.

D.h.: Zweiter Anfangswert  $y'(x_0) = y_1 = a x_0 + C_1$

$\Rightarrow$  Gleichungssystem  $\begin{cases} y_0 = \frac{a}{2} x_0^2 + C_1 x_0 + C_2 \\ y_1 = a x_0 + C_1 \end{cases}$  in  $C_1, C_2 \Rightarrow$  eindeutige Lösung  $(C_1, C_2)$

Existenzsatz: Die DGL  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  hat zu vorgegebenen  $x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$  eine eindeutige Lösung,

$$\begin{array}{l} y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}$$

wenn  $f$  stetig ist und nach  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  stetig diff'bar ist.

⇒ Die allgemeine Lösung mit fixiertem  $x_0$  ist eine  $n$ -parametrische reguläre Kurvenschar mit Parametern  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ .

Def: Eine  $n$ -parametrische Kurvenschar ist **regulär**, wenn für jedes  $x_0$  jedes AWP  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  eine eindeutige Lösung hat, d.h. es gibt genau eine Kurve in der Schar, die dies erfüllt.

Für  $n \geq 2$  gibt es keine anschauliche Darstellung wie das Richtungsfeld oder sich nicht schneidende Kurvenscharen.

Aber auch hier gilt: Zu einer  $n$ -parametrischen, regulären Kurvenschar gibt es eine zugehörige DGL der Ordnung  $n$ .

Bsp: Harmonische Schwingung: Für ein fixes  $\omega \neq 0$  sei  $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

2 Parameter, sieht regulär aus  $\rightarrow$  DGL 2. Ordnung?

Seien also  $x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_1$  gegeben

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = C_1 \cos(\omega x_0) + C_2 \sin(\omega x_0) \\ y_1 = -C_1 \omega \sin(\omega x_0) + C_2 \omega \cos(\omega x_0) \end{cases},$$

lineares Gleichungssystem in  $C_1, C_2$

Das System hat eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\omega x_0) & \sin(\omega x_0) \\ -\omega \sin(\omega x_0) & \omega \cos(\omega x_0) \end{pmatrix} = \omega \cdot \cos^2(\omega x_0) + \omega \sin^2(\omega x_0) \\ = \omega \neq 0, \text{ erfüllt}$$

⇒ Für jede Wahl von  $(y_0, y_1)$  gibt es ein eindeutiges Paar  $(C_1, C_2)$ , die das Gleichungssystem lösen

⇒ Eindeutige spezielle Lösungen, Schar ist regulär.

Aber zu welcher DGL?

$$y'(x) = -C_1 \omega \sin(\omega x) + C_2 \omega \cos(\omega x) \\ y''(x) = -C_1 \omega^2 \cos(\omega x) - C_2 \omega^2 \sin(\omega x) = -\omega^2 y(x)$$

⇒  $y'' + \omega^2 y = 0$ , DGL 2. Ordnung

Reguläre Kurvenschar als Lösung ⇒ Existenzsatz gilt, d.h. alle Lösungen haben die Form  $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ .

Bemerkung:  $y(x) = A \cdot \cos(\omega x - \alpha)$  erfüllt diese DGL auch. Dies ist kein Widerspruch zum Existenz, da  $y(x)$  durch Additionstheoreme in die passende Form gebracht werden kann.

Bestimmung der DGL zu einer n-parametrischen Schar:

- Berechne die ersten  $n$  Ableitungen  $y', y'', \dots, y^{(n)}$   
 ↳  $n+1$  Gleichung in  $n$  Parameter  $C_1, \dots, C_n$
- Eliminiere  $C_1, C_2, \dots, C_n$   
 ↳ Übrig bleibt eine Gleichung, in  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , also eine DGL  $n$ . Ordnung.

Bsp: (I)  $y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x)$ , 3 Parameter  $C_1, C_2, C_3$

$$(II) \quad y'(x) = -C_1 C_3 \sin(C_3 x) + C_2 C_3 \cos(C_3 x)$$

$$(III) \quad y''(x) = -C_1 C_3^2 \cos(C_3 x) - C_2 C_3^2 \sin(C_3 x) \stackrel{(I)}{=} -C_3^2 \cdot y$$

$$(IV) \quad y'''(x) = C_1 C_3^3 \sin(C_3 x) - C_2 C_3^3 \cos(C_3 x) \stackrel{(II)}{=} -C_3^2 y'$$

$$\left[ \frac{y''}{y} = -C_3^2 = \frac{y'''}{y'} \right] \quad \text{nach } -C_3^2 \text{ auflösen}$$

$\parallel \cdot y \parallel \cdot y' \parallel -y \cdot y''$

$\Rightarrow y'' \cdot y' - y''' \cdot y = 0$ , eine DGL 3. Ordnung  
mit allg. Lsg:  $y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x)$

Beispiel: Biegung eines prismatischen Balkens  
(Querschnitt überall gleich, senkrecht zur Grundfläche)

$y(x) \triangleq$  Biegelinie

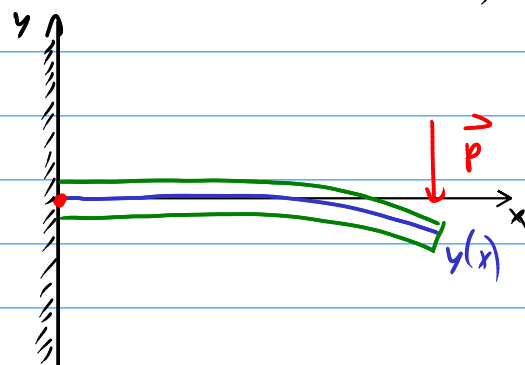
Elastizitätsmodul

Krümmung

Mechanik:  $M(x) = E \cdot J \cdot k(x)$

Biegemoment

↑  
axiales Flächen-  
trägheitsmoment  
der Querschnittsfläche



$\Rightarrow$  Krümmung  $k(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{E \cdot J}$ , DGL 2. Ordnung

Anfangswerte:  $y(0) = 0, y'(0) = 0$

Problem:  $(1+y'^2)^{3/2}$  macht die DGL echt kompliziert!

Mögliche Lösung: Linearisieren:  
um  $y' = 0$

$$g(y') = (1+y'^2)^{3/2} \approx g(0) + g'(0) \cdot y' = 1 + 0 \cdot y' = 1$$

⇒ Ersetze  $(1+y'^2)^{3/2}$  mit 1 und löse neu:  $y'' = \frac{M(x)}{E \cdot J}$

Weitere Annahme: Belastung  $P$  an Balkenende ⇒ Eigen gewicht

⇒  $M(x) = -(\overset{\text{Balkenlänge}}{L-x}) \cdot P$ , proportional zu Abstand und Belastung

$$\Rightarrow y'' = -\frac{(L-x) \cdot P}{E \cdot J}$$

Lösen durch 2 mal integrieren:  $y' = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(-Lx + \frac{x^2}{2} + C_1\right)$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(-\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right)$$

allg. Lsg. der linearisierten DGL

$$\text{AWP: } \left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{spezielle Lösung des AWP: } \underline{\underline{y(x) = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{x}{3} - L\right)}}$$

Interessanter Punkt:  $x=L$ , Balkenende

$$\Rightarrow y(L) = -\frac{P}{E \cdot J} \cdot \frac{L^3}{3}, \text{ in dritter Potenz der Länge } L.$$

Offene Fragen: • Wie gut stimmt die approximierte Lösung mit der Realität überein?

• Wann darf/soll man Linearisieren?

• Was passiert mit dem Existenzsatz bei einer anderen Wahl der Anfangswerte z.B.  $y(0) = y(L) = 2$ ?



## VII.9 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Allgemeine Annahme:  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ , DGL Ordnung  $n$   
 Bekannt:  $y' = p(x) \cdot y + q(x)$ , Lineare DGL 1. Ordnung

Def: Eine **Lineare DGL der Ordnung  $n$**  ist eine Gleichung der Form

$$(I) \quad y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x) \cdot y'(x) + p_0(x) \cdot y(x) = q(x)$$

$$(H) \quad \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} + \text{---} = \underline{\underline{0}}$$

D.h.  **$f$**  ist linear in  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  (als Symbole betrachtet!), aber die Koeffizienten dürfen von  $x$  abhängen.

Die Gleichung (I) ist **inhomogen**, wenn das **Störglied  $q(x) \neq 0$**  ist. Durch Setzen von  $q(x) = 0$  erhält man die **homogene DGL (H)**.

Analog zu  $n=1$  gilt:  $\underbrace{y(x)}_{\substack{\text{allg. Lsg.} \\ \text{von (I)}}} = \underbrace{y_h(x)}_{\substack{\text{allg. Lsg.} \\ \text{von (H)}}} + \underbrace{y_0(x)}_{\substack{\text{partikuläre Lsg.} \\ \text{eine spezielle Lsg. von (I)}}}$

Der Existenzsatz gilt für (H) und (I), wenn alle  $p_0, \dots, p_{n-1}$  bzw auch  $q$  stetige Funktionen in  $x$  sind.

(a) Homogene Lineare DGL (H), allg. Lösung

Satz 9.1: **Linear kombinationen von Lösungen** von (H) sind ebenfalls Lösungen von (H)

Satz 9.2: Sind  **$y_1, \dots, y_n$**   $n$  linear unabhängige Lösungen von (H), dann ist  **$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n \cdot y_n(x)$**  die allgemeine Lösung von (H) mit  $n$  Parametern  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ .

Beweis 9.1: Einsetzen!

Beweis 9.2: Skript &amp; LA II

→ Die Lösungen von (4) sind ein Vektorraum der Dimension  $n$ .

Bsp:  $y'' + 2y' + y = 0$ , homogen, linear,  $n=2$ .

•  $y_1(x) = e^{-x}$  erfüllt  $y_1' = -e^{-x}$ ,  $y_1'' = e^{-x}$   
 $\Rightarrow y_1'' + 2y_1' + y_1 = e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = \underline{0} \quad \checkmark$

•  $y_2(x) = x e^{-x}$  erfüllt  $y_2' = e^{-x} - x e^{-x}$ ,  $y_2'' = -2e^{-x} + x e^{-x}$

$\Rightarrow y_2'' + 2y_2' + y_2 = \cancel{-2e^{-x}} + \cancel{2x e^{-x}} + \cancel{2e^{-x}} - \cancel{2x e^{-x}} + x e^{-x} = \underline{0} \quad \checkmark$

→  $y_1$  und  $y_2$  lösen die DGL <sup>9.1</sup>  $\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$  löst die DGL auch.

$y_1$  und  $y_2$  sind linear unabhängig, da  $A \cdot y_1 + B \cdot y_2 \equiv 0$  als Funktion nur mit  $A=B=0$  möglich ist  $\Rightarrow$  Satz 9.2 gilt

→  $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$  ist die allgemeine Lösung der DGL.

Existenzsatz: Gilt. Für  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_1$ , gibt es eine eindeutige Lösung.  
*↳ Vorsicht, ein Anfangswert, nicht die Funktion  $y_1(x)$*

Awp:  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 3$

$$y'(x) = -C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-x} - C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$y(0) = -1 = C_1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = \underline{-1}$$

$$y'(0) = 3 = -C_1 + C_2 - \cancel{C_2 \cdot 0} \Rightarrow C_2 = 3 + C_1 = \underline{2}$$

→ Spezielle Lösung:  $y(x) = e^{-x} \cdot (2x - 1)$

$$\text{Bsp: } y'' + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{=p_1(x)} \cdot y' - \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=p_0(x)} \cdot y = 0, \text{ linear, homogen, } n=2$$

Vermutung aus Applet:  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = e^x$

$$\cdot y_1'(x) = 1, y_1''(x) = 0 \Rightarrow y_1'' + \frac{x}{1-x} \cdot y_1'(x) - \frac{1}{1-x} \cdot y_1(x) = \underline{0} \checkmark$$

$$\cdot y_2'(x) = e^x, y_2''(x) = e^x \Rightarrow y_2'' + \frac{x}{1-x} y_2'(x) - \frac{1}{1-x} y_2(x) = e^x \cdot \left( \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right) = \underline{0} \checkmark$$

$\Rightarrow y_1$  und  $y_2$  sind Lösungen der DGL und ausserdem linear unabhängig  $\Rightarrow \underline{y(x) = C_1 x + C_2 e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$  ist die allg. Lsg.

Bemerkungen: • Für  $n=1$  konnte die erste Lösung  $y_1(x)$  durch Separation der Variablen bestimmt werden.

Klappt für  $n \geq 2$  nicht mehr.

• In VII.10 werden wir 2 Typen von homogenen, linearen DGL betrachten, deren Lösungen leicht zu finden sind.

• Die DGL  $y'' + x \cdot y = 0$  hat keine elementare Lösung. Mit Potenzreihen geht's trotzdem  $\Rightarrow$  VII.5

(b) Inhomogene lineare DGL (I), spezielle Lösung

Ziel: Finde eine partikuläre Lösung  $y_0$

Variante 1: Geschickter Ansatz: Wähle  $y_0$  ähnlich wie  $\int g(x) dx$

$$\text{Bsp: } y'' + 2y' + y = \sin(3x) \quad (\text{I})$$

$$\Rightarrow (\text{H}): y'' + 2y' + y = 0$$

$$\text{Allg. Lsg. von (H): } y_h(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$\text{Ansatz für } y_0: \quad q(x) = \sin(3x) \Rightarrow y_0(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$$

$$y_0' = -3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)$$

$$y_0'' = -9A \cos(3x) - 9B \sin(3x)$$

$$\Rightarrow y_0'' + 2y_0' + y_0 = \cos(3x) \cdot (-9A + 6B + A) + \sin(3x) \cdot (-9B - 6A + B) \stackrel{!}{=} \sin(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \cos(3x) \text{-Anteil:} \\ \sin(3x) \text{-Anteil:} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -8A + 6B = 0 \\ -8B - 6A = 1 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow A = -\frac{3}{50}, \quad B = -\frac{4}{50}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -\frac{1}{50} \cdot (3 \cos(3x) + 4 \sin(3x)),$$

partikuläre Lösung von (I).

Jetzt: Überprüfen durch Einsetzen!

$$\Rightarrow \text{Allg. Lsg. von (I): } \underline{\underline{y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} - \frac{1}{50} (3 \cos(3x) + 4 \sin(3x))}}$$

$$\text{Bsp: } y'' + \omega^2 y = P \cdot \cos(\omega x), \quad P, \omega > 0$$

$$\text{Homogene Lösung: } y_h(x) = C_1 \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x)$$

$$q(x) = P \cdot \cos(\omega x) \Rightarrow \text{Ansatz } y_0(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Dieses  $y_0$  löst (H) und kann damit niemals auch (I) lösen.

2. Ansatz:  $y_0(x) = A \cdot x^n$

$$\Rightarrow y_0' = n \cdot A \cdot x^{n-1}, \quad y_0'' = n \cdot (n-1) \cdot A \cdot x^{n-2}$$

$$\Rightarrow y_0'' + \omega^2 y = A \cdot (n \cdot (n-1) + \omega^2 x^2) \cdot x^{n-2} \stackrel{!}{=} P \cdot \cos(\omega x)$$

$\leadsto$  Es gibt keine  $A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$ , die das allgemein erfüllen

Variante 2: Variation der Konstanten

Hier:  $n=2$ , geht aber auch mit grösserem  $n$ .

DGL:  $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$

Allg. Lsg. von (H) sei bekannt:  $y_h(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$

Ansatz: Variiere  $C_1, C_2$  mit  $x$ , d.h. verwende  $y_0 = \gamma_1 \cdot y_1 + \gamma_2 \cdot y_2$  mit Funktionen  $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$

Ableiten, Einsetzen in (I), (H) verwenden  $\Rightarrow \gamma_1' \cdot y_1 + \gamma_2' \cdot y_2 = q(x)$

Trick: Gehe davon aus, dass  $\gamma_1' \cdot y_1 + \gamma_2' \cdot y_2 = 0$  gilt.

Dies schränkt die Möglichkeiten für  $\gamma_1, \gamma_2$  ein, aber wir benötigen ja nur eine partikuläre Lösung.

Bsp:  $y'' + \omega^2 y = P \cdot \cos(\omega x)$

Bekannt:  $y_h(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

Ansatz:  $y_0(x) = \gamma_1(x) \cdot \cos(\omega x) + \gamma_2(x) \cdot \sin(\omega x)$

Annahme:  $\gamma_1'(x) \cdot \cos(\omega x) + \gamma_2'(x) \cdot \sin(\omega x) = 0$

Gemäss Rechnung:  $-\gamma_1'(x) \cdot \omega \sin(\omega x) + \gamma_2'(x) \cdot \omega \cdot \cos(\omega x) = P \cdot \cos(\omega x)$

Löse dieses System nach  $\gamma_1, \gamma_2$ !

$$\square \Rightarrow \gamma_1' = -\gamma_2' \cdot \frac{\sin(\omega x)}{\cos(\omega x)}$$

Einsetzen in  $\square$ :  $\gamma_2' \cdot \omega \cdot \frac{\sin^2(\omega x)}{\cos(\omega x)} + \gamma_2' \cdot \omega \cdot \cos^2(\omega x) = P \cdot \cos^2(\omega x)$   
 $\parallel \cdot \cos$

$$\Rightarrow \gamma_2' \cdot \omega = P \cdot \cos^2(\omega x)$$

$$\Rightarrow \gamma_2' = \frac{P}{\omega} \cos^2(\omega x)$$

$$\Rightarrow \gamma_1' = -\frac{P}{\omega} \cos(\omega x) \cdot \sin(\omega x)$$

$$\Rightarrow \gamma_1(x) = -\frac{P}{2\omega^2} \sin^2(\omega x), \quad \gamma_2(x) = \frac{P}{2\omega^2} (\omega x + \cos(\omega x) \sin(\omega x))$$

$\swarrow$  immer ABL

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_0 &= \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = \underbrace{-\frac{P}{2\omega^2} \sin^2(\omega x)}_{=\gamma_1} \underbrace{\cos(\omega x)}_{=y_1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{P}{2\omega^2} \cdot (\omega x + \cos(\omega x) \sin(\omega x))}_{=\gamma_2} \underbrace{\sin(\omega x)}_{=y_2} \\ &= \frac{P}{2\omega} \cdot \underline{x} \cdot \sin(\omega x), \quad \text{partikuläre Lsg. von (I)} \end{aligned}$$

Jetzt: Prüfen, ob  $y_0$  wirklich (I) löst!

Themen: Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, charakteristisches Polynom, Euler'sche Differentialgleichung, Indexpolynom, Schwingungsprobleme

## VII.10 Zwei Klassen von leicht lösbaren Differentialgleichungen

### (a) Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\text{DGL: } y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R},$$

ist eine **homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten**.

Ansatz:  $y(x) = e^{\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha$  noch zu bestimmen

$$\Rightarrow y^{(k)} = \alpha^k \cdot e^{\alpha x}$$

Einsetzen:  $e^{\alpha x} \cdot (\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0) = 0$   
 Muss für alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten  $\Rightarrow P(\alpha) = 0$  muss erfüllt sein, damit  
 $y(x) = e^{\alpha x}$  eine Lösung der DGL ist. Falls hingegen  $P(\alpha) \neq 0$ , dann  
 ist  $y(x) = e^{\alpha x}$  sicher keine Lösung.

Bsp:  $y''' - 2y'' - 3y' = 0$  (d.h.  $n=3, a_2=-2, a_1=-3, a_0=0$ )

$$\Rightarrow P(\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha = \alpha \cdot (\alpha^2 - 2\alpha - 3) \\ = \alpha \cdot (\alpha - 3) \cdot (\alpha + 1)$$

$\Rightarrow P(\alpha)$  hat die Nullstellen  $\alpha_1=0, \alpha_2=3, \alpha_3=-1$ .

$\Rightarrow y_1(x) = e^{\alpha_1 x} = 1, y_2(x) = e^{\alpha_2 x} = e^{3x}, y_3(x) = e^{\alpha_3 x} = e^{-x}$   
 sind Lösungen der homogenen linearen DGL.

• Satz 9.2: Die allg. Lösung ist eine Linearkombination von 3 linear unabhängigen Lösungen der DGL.

•  $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$  sind  $n$  linear unabhängige Funktionen, falls  $\alpha_i \neq \alpha_j$  für alle  $i \neq j$  gilt.

$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3 = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} + C_3 e^{-x}$  ist die allgemeine Lösung der DGL.

Def: Das Polynom  $P(\alpha)$  ist das **charakteristische Polynom** der DGL.

Solange  $P(\alpha)$  nur einfache, reelle Nullstellen hat, kann man auf diese Weise alle DGL dieser Form lösen.

•  $\alpha$  komplex: (Bsp:  $P(\alpha) = \alpha^2 + 1 \Rightarrow \alpha = \pm i$ )

Sei  $\alpha = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} \cdot (\cos(bx) + i \sin(bx))$$

Diese  $y(x)$  löst die DGL, aber  $y(x)$  ist komplex.

Wenn aber  $y(x)$  die DGL löst, dann lösen auch  $\operatorname{Re}(y(x))$  und  $\operatorname{Im}(y(x))$  ebenfalls die DGL.

⇒ Lösungen  $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(bx)$ ,  $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin(bx)$   
(eine zu viel?)

Wenn  $\alpha$  eine Nullstelle von  $P(\alpha)$  ist, dann ist auch  $\bar{\alpha}$  eine Nullstelle von  $P(\alpha)$ , da  $P(\alpha)$  ein reelles Polynom ist.

Die Nullstelle  $P(\bar{\alpha})$  erzeugt linear abhängige Lösungen und keine neuen ⇒ Die zwei Nullstellen  $\alpha, \bar{\alpha}$  ergeben zwei linear unabh. Lösungen.  
 $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(bx)$ ,  $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(bx)$ .

•  $\alpha$  mehrfache Nullstelle, Vielfachheit  $k$ .

⇒ Lösung  $y(x) = e^{\alpha x}$ .

Weitere Lösungen über Variation der Konstanten:  $y(x) = f(x) \cdot e^{\alpha x}$

⇒  $f(x)$  ist ein Polynom vom Grad  $k-1$ ,

$$\text{d.h. } y(x) = e^{\alpha x} \cdot (\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{k-1} x^{k-1}),$$

eine Linearkombination der Lösungen

$$y_1(x) = e^{\alpha x}, y_2(x) = x e^{\alpha x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\alpha x},$$

alle linear unabhängig.

Bsp:  $y'' - 2y' + y = 0$  mit  $P(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$ ,  
d.h. doppelte Nullstelle  $\alpha = 1$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^x \quad \checkmark$$

$$y_2(x) = x \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y_2' = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$

$$y_2'' = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

$$\Rightarrow y_2'' - 2y_2' + y_2 = e^x \cdot (\cancel{x+2} - 2 \cdot \cancel{(x+1)} + x) = 0. \quad \checkmark$$

•  $\alpha$  komplex mit Vielfachheit  $k$ :

Kombination der beiden vorherigen Fälle:

Aus  $\alpha = a + ib$  ergeben sich  $2k$  lin. unabh. Lösungen, nämlich:



$$y_1(x) = e^{ax} \cos(bx), \quad y_2(x) = x \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx), \quad \dots, \\ y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) \\ y_{k+1}(x) = e^{ax} \sin(bx), \quad y_{k+2}(x) = x \cdot e^{ax} \sin(bx), \quad \dots, \\ y_{2k}(x) = x^{k-1} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx).$$

Zusammengefasst erhält man für eine DGL der Ordnung genau  $n$  linear unabhängige Lösungen, d.h. man kann die allgemeine Lösung vollständig als Linearkombination bestimmen.

Bsp:  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

$\Rightarrow$  Doppelte komplexe Nullstellen  $\alpha_{1,2} = \pm i$  mit  $k=2$   
( $a=0, b=1$ )

$\Rightarrow$  Allg. Lösung:  $y(x) = \underline{C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x}$ .

(b) Homogene Euler'sche DGL

Def: Eine **Euler'sche DGL** ist eine DGL der Form

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} \cdot y^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} y'' + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = f(x)$$

(Bzw. **homogene Euler'sche DGL** wenn  $f(x) = 0$ )

Manchmal wird diese DGL auch mit  $//x^n$  ohne Brüche geschrieben.

Ansatz:  $y(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Einsetzen:  $x^{\alpha-n} \cdot \left( \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) + a_{n-1} \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+2) \right. \\ \left. + \dots + a_1 \alpha + a_0 \right) = 0$   
 $=: P(\alpha)$ , das **Index-Polynom** der DGL,  
 Grad  $n$

$\Rightarrow y(x) = x^\alpha$  ist eine Lösung der DGL genau dann wenn  $P(\alpha) = 0$

Spezialfälle:  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k$ -fache Nullstelle  $\Rightarrow k$  Lösungen:

$$x^\alpha, \ln(x) \cdot x^\alpha, \dots, (\ln x)^{k-1} \cdot x^\alpha$$

$\alpha = a + ib$ , einfache komplexe Nullstelle  $\Rightarrow 2$  Lösungen:

$$x^a \cos(b \cdot \ln(x)), \quad x^a \cdot \sin(b \ln(x))$$

$\alpha = a + ib$ ,  $k$ -fache komplexe Nullstelle  $\Rightarrow 2k$  Lösungen

$$x^a \cos(b \ln(x)), \quad x^a \sin(b \ln(x))$$

$$(\ln x) x^a \cos(b \ln(x)), \quad (\ln x) x^a \sin(b \ln(x)),$$

$\vdots$

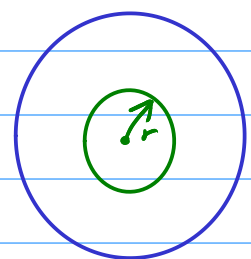
$$(\ln x)^{k-1} x^a \cos(b \ln(x)), \quad (\ln x)^{k-1} \cdot x^a \cdot \sin(b \ln(x))$$

Diese Lösungen sind alle linear unabhängig und bilden als Linearkombination die vollständige allgemeine Lsg der homogenen Euler-DGL.

Bemerkung: Durch  $x = e^t$  wird eine Euler'sche DGL in  $x$  zu einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten in  $t$ .

Bsp: Stationäre Temperaturverteilung  $y(r)$  auf einer homogenen Kreisscheibe, mit  $r \triangleq$  Abstand zum Mittelpunkt

Analysis III  $\rightarrow$  Erfüllt  $y'' + \frac{1}{r} \cdot y' - \frac{m^2}{r^2} \cdot y = 0$



Scheibe

$\Rightarrow$  Index-Polynom:  $\alpha(\alpha-1) + 1 \cdot \alpha - m^2 \cdot 1 \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha + \alpha - m^2 = \alpha^2 - m^2 = 0$$

Fall 1:  $m \neq 0 \rightarrow P(\alpha) = (\alpha - m) \cdot (\alpha + m)$ , Nullstellen  $\pm m$ , reell, einfach

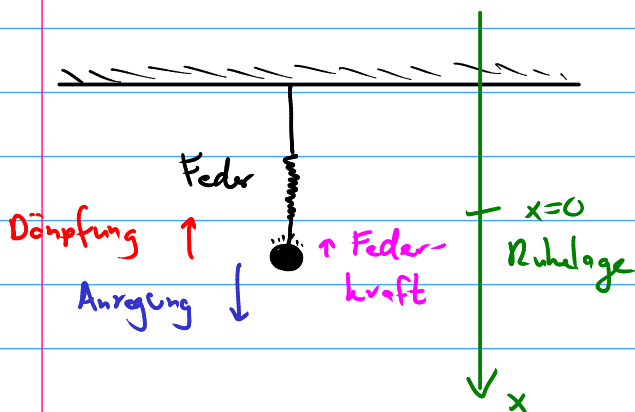
$$\Rightarrow \text{Allg. Lsg: } y(r) = C_1 \cdot r^m + C_2 \cdot r^{-m}$$

Fall 2:  $m = 0 \Rightarrow P(\alpha) = \alpha^2 = 0$ , doppelte reelle Nullstelle  $\alpha = 0$

$$\Rightarrow \text{Allg. Lsg: } y(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot \ln(x) \cdot 1$$

## VII.11 Schwingungsprobleme

## Problem 1: Gedämpfte Federschwingung mit Anregung



Kräfte auf Massepunkt  $m$  in Auslenkung  $x(t)$ .

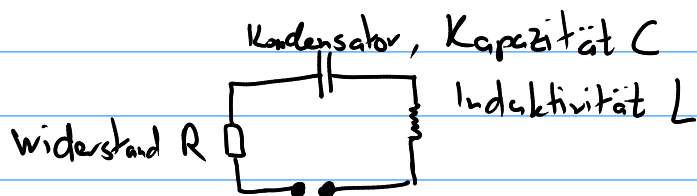
- Federkraft:  $F = -kx$ ,  $k > 0$
- Dämpfung:  $W = -w \cdot \dot{x}$ ,  $w > 0$
- Anregung:  $S(t)$

DGL der Bewegung:  $m \cdot \ddot{x} = -kx - w\dot{x} + S(t)$   $\parallel : m$

Setze  $\omega := \sqrt{k/m}$ ,  $\lambda := w/2m$ ,  $s(t) = S(t)/m$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = s(t)$ , inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, Ordnung 2

## Problem 2: Gedämpfter Schaltkreis



Spannungen

- $u_R = R \cdot I$
- $u_L = L \cdot \dot{I}$
- $u_C = q/C$ , bei Ladung  $q$   
 $\Rightarrow I = \dot{q}$

Kirchoff'sche:  $u(t) = u_R + u_C + u_L = RI + q/C + L \cdot \dot{I}$

Ableiten nach  $t$ :  $\dot{u} = R \cdot \dot{I} + \dot{q}/C + L \cdot \ddot{I}$   $\parallel : L$

Setze  $\omega^2 := 1/C \cdot L$ ,  $\lambda = R/2L$ ,  $s(t) = \dot{u}/L$

$\Rightarrow \ddot{I} + 2\lambda \dot{I} + \omega^2 I = s(t)$ , gleiche DGL wie bei Problem 1.

Ziel: Lösen dieser DGL, Einfluss der Parameter bestimmen

Zugehörige homogene DGL (H):  $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0$ ,  
lineare homogene DGL mit konst. Koeff., Ordnung 2

$\Rightarrow$  Charakteristisches Polynom  $P(\alpha) = \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow$  Nullstellen:  $\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ ,  $\lambda, \omega > 0$

Es gibt also 3 Fälle:  $\lambda > \omega$ ,  $\lambda = \omega$ ,  $\lambda < \omega$

(a)  $\lambda > \omega$ , **starke Dämpfung**

$\Rightarrow \lambda^2 - \omega^2 > 0$ , 2 reelle Nullstellen  $\alpha_{1,2}$

$$0 < \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} < \lambda \Rightarrow \alpha_{1,2} < 0$$

Allgemeine Lösung  $x_h(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

mit  $x_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , exponentieller Zerfall mit Rate  $-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$

Falls  $\omega$  sehr klein ist, ist diese Rate nahe bei 0, d.h. der Zerfall ist langsamer (kleine Federkonstante/grosser Kondensator)

(b)  $\lambda = \omega$ , **kritische Dämpfung**

$\rightarrow$  Doppelte Nullstelle  $\alpha_{1,2} = -\lambda$

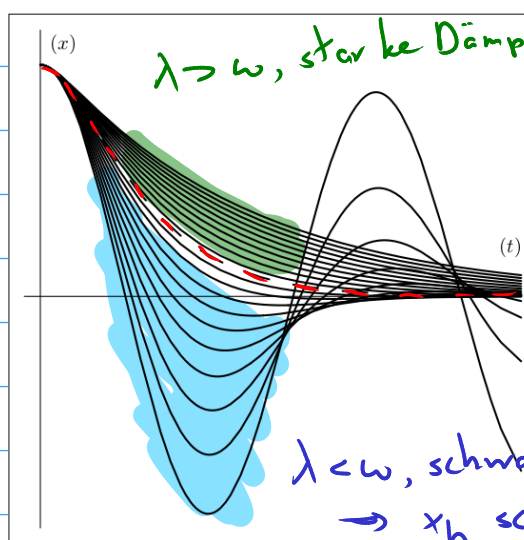
$\rightarrow$  Allgemeine Lösung  $x_h = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

(c)  $\lambda < \omega$ , **schwache Dämpfung**

$\Rightarrow$  2 komplexe Lösung. Setze  $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} > 0$

$\Rightarrow \alpha_{1,2} = -\lambda \pm i\omega^*$

$\rightarrow$  Allg. Lösung:  $x_h = e^{-\lambda t} \cdot (C_1 \cos(\omega^* t) + C_2 \sin(\omega^* t))$   
 $\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$



$\lambda > \omega$ , starke Dämpfung

Feststellung:  $x_h \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$   
in allen 3 Fällen, unabhängig von AWP

$\lambda = \omega$ , kritische Dämpfung,  
schnellste Konvergenz gegen 0.

$\lambda < \omega$ , schwache Dämpfung  
 $\rightarrow x_h$  schwingt, abklingend

Inhomogener Fall:  $s(t) = P \cdot \cos(\sigma t)$ , periodische Anregung  
z.B. Wechselstrom beim Stromkreis

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = P \cdot \cos(\sigma t)$$

Homogene Lösung  $x_h$  ist bekannt, gesucht ist eine partikuläre Lsg  $x_0$ .

Bemerkung: Da  $x_h \rightarrow 0$  wird  $x_0$  das langfristige Verhalten der allgemeinen Lösung  $x = x_h + x_0$  vollständig bestimmen.

Man nennt  $x_0$  auch die stationäre Lösung.

Phasenverschiebung!

$$\text{Ansatz: } x_0(t) = A \cdot \cos(\sigma t + \alpha), \quad A, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ Parameter}$$

$$\Rightarrow x_0'(t) = -A\sigma \sin(\sigma t + \alpha) = -A\sigma (\sin(\sigma t) \cos \alpha + \cos(\sigma t) \sin \alpha)$$

$$x_0''(t) = -A\sigma^2 \cos(\sigma t + \alpha) = -A\sigma^2 (\cos(\sigma t) \cos \alpha - \sin(\sigma t) \sin \alpha)$$

$$\text{(I): } \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = P \cdot \cos(\sigma t)$$

Einsetzen in (I) und  $\cos(\sigma t)$ - bzw  $\sin(\sigma t)$ -Terme sammeln:

$$\bullet \sin(\sigma t)\text{-Anteile: } A\sigma^2 \sin \alpha - 2\lambda A\sigma \cos \alpha - \omega^2 A \sin \alpha = 0 \quad | : \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\lambda\sigma}{\sigma^2 - \omega^2}$$

$$\cdot \cos(\sigma t) - \text{Anteile: } -A\sigma^2 \cos(\alpha) - 2\lambda A\sigma \sin \alpha + \omega^2 A \cos \alpha = P \quad \parallel: \cos \alpha$$

$$\Rightarrow A \cdot (\omega^2 - \sigma^2) - \underbrace{2\lambda \sigma A \tan \alpha}_{= \tan \alpha \cdot (\sigma^2 - \omega^2)} = P / \cos \alpha$$

$$\Rightarrow A \cdot (\omega^2 - \sigma^2) \cdot \underbrace{\left( \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)}_{= 1 / \cos^2 \alpha} = P / \cos \alpha \quad \parallel: \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A \cdot (\omega^2 - \sigma^2) = P \cdot \cos \alpha \quad \parallel: (\quad)^2$$

$$\Rightarrow A^2 (\omega^2 - \sigma^2)^2 = p^2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = p^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{4\lambda^2 \sigma^2}{(\omega^2 - \sigma^2)^2}} \quad \parallel: (\quad)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^2}} = p^2 \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\lambda^2 \sigma^2}$$

Für  $\sigma = 0$ , also eine konstante Anregung (Gleichstrom!), erhält man  $\alpha = 0$  und  $A^2 = p^2 / \omega^4$  für die Amplitude

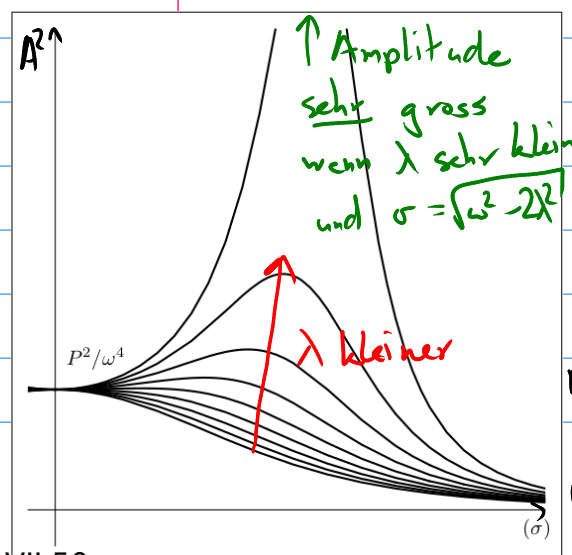
Frage: Kann  $A^2$  in Abhängigkeit von  $\sigma$  grösser als  $\frac{p^2}{\omega^4}$  werden?

$\Rightarrow$  Bestimme das Maximum von  $A^2(\sigma) = \frac{p^2}{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\lambda^2 \sigma^2}$

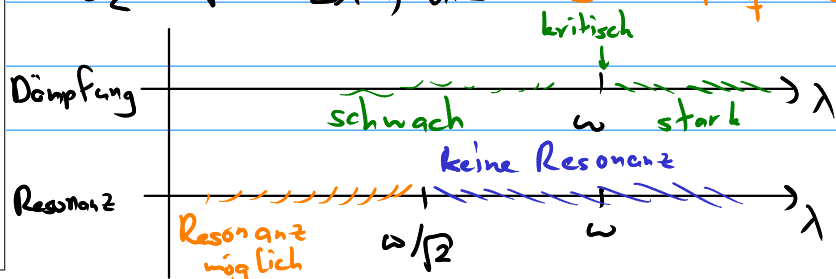
$$\frac{d}{d\sigma} A^2 = -p^2 \cdot \frac{8\lambda^2 \sigma + 2 \cdot 2\sigma \cdot (\omega^2 - \sigma^2)}{(\quad)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

2 Lösungen:  $\sigma_1 = 0$  und  $8\lambda^2 + 4 \cdot (\omega^2 - \sigma^2) = 0$   
 $\Rightarrow \sigma_2^2 = \omega^2 - 2\lambda^2 \quad (>0)$

$$\sigma_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma_2^2 > 0 \Rightarrow \omega > \sqrt{2} \lambda$$



Falls  $\omega > \sqrt{2} \lambda$ , gibt es ein Maximum bei  $\sigma_2 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$ , die Resonanzfrequenz



Spezialfall:  $\lambda = 0$ , ohne Dämpfung  $\Rightarrow$  Alle Fälle ausser  $\sigma = \omega$  bleiben gleich.

Wenn auch  $\sigma = \omega$  gilt, erhält man die DGL  $\ddot{x} + \omega^2 x = P \cdot \cos(\omega t)$

$\Rightarrow$  Lösung  $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{P}{2\omega} \cdot t \cdot \sin(\omega t)$   
wird beliebig gross.

Stromkreis:  $\lambda = \frac{R}{2L}$ , d.h.  $\lambda = 0$  ist der Fall "ohne Widerstand"  
 $\Rightarrow$  Strom wird beliebig gross.

Fazit: Keine oder eine zu schwache Dämpfung kann zu einer gefährlichen Resonanz führen. Besser durch gute Planung vermeiden!

Frage: Reicht das Modell  $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = s(t)$ , um komplexere Systeme zu beschreiben?

Im Allgemeinen hängen Kräfte vom Ort  $x$  und der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  ab  
 $\Rightarrow$  Totale Kraft  $K$  ist eine Funktion von  $x$  und  $\dot{x}$ , also  $K(x, \dot{x})$   
 $\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = K(x, \dot{x})$

Übliche Bedingung: Ruhelage bei  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0 \Rightarrow K(0, 0) = 0$   
 $K$  kann abgesehen davon aber beliebig kompliziert werden.  
Für  $x$  und  $\dot{x}$  klein kann man aber  $K$  linearisieren:

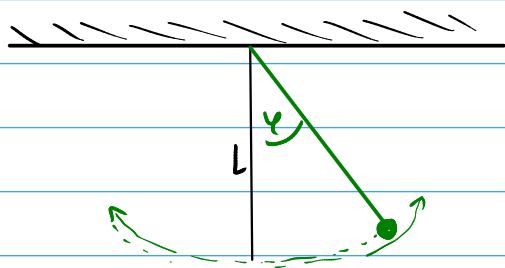
$$K(x, \dot{x}) \approx \underbrace{K(0, 0)}_{=0} + x \cdot \underbrace{K_x(0, 0)}_{=:a} + \dot{x} \cdot \underbrace{K_{\dot{x}}(0, 0)}_{=:b} = ax + b\dot{x}$$

$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = ax + b\dot{x}$ , homogene Schwingungsgleichung von vorhin.  
Zeitabhängige Einflüsse können im Störglied  $s(t)$  untergebracht werden:  
 $m \ddot{x} - b\dot{x} - ax = s(t)$

→ Für 'kleine'  $x$  und  $\dot{x}$  reicht unser Modell also aus.

Bsp: Mathematisches Pendel mit Masse  $m$ , Pendellänge  $L$

→ Auslenkung in Abhängigkeit von  $\varphi$ :  $m \cdot L \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$



→  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \cdot \sin \varphi$ , nicht-lineare DGL

Linearisieren:  $f(\varphi) = \sin \varphi$ , um  $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \underline{f(\varphi)} \approx f(0) + \varphi \cdot f'(0) = \sin(0) + \varphi \cdot \cos(0) = \underline{\varphi}$$

Einsetzen:  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \cdot \varphi$ , DGL der harmonischen Schwingung

Themen: Taylor- und Potenzreihenansätze für DGL, Systeme von DGL

## VIII.5 Anwendungen von Taylorreihen für DGL

Sei  $y(x)$  eine Funktion mit Potenzreihe um  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \text{gliedweise } \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow y'(x) &= 0 + c_1 + 2c_2 x + \dots + c_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot c_{k+1} \cdot x^k \quad \left( = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } y' &= ay \Rightarrow ay = a c_0 + a c_1 x + a c_2 x^2 + \dots \\ y' &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Potenzreihe  $\Rightarrow$  Koeffizienten müssen gleich sein!



→ Unendliches Gleichungssystem, für jedes  $x^k$  eine Bedingung:

$$a \cdot c_0 = c_1$$

$$a \cdot c_1 = 2c_2$$

$$a \cdot c_2 = 3 \cdot c_3$$

$$\vdots$$

$$a \cdot c_k = (k+1) \cdot c_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow c_1 = a \cdot c_0$$

$$\Rightarrow c_2 = a \cdot \frac{c_1}{2} = \frac{a^2}{2} c_0$$

$$\Rightarrow c_3 = a \cdot \frac{c_2}{3} = \frac{a^3}{3!} c_0$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow c_{k+1} = a \cdot \frac{c_k}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} c_0$$

→ Alle Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$  hängen von  $c_0 =: C$  ab

$$\rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C \cdot \frac{a^k}{k!} \cdot x^k = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!}$$

$$= C \cdot e^{ax}, \quad \text{mit Parameter } C \in \mathbb{R}$$

Hier kennen wir die resultierende Funktion, die zur Potenzreihe gehört, aber das muss nicht immer der Fall sein.

Satz: Sei  $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$  eine lineare DGL der Ordnung 2. Wenn  $p_1$  und  $p_0$  eine Potenzreihenentwicklung um  $x_0$  haben, dann hat auch  $y(x)$  eine Potenzreihenentwicklung um  $x_0$ .

Bsp:  $y'' + x^2 \cdot y = 0$ , nicht elementar lösbar  
 $\rightarrow y'' = -x^2 \cdot y$

Potenzreihenansatz: Sei  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 \cdot x^2 + \dots$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 \cdot x^2 + 5 \cdot 4 \cdot c_5 \cdot x^3 + 6 \cdot 5 \cdot c_6 \cdot x^4 + \dots \\ -x^2 y = 0 + 0 \cdot x - c_0 x^2 - c_1 x^3 - c_2 x^4 + \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_4 = -\frac{c_0}{4 \cdot 3} \quad \Rightarrow c_6 = -\frac{c_2}{6 \cdot 5} = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = 0 \quad \Rightarrow c_5 = -\frac{c_1}{5 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{4 \cdot 3} \cdot x^4 - \frac{c_1}{5 \cdot 4} \cdot x^5 + \frac{c_0}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} \cdot x^8 + \frac{c_1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} \cdot x^9 - \dots$$

$\overset{=-c_4}{\text{}} \quad \quad \quad \overset{=-c_5}{\text{}}$

Dies ist die allgemeine Lösung als Potenzreihe, mit Parametern  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ .

Die Koeffizientenfunktionen  $p_n(x) = 0$  und  $p_6(x) = x^2$  konvergieren als Potenzreihen um  $x_0 = 0$  auf ganz  $\mathbb{R} \Rightarrow y(x)$  konvergiert ebenfalls um  $x_0 = 0$ .

## VII. 12 Systeme von Differentialgleichungen

Manchmal können DGL gekoppelt auf:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}, \quad \text{System von DGL 1. Ordnung}$$

Systeme höherer Ordnung oder in mehr als 2 Funktionen sind ebenfalls möglich.

Bsp: Sei  $y'' = f(x, y, y')$  eine DGL 2. Ordnung

Schreibe  $y_1(x) = y(x)$  und  $y_2(x) = y'(x)$

$$\Rightarrow \text{System: } \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} (= f_1(x, y_1, y_2)) \\ (= f_2(x, y_1, y_2)) \end{matrix}$$

Analog für DGL der Ordnung  $n \rightsquigarrow$  System von  $n$  DGL 1. Ordnung

Bsp: DGL des gedämpften Oszillators:  $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0$

Mit  $v = \dot{x}$  erhält man das System

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\lambda v - \omega^2 x \end{cases}$$

$\ddot{x} \quad \quad \quad \ddot{x}$

Existenzsatz: Sei  $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$  ein System von DGL 1. Ordnung.

Wenn  $f_1$  und  $f_2$  in  $x$  stetig und nach  $y_1$  und  $y_2$  stetig partiell diff'bar sind, dann hat das Anfangswertproblem  $y_1(x_0) = y_{1,0}$ ,  $y_2(x_0) = y_{2,0}$  genau eine Lösung.

Bemerkung: Daraus folgt z.B. auch der Existenzsatz für DGL n. Ordnung.

Def: Wenn  $f_1$  und  $f_2$  unabhängig von der Variable  $x$  sind, ist das System **autonom**.

Bsp: Gedämpfter Oszillator, hängt nicht von  $t$  ab, nur von  $x, v$ !

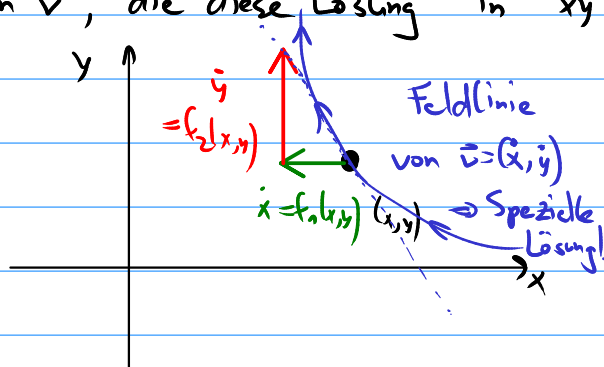
### Darstellung von autonomen Systemen

Sei  $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$  ein autonomes System in  $(x(t), y(t))$   
 $\hookrightarrow f_1, f_2$  nicht von  $t$  abhängig

$\Rightarrow$  An einer Stelle  $(x(t), y(t))$  ist klar, dass es in Richtung

$$\vec{v}(x, y) := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \text{ weitergeht} \Rightarrow \text{Vektorfeld } \vec{v}$$

$\Rightarrow$  Für jede spezielle Lösung  $(x, y)$  des Systems existiert eine Feldlinie von  $\vec{v}$ , die diese Lösung in  $xy$ -Koordinaten darstellt.



Def.: Die **Trjektorie** ist die durch  $(x_0, y_0)$  gehende Feldlinie mit passendem Durchlaufsin.

• Die Schar aller Trjektorien ist das **Phasenportrait**.

Existenzsatz: Für ein AWP gibt es genau eine Lösung

Autonomes System  $\Rightarrow (\dot{x}, \dot{y})$  hängt nur von  $(x, y)$  ab, nicht von  $t$   
 $\Rightarrow (x_0, y_0)$  als Startpunkt reicht hier zur Eindeutigkeit der Lösung und der Trajektorie durch  $(x_0, y_0)$

Das Phasenportrait enthält Informationen über die Asymptotik und die Periodizität, oft ohne dass das System gelöst werden muss.

Bsp: Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra

$x(t)$ : Räuberpopulation

$y(t)$ : Beutepopulation

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{-a_1 x}_{\text{Wachstum}} + \underbrace{b_1 x \cdot y}_{\text{Zufuhr}} \\ \dot{y} = \underbrace{a_2 y}_{\text{Wachstum}} - \underbrace{b_2 x \cdot y}_{\text{Jagd}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{autonomes} \\ \text{System} \end{array}$$

$$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$$

Problem: System <sup>nicht!</sup> elementar lösbar. Verhalten bei  $t \rightarrow \infty$ ?

Bestimme Phasenportrait:  $\vec{v}(x, y) = (\dot{x}, \dot{y}) = (-a_1 x + b_1 x y, a_2 y - b_2 x y)$

Feldlinien von  $\vec{v}$  sind Graphen von Lösungen der neuen OGL

$$y' = \frac{v_2}{v_1} = \frac{a_2 y - b_2 x y}{-a_1 x + b_1 x y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a_2 - b_2 x}{-a_1 + b_1 y}, \text{ separierbar}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-a_1 + b_1 y}{y} dy = \int \frac{a_2 - b_2 x}{x} dx$$

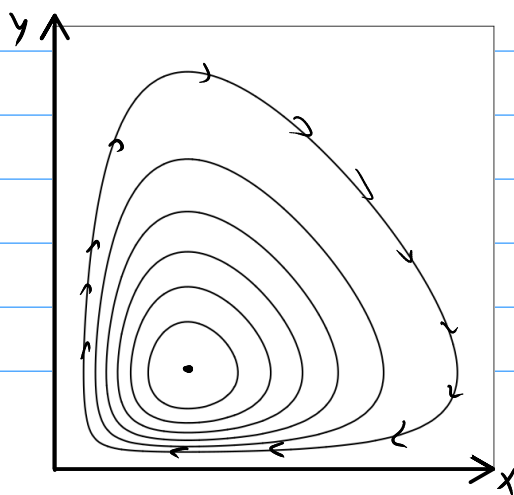
$$\Rightarrow -a_1 \ln|y| + b_1 y = a_2 \ln|x| - b_2 x + C \quad / \exp(\quad)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{b_1 y}}{|y|^{a_1}} = e^C \cdot \frac{|x|^{a_2}}{e^{b_2 x}}$$

$$\Rightarrow e^C = \frac{e^{b_1 y + b_2 x}}{|x|^{a_2} \cdot |y|^{a_1}},$$

Niveaulinien einer Funktion in  $x, y$

$\rightarrow$  Periodisches Verhalten



## VII. 13 Lineare autonome Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Ein DGL-System der Form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \\ b_1, b_2 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

ist ein **lineares autonomes DGL-System mit konstanten Koeffizienten**, Ordnung 1.

Notation:  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix},$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + \vec{b}.$$

Bemerkung: Ein autonomes System  $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$  kann durch Linearisierung von  $f_1$  und  $f_2$  immer in diese Form gebracht werden. Die Lösungen gelten approximativ für  $x, y$  klein.

Für diese Systeme gibt es 2 Lösungsmethoden:

Methode 1: Lineare Algebra

Bsp:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$   
( $\vec{b} = \vec{0}$ )

Idee: Wenn **A** diagonal ist, reduziert sich das System zu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 \cdot e^{a_{11} \cdot t} \\ x_2(t) = C_2 \cdot e^{a_{22} \cdot t} \end{cases}$$

$A$  ist in der Regel nicht diagonal, aber  $A$  lässt sich oft diagonalisieren. D.h. es gibt eine Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $A = T D T^{-1}$ .

- Bestimme Eigenwerte von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \text{denn}$$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang 1} \quad \checkmark$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang 1} \quad \checkmark$$

- Bestimme Eigenvektoren zu  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ :

$$\leadsto \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $D$  und  $T$  aufstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = T D T^{-1}, \quad \text{mit } T \text{ orthogonal da } A \text{ symmetrisch}$$

$\Rightarrow T^{-1} = T^t$

- DGL-System  $\dot{\vec{y}} = D \cdot \vec{y}$  ist lösbar, denn

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 \cdot e^{4t} \\ y_2(t) = C_2 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

- Setze  $\vec{x} := T \vec{y}$ , dann  $\vec{x} = T \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = T^{-1} \vec{x} = T^t \vec{x}$

$$\Rightarrow A \vec{x} = T D T^{-1} \vec{x} = T D \vec{y} = T \dot{\vec{y}} = \dot{\vec{x}}$$

Also:  $\vec{x} = T \vec{y}$  löst das System  $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (y_1 + y_2) = D_1 \cdot e^{4t} + D_2 \cdot e^{-2t} \\ x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (y_1 - y_2) = D_1 \cdot e^{4t} - D_2 \cdot e^{-2t} \\ &\text{mit } D_1 = C_1/\sqrt{2}, \quad D_2 = C_2/\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{bzw. } \underline{\underline{\vec{x}(t) = D_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + D_2 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Methode 2: Überführen in DGL der Ordnung 2

$$\text{Bsp: } \begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert  $\lambda = 3$  mit algebraische Vielfachheit 2,  
aber geometrische Vielfachheit 1.

$\Rightarrow A$  ist nicht diagonalisierbar. Man könnte stattdessen die Jordannormalform aufstellen und Rücksubstituieren.

Stattdessen eliminiert man eine Funktion, hier  $x_2$ :

$$\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 - 5x_1 \xrightarrow{(\cdot)'} \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 - 5\dot{x}_1 \quad !!!$$

$$\text{Es gilt auch } \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 = -4x_1 + \dot{x}_1 - 5x_1 = \dot{x}_1 - 9x_1$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - 5\dot{x}_1 = \dot{x}_1 - 9x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 9x_1 = 0, \text{ lineare homogene DGL mit konst. Koeff.}$$

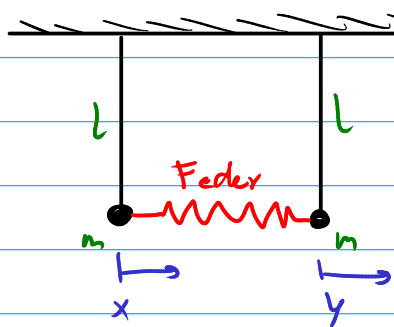
Charakteristisches Polynom:  $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ ,  
doppelte reelle Nullstelle  $\lambda = 3$

$$\Rightarrow x_1(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot t \cdot e^{3t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_2(t) &= \dot{x}_1 - 5x_1 = 3 \cdot C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot 3t \cdot e^{3t} \\ &\quad - 5 \cdot C_1 \cdot e^{3t} - 5 \cdot C_2 \cdot t \cdot e^{3t} \\ &= e^{3t} \cdot (C_2 - 2C_1) - 2C_2 \cdot t \cdot e^{3t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \end{pmatrix} e^{3t}$$

Bsp: Zwei mathematische Pendel, je Pendellänge  $L$ , Masse  $m$ , gekoppelt mit einer Feder, die in Ruhelage entspannt ist.



Seien  $x, y$  die horizontalen Auslenkungen  
 $\rightsquigarrow$  DGL des mathematischen Pendels  
 plus Federkraft

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\frac{mg}{L} \cdot x - \underbrace{k(x-y)}_{\substack{\text{Federkonstante, } > 0 \\ \text{Federkraft, abhängig von Federelongation}}} \\ m \ddot{y} &= -\frac{mg}{L} \cdot y - \underbrace{k(y-x)}_{\substack{\text{Federkonstante, } > 0 \\ \text{Federkraft, abhängig von Federelongation}}} \end{aligned}$$

Setze  $a = g/L$ ,  $b = k/m$ , teile Gleichungen durch  $m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{x} &= -ax - b(x-y) = -(a+b)x + by \\ \ddot{y} &= -ay - b(y-x) = bx - (a+b)y \end{aligned}$$

System von 2 DGL 2. Ordnung

Lösungsmethoden: • Führe Gleichungen für  $\dot{x}, \dot{y}$  ein

$\rightsquigarrow$  System 1. Ordnung mit 4 Gleichungen

• Umwandeln in eine DGL der Ordnung 4.

• Auflösen nach  $y$ :  $y = \frac{\ddot{x}}{b} + \frac{a+b}{b} \cdot x$

$$\begin{aligned} 2x \text{ ableiten: } \ddot{y} &= \frac{x^{(4)}}{b} + \frac{a+b}{b} \cdot \ddot{x} = bx - (a+b)y \\ &= bx - (a+b) \left( \frac{\ddot{x}}{b} + \frac{a+b}{b} x \right) \end{aligned}$$



$$\rightarrow x^{(4)} + 2 \cdot \ddot{x} \cdot (a+b) + x \cdot ((a+b)^2 - b^2) = 0$$

lineare homogene DGL mit konst. Koeff, Ordnung 4.

$$\Rightarrow x^{(4)} + \ddot{x} \cdot 2(a+b) + x \cdot (a^2 + 2ab) = 0$$

→ Char. Pol.  $p(\lambda) = \lambda^4 + 2(a+b)\lambda^2 + (a^2 + 2ab) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - (a^2 + 2ab)}$$

$$= -a - b \pm |b| = \begin{cases} -a \\ -a - 2b \end{cases}, \quad a, b \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-a} = \pm i\omega \quad , \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-a-2b} = \pm i\sigma,$$

mit  $\omega := \sqrt{a}$                       mit  $\sigma := \sqrt{a+2b}$ ,

also 2 Paare von einfachen, komplex konjugierten Nullstellen.

→ Allg. Lösung:  $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + C_3 \cos(\sigma t) + C_4 \sin(\sigma t)$

$$\rightarrow y(t) = \frac{\ddot{x}}{b} + \frac{a+b}{b} x = \dots = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - C_3 \cos(\sigma t) - C_4 \sin(\sigma t)$$

Anfangswerte:  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ .

$$x_0 = C_n + C_3$$

$$0 = \omega C_2 + \sigma C_4$$

$$\rightarrow 0 = C_1 - C_3$$

$$0 = \omega C_2 - \sigma C_4$$

$$C_1 = C_3 = x_0/2$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} \cdot (\cos(\omega t) + \cos(\sigma t)) \\ y(t) &= \frac{x_0}{2} \cdot (\cos(\omega t) - \cos(\sigma t)) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{x_0}{2} \cdot (\cos(\omega t) - \cos(\omega t))$$

Überlagerung auflösen:  $x(t) = x_0 \cdot \cos\left(\frac{\sigma - \omega}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sigma + \omega}{2} \cdot t\right)$   
 $y(t) = x_0 \cdot \sin\left(\frac{\sigma - \omega}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sigma + \omega}{2} \cdot t\right)$

$$y(t) = x_0 \cdot \sin\left(\frac{\sigma - \omega}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sigma + \omega}{2} \cdot t\right)$$

Da  $\omega = \sqrt{a}$  und  $\sigma = \sqrt{a+2b}$  ist  $\frac{\sigma+\omega}{2} \gg \frac{\sigma-\omega}{2}$ .  
 $\Rightarrow$  Hauptschwingung mit  $\frac{\sigma+\omega}{2}$ , Amplitude schwingt mit  $\frac{\sigma-\omega}{2}$ .

Außerdem ist  $\frac{\sigma-\omega}{2}$  sehr klein wenn  $\sigma$  nahe bei  $\omega$  ist, d.h. wenn  $b$  klein ist. Da  $b = k/m$ , ist das bei kleinem  $k$  der Fall.

Themen: Gleichgewichtspunkte, Stabilitätsverhalten, Zusammenfassung, Prüfungsinfos

## VII.14 Stabilitätsverhalten

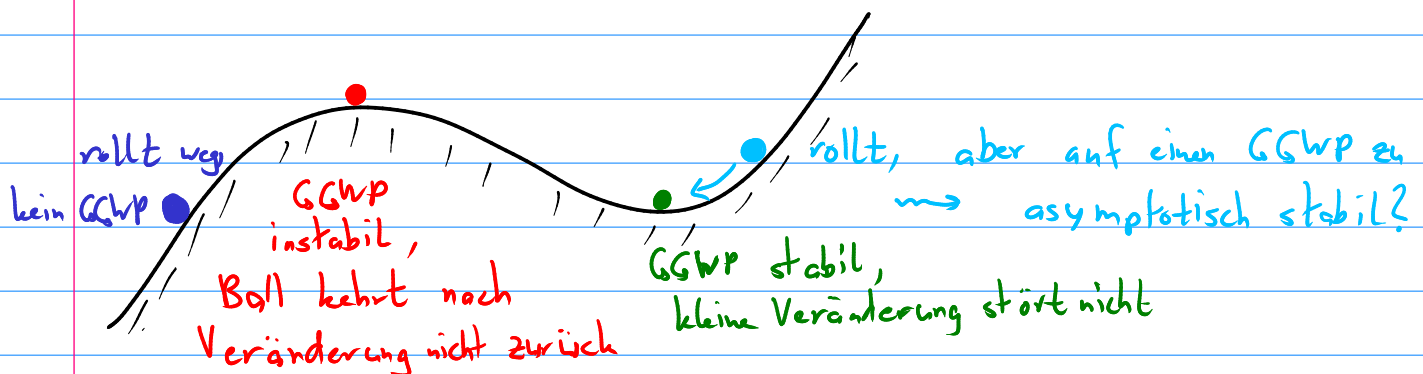
Autonomes DGL-System  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  mit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Für  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt  $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und damit  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d.h. die konstante Lösung  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  löst diese Systeme immer.

Def: Wenn die konstanten Funktionen  $x_1(t) = x_{0,1} \in \mathbb{R}$  und  $x_2(t) = x_{0,2} \in \mathbb{R}$  das autonome System  $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$  lösen, dann ist  $(x_{0,1}, x_{0,2})$  ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

System linear homogen mit konst. Koeff  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Gleichgewichtspunkt.

Frage: Welche Typen von Gleichgewichtspunkten (GGWP) gibt es?  
 D.h. wie verhalten sich Lösungen in der Nähe dieser Punkte?



Sei  $\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$  das zu lösende System, mit konstanten Koeffizienten.  
Eliminiere  $x_2$  und betrachte eine DGL 2. Ordnung:

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\dot{x}_1 - a_{11} x_1}{a_{12}} \quad // \frac{d}{dt}$$

$a_{12} \leftarrow \neq 0, \text{ Annahme}$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_1 - a_{11} \dot{x}_1}{a_{12}} \quad // !$$

Ausserdem aus System:  $\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - (a_{11} + a_{22}) \dot{x}_1 + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \cdot x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - \text{Spur}(A) \dot{x}_1 + \det(A) \cdot x_1 = 0$$

Bemerkung: Falls  $a_{12} = 0$  gilt, dann eliminiert man  $x_1$  statt  $x_2$   
 $\rightarrow$  Gleichung für  $x_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Char. Polynom: } P(\alpha) &= \alpha^2 - (a_{11} + a_{22}) \alpha + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \alpha^2 - \text{Spur}(A) \cdot \alpha + \det(A) \\ &= \det(A - \alpha I), \text{ char. Pol. der Matrix } A. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Lösungsverhalten des Systems und der DGL 2. Ordnung ist gleich, hängt von den Eigenwerten von  $A$  bzw. den Nullstellen des char. Polynoms ab.

Charakterisierung der Lösungen anhand der Nullstellen/EW  $\alpha_1, \alpha_2$ :

Fall 1:  $\alpha_1 \leq \alpha_2 < 0$ , beide reell negativ

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Allg. Lsg. } x_1(t) &= C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \\ \text{oder falls } \alpha_1 &= \alpha_2: x_1(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 t \cdot e^{\alpha_1 t} \\ x_2 &\text{ hat die gleichen Basisfunktionen mit anderen Koeffizienten} \end{aligned}$$

Da  $\alpha_1, \alpha_2 < 0$  gilt  $x_1, x_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , dem GGWP  
 $\Rightarrow (0,0)$  ist ein **asymptotisch stabiler GGWP**.

Bsp: Starke oder kritische Dämpfung beim harmonischen Oszillator.

Fall 2:  $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ , reell mit unterschiedlichen Vorzeichen

$\Rightarrow$  Allg. Lsg:  $x_1(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

Da  $\alpha_2 > 0$  wächst  $x_1(t)$  exponentiell, ausser wenn  $C_2 = 0$

Bis auf vereinzelte AWP gilt  $x_1, x_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pm \infty$ .

$\Rightarrow (0,0)$  ist ein **instabiler GGWP**

Bsp: 2 Populationen in Symbiose:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow$  Eigenwerte  $\pm \sqrt{2}$ , die Lösungen zu fast allen AWP divergieren gegen  $(\pm \infty, \pm \infty)$ .

Fall 3:  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ , beide reell positiv

$\Rightarrow$  Allg. Lsg.  $x_1(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$  bzw.  
 $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 t e^{\alpha_1 t}$  falls  $\alpha_1 = \alpha_2$

$\Rightarrow$  In der Regel gilt  $x_1, x_2 \longrightarrow \pm \infty$ , instabiler GGWP

Fall 4:  $\alpha_1, \alpha_2$  komplex

$P(\alpha)$  ist ein reelles Polynom  $\Rightarrow \alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ , komplex konjugiert

Seien also  $\alpha_{1,2} = a \pm ib$ ,  $b > 0$

Fall 4.1:  $\alpha_{1,2} = \pm ib$ , d.h.  $a = 0$

$\Rightarrow$  Allg. Lsg.  $x_1(t) = C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)$ ,

$\Rightarrow$  Oszilliert um den GGWP  $(0,0)$ , Lösungen sind periodisch.  $(0,0)$  ist ein **stabiler GGWP**, aber nicht asymptotisch stabil  $x_1 \not\rightarrow 0$

Bsp: Ungedämpfter Oszillator, Lotka-Volterra-Modell

Fall 4.2:  $\alpha_{1,2} = a \pm ib$  mit  $a > 0$

→ Allg. Lsg.  $x_1(t) = e^{at} \cdot (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$

Da  $a > 0$  ist  $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ , aber oszillierend  
 → Instabiler GGWP. Wegen der Oszillation nennt man diesen GGWP  $(0,0)$  auch **Strudel Punkt**

$$\text{Bsp: } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Fall 4.3:  $\alpha_{1,2} = a \pm ib$ , mit  $a < 0$

→ Allg. Lsg.  $x_1(t) = e^{at} \cdot (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$

Da  $a < 0$  ist  $x_1(t) \rightarrow 0$ , aber oszillierend  
 → Asymptotisch stabiler GGWP und Strudel Punkt  
 Bsp: Schwach gedämpfter harmonischer Oszillator.

Fall 5:  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2 = 0$ , Übung, ausgeartet, selten