

VI Vektoranalysis

Ein **Vektorfeld** weist jeden Punkt in der Ebene oder im Raum einen Vektor der gleichen Dimension zu.

Bsp: Windkraft, elektrostatische Kraft, Magnetfeld, Wärmefluss, Strömung

Zwei grundsätzliche Fragen:

- Welche Menge fließt pro Zeit durch eine Fläche?
- Welche Arbeit muss aufgewendet werden, um ein Teilchen durch ein Kraftfeld zu bewegen?

VI.1/2 Skalarfelder & Vektorfelder / Differentialoperatoren der Vektoranalysis

Bisher: $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, Funktion in 3 Variablen
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

Man nennt dies auch ein **Skalarfeld**, da jedem Punkt ein Skalar (eine Zahl) zugeordnet wird.

Bsp: Temperatur, Luftdruck, Potential, Dichte

Def: Ein **Vektorfeld** ist eine Funktion $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\vec{r} \mapsto \vec{v}(\vec{r})$

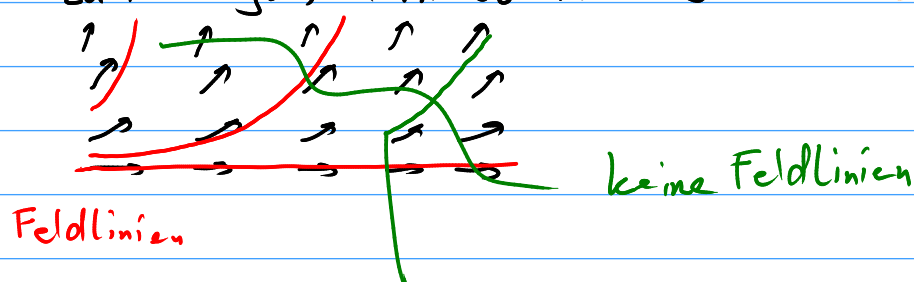
Ganz ausgeschrieben: $\vec{r} = (x, y, z)$,
 $\vec{v}(\vec{r}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$

Falls $B \subset \mathbb{R}^2$ und $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R}^2$, ist \vec{v} ein **ebenes Vektorfeld**.

Bsp: $\vec{v}(\vec{r})$ = Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ortsvektor \vec{r}
 $\vec{v}(\vec{r})$ = Wirkende Kraft im Punkt \vec{r} .

- Manche Vektorfelder sind zeitabhängig: $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$
Solche Vektorfelder sind **instationär**. Meistens werden wir mit **stationären** Vektorfeldern arbeiten.

Def: Wenn $K \subset B$ eine Kurve ist, so dass \vec{v} immer tangential zu K liegt, dann ist K eine **Feldlinie**.



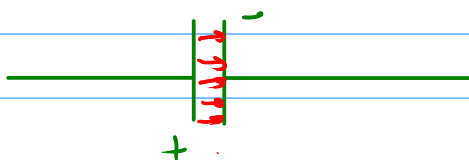
Bsp: • K parametrisiert durch $\vec{s}(t)$
 $\Rightarrow \vec{v}(\vec{s}(t)) = \dot{\vec{s}}(t)$ erzeugt eine Feldlinie

- Wenn \vec{v} ein Strömungsfeld ist, sind die Feldlinien gerade die Bahnen der Teilchen.

Def: Falls $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant ist, heißt \vec{v} **homogen**.
 z.B.: • Ideale Flüssigkeit in einem reibungsfreien Rohr



- Elektrisches Feld in einem dünnen Plattenkondensator



In homogenen Vektorfeldern sind die Feldlinien parallele Geraden

Bsp: **Rotationsfeld**: Sei $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ eine Winkelgeschwindigkeit mit Drehachse entlang $\vec{\omega}$

Setze: $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$
 (z.B. Erdrotation)

⇒ Feldlinien sind Kreise mit Normalenvektor $\parallel \vec{\omega}$

Differentialoperatoren

f Skalarfeld $\Rightarrow \text{grad } f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}) \\ f_y(\vec{r}) \\ f_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, ein Vektor

⇒ $\text{grad } f$ ist ein Vektorfeld, das **Gradientenfeld** von f .

Erinnerung: $\text{grad } f(\vec{r})$ ist der Vektor in Richtung des grössten Anstiegs von f . Er steht senkrecht auf der Niveauläche
 ⇒ Feldlinien des Gradientenfelds stehen senkrecht zu Niveaulächen

Der Gradient wandelt ein Skalarfeld in ein Vektorfeld um.
 Solche Zuweisungen nennt man **Operatoren**.

Def: Für ein Vektorfeld \vec{v} ist $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$
 die **Divergenz** von \vec{v} .

⇒ $\text{div } \vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ein Skalarfeld

⇒ div wandelt ein Vektorfeld \vec{v} in ein Skalarfeld $\text{div } \vec{v}$ um.
 Auch dies ist also ein Operator

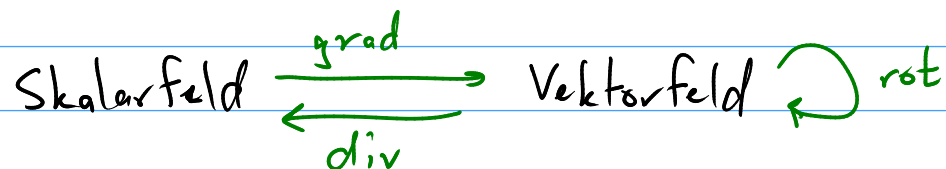
Mit $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_{1,x} + \underbrace{v_{2,y}}_{= \frac{\partial}{\partial y} v_2} + v_{3,z} = \text{div } \vec{v}$$

Laplace-Operator: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \text{div grad } f$

Was ist $\vec{\nabla} \times \vec{v}$? $\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix} =: \text{rot } \vec{v}$,

die **Rotation** von \vec{v} . Ebenfalls ein Operator, Vektorfeld
 \rightarrow Vektorfeld



Bsp: $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a}$ homogen $\Rightarrow v_{1,x} = v_{2,y} = v_{3,z} = 0$
 $\Rightarrow \text{div } \vec{v}(\vec{r}) = 0$, $\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{0}$.

• Rotationsfeld, Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_z \cdot y - \omega_y \cdot z \\ \omega_x \cdot z - \omega_z \cdot x \\ \omega_y \cdot x - \omega_x \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{v}(\vec{r}) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \omega_x + \omega_x \\ \omega_y + \omega_y \\ \omega_z + \omega_z \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{\omega}$$

Bsp: Coulombfeld: Punktladung e im Ursprung erzeugt ein elektrisches Feld \vec{E} .

Betrag: $|\vec{E}(\vec{r})| = \gamma \cdot \overset{\substack{>0, \text{Konstante} \\ \downarrow}}{|e|} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{\gamma \cdot |e|}{r^2}$, mit $r := |\vec{r}|$

Richtung: e positiv $\Rightarrow \vec{E}$ von $\vec{0}$ weggerichtet, Abstossung
 e negativ $\Rightarrow \vec{E}$ auf $\vec{0}$ zugerichtet, Anziehung

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\gamma \cdot |e|}{r^2}}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\text{sign}(e)}_{\text{Vorzeichen}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{nach } \vec{r}}} = \frac{\gamma \cdot e \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\gamma \cdot e}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Divergenz des Coulombfelds: $\vec{v}(\vec{r}) = C \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ (mit $r = |\vec{r}|$)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{C x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{C \cdot \overset{2}{r^2} - \overset{\text{Zähler}}{C x} \cdot \overset{\text{innere}}{2x} \cdot \overset{\text{äussere Ableitung}}{\frac{3}{2}}}{r^5}$$

$$= C \cdot \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{C y}{r^3} = C \cdot \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = C \cdot \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{C}{r^5} (3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = \underline{0}.$$

Rotation des Coulombfelds: $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v}$

$$x\text{-Komponente: } v_{3,y} - v_{2,z} = C \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} \right)$$

$$= C \cdot \left(-\frac{z \cdot 3y}{r^5} + \frac{3yz}{r^5} \right) = 0$$

Analog für y- und z-Komponente: $= 0$
 $\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{0}.$

Bsp: Gravitationskraft des Massepunkts m , anziehend:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \underbrace{-}_{\text{passendes Vorzeichen}} \underbrace{G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{weg vom Ursprung}}} = C \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ wie Coulombfeld}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0, \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

Bsp: Magnetfeld des stromdurchflossenen, geraden Leiters

Hier: Leiter in z-Achse

\Rightarrow Gesetz von Biot-Savart: Dies erzeugt ein Magnetfeld \vec{B} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = 2 \cdot \underbrace{I}_{\text{Stromstärke}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad \text{mit } x^2 + y^2 \neq 0, \\ \text{d.h. nicht in z-Achse.}$$

Eigenschaften: • \vec{B} ist stationär, d.h. nicht zeit-abhängig (solange J konstant ist!)

• \vec{B} ist nicht homogen: $\vec{B}(1,0,0) = 2 \cdot J \cdot (0, 1, 0) \neq 2J \cdot (-1,0,0) = \vec{B}(0,1,0)$

• Die Feldlinien von \vec{B} liegen parallel zur xy -Ebene, da $B_z(\vec{r}) \equiv 0$.

• $\vec{B}(\vec{r})$ steht senkrecht auf \vec{r} : $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

• \vec{B} erzeugt in der xy -Ebene eine Rotation im Gegenuhrzeigersinn, d.h. die Feldlinien sind Kreise um die z -Achse.

• $|\vec{B}(\vec{r})| = 2 \cdot |J| \cdot \sqrt{\frac{(-y)^2 + x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{2 \cdot |J|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, d.h. $|\vec{B}|$ ist

umgekehrt proportional zum Abstand zur z -Achse/zum Leiter.

• $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 2J \cdot \left(\overset{\text{Neuer}}{\frac{(-y) \cdot (-1) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}} + \overset{\text{innere Abl.}}{\frac{x \cdot (-1) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}} + \overset{\text{Exponent}}{0} \right) = \underline{\underline{0}}$

Bsp: Fluss im Rohr in z -Richtung, Radius a , mit inneren Widerstand der Flüssigkeit und starker Reibung am Rand

→ Hagen-Poiseuille-Strömung: $\vec{v}(\vec{r}) = (0, 0, C \cdot \underbrace{(a^2 - x^2 - y^2)})$
↙ Konstante > 0
↘ > 0

• Vektorspitzen für Punkte mit gleicher z -Koordinate formen ein Paraboloid. Die Geschwindigkeit ist in der Rohrmitte maximal und quadratisch abfallend zur Rohrwand mit $\vec{v} = \vec{0}$.

• $\text{div } \vec{v} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

Frage: Flussmenge pro Sekunde?

VI.3 Flächen im Raum

Frage: Sei S eine Fläche im Raum. Was ist ihre Oberfläche?

Problem: Krumme Oberflächen! Wie misst man das?

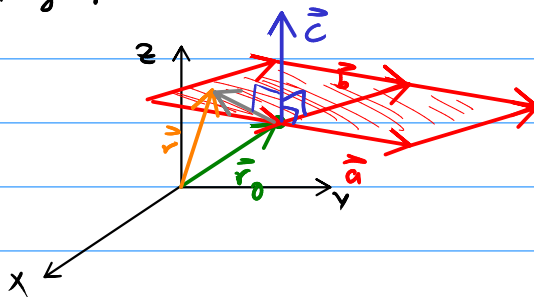
Beschreibung von S : I Parameterdarstellung:

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

II Implizit: Lösungsmenge von $g(x, y, z) = 0$

III Explizit: Graphen von Funktionen $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$
 \mathbb{R}^2

Bsp: Ebene im Raum durch $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit Ortsvektor $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,
aufgespannt durch 2 Vektoren \vec{a}, \vec{b} (nicht parallel, nicht $\vec{0}$)



I: $\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}, \quad u, v \in \mathbb{R}$

II: $(\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{=\vec{c}}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

III: $z = f(x, y) = z_0 + \frac{c_1 \cdot (x_0 - x) + c_2 \cdot (y_0 - y)}{c_3}$

mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

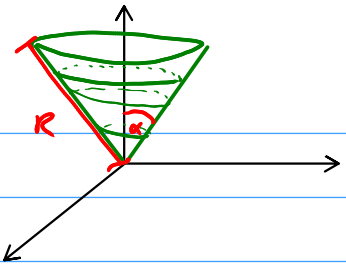
Bsp: Kugel mit Radius R mit Mittelpunkt im Ursprung

I: $\vec{r}(u, v) = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$

II: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

III: $f_{1,2}(x, y) = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (= z)$

Bsp: Mantel eines Kreiskegels



Verwende Kugelkoordinaten:

$$u = r = [0, R], \quad \alpha = \theta, \quad v = \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow I: \vec{r}(u, v) = (u \cdot \sin \alpha \cdot \cos v, u \cdot \sin \alpha \cdot \sin v, u \cdot \cos \alpha) \quad (\text{Übung: II?})$$

Def: Die **Parameterlinien** einer Parametrisierung $\vec{r}(u, v)$ sind:

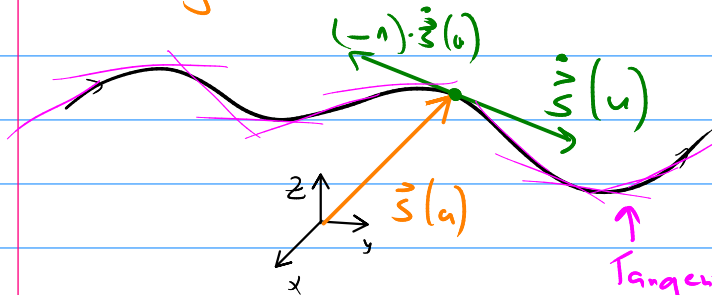
- **v-Linie**: Halte $u = u_0$ fix, betrachte Raumkurve $v \mapsto \vec{r}(u_0, v)$
- **u-Linie**: Halte $v = v_0$ fix, betrachte Raumkurve $u \mapsto \vec{r}(u, v_0)$

01.04.2022

Themen: Tangentefläche, Normaleneinheitsvektor, Oberflächenberechnung

Bsp: Sei K eine Raumkurve mit Parametrisierung $\vec{s}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}$

\Rightarrow **Tangentenfläche** S von K : $\vec{r}(u, v) = \vec{s}(u) + v \cdot \dot{\vec{s}}(u)$

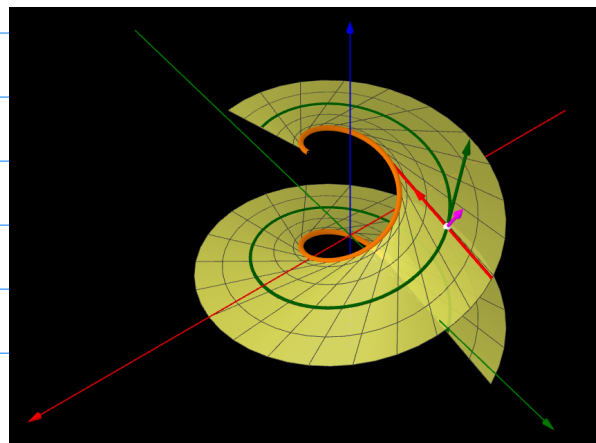


$$v = 0 \Rightarrow u\text{-Linie} = K.$$

Tangenten: $u = u_0$ fix, v variiert \Rightarrow v-Linie

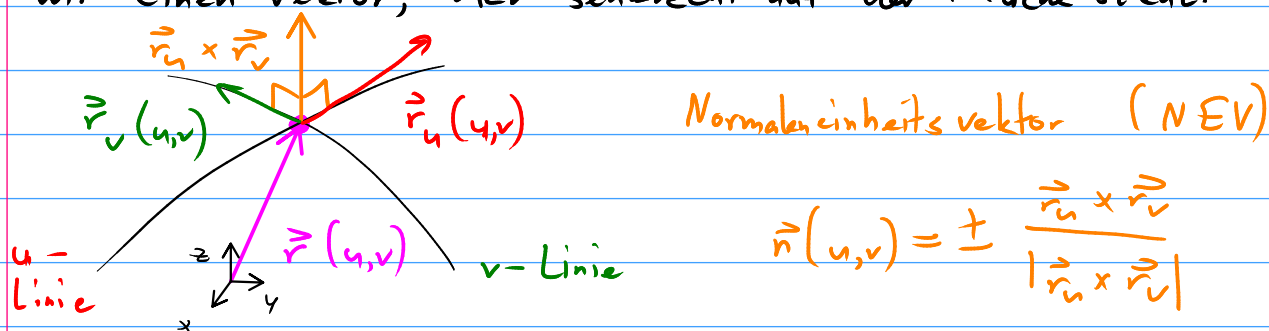
Bsp: **Schraubenlinie**: $\vec{s}(u) = (\cos u, \sin u, h \cdot u), \quad h > 0$

Tangentenfläche
der Schraubenlinie:



Normaleneinheitsvektor

Um Oberflächeninhalte und Flüsse zu berechnen, benötigen wir einen Vektor, der senkrecht auf der Fläche steht.



Der NEV ist bis auf das Vorzeichen eindeutig und unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Das Vorzeichen muss passend zur Anwendung gewählt werden.

Bsp: Tangentenfläche zu $\vec{s}(u)$: $\vec{r}(u,v) = \vec{s}(u) + v \cdot \dot{\vec{s}}(u)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_u = \dot{\vec{s}}(u) + v \cdot \ddot{\vec{s}}(u) \\ \vec{r}_v = \dot{\vec{s}}(u) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = v \cdot \ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u), \text{ da } \dot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u) = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \pm \frac{v \cdot \ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)}{|v| \cdot |\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)|} = \pm \frac{\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)}{|\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)|}$$

= ± 1, geht ins Vorzeichen

⇒ Der NEV der Tangentenfläche hängt nicht von v ab, d.h. er ist konstant entlang einer v -Linie.

Bsp: Schraubenlinie: $\vec{s}(u) = (\cos u, \sin u, h \cdot u)$, $h > 0$

$$\Rightarrow \dot{\vec{s}}(u) = (-\sin u, \cos u, h)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{s}}(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

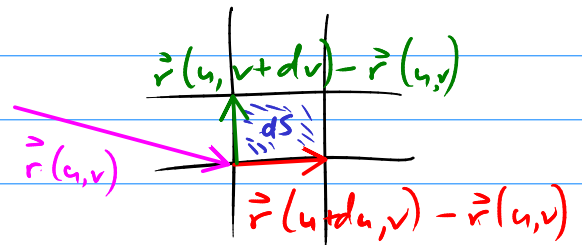
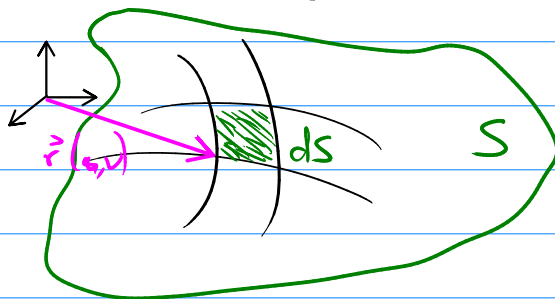
$$\Rightarrow \ddot{\vec{s}} \times \dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} -h \cdot \sin u \\ h \cdot \cos u \\ -\cos^2 u - \sin^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \sin u \\ h \cos u \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\ddot{\vec{s}} \times \dot{\vec{s}}| = \sqrt{h^2 \sin^2 u + h^2 \cos^2 u + 1} = \sqrt{h^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(u, v) = \pm \frac{(-h \sin u, h \cos u, -1)}{\sqrt{h^2 + 1}}, \quad \begin{array}{l} \text{unabhängig von } v, \\ \text{rotiert in } xy \text{ mit } u, \\ z\text{-Anteil bleibt konstant} \end{array}$$

Flächen, für die die z -Koordinate des NEV konstant bleibt, heißen **Böschungsflächen**.

Oberflächenberechnung



Flächeninhalt eines
Flächenstücks dS ?

\Rightarrow Flächeninhalt $\hat{=}$ |Vektorprodukt|!
(wie bei Koordinatentransformationen)

$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt von } dS =: dO = |\det J| du dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtfläche } O \text{ von } S: \quad O = \iint_B |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = \iint_B dO$$

\uparrow
 $B = \text{Parameterbereich}$

Bsp: Kugeloberfläche, Radius R

$$\vec{r}(u, v) = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \underbrace{\quad}_{=B}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = R^2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin v \sin u \\ \sin v \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

$$= R^2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \sin^2 u - \sin v \cos v \cos^2 u \end{pmatrix} = -R^2 \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dO = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = R^2 \sqrt{\underbrace{\sin^4 v \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u)}_{\substack{\sin^2 v \cdot \sin^2 v \\ = 1}} + \sin^2 v \cos^2 v} du dv$$

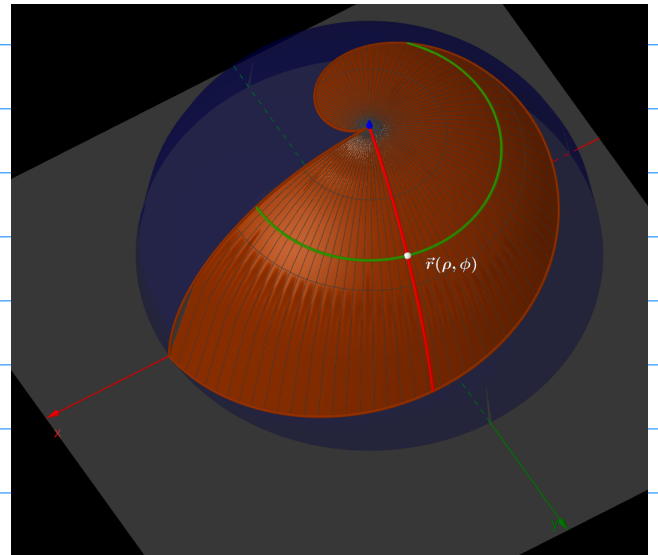
$$= R^2 \cdot \sqrt{\sin^2 v} du dv = R^2 \underbrace{\sin v}_{\geq 0 \text{ da } v \in [0, \pi]} du dv$$

$$\Rightarrow \underline{O} = \iint_B R^2 \sin v du dv = \underline{\underline{4\pi R^2}}$$

Bsp: Sei A in xy -Ebene begrenzt durch die Kurve $s = \cos(\varphi/4)$ und die x -Achse.

Sei S der Ausschnitt der Kugel, der über A liegt.

Welchen Oberflächeninhalt O hat S ?



Parametrisierung von A : $x(s, \varphi) = s \cos \varphi$, $y(s, \varphi) = s \sin \varphi$, $z(s, \varphi) = \sqrt{1-s^2}$ von S :

$\varphi \in [0, 2\pi]$
 $s \in [0, \cos(\varphi/4)]$
 $= B$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ (-1/s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s \times \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} s^2 \cos \varphi / \sqrt{1-s^2} \\ s^2 \sin \varphi / \sqrt{1-s^2} \\ s(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_s \times \vec{r}_\varphi| = \sqrt{\frac{s^4}{1-s^2} + s^2} = \sqrt{\frac{s^4 + s^2 - s^4}{1-s^2}} = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{0}} &= \iint_B \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos(\varphi/4)} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-s^2} \right]_0^{\cos(\varphi/4)} d\varphi = \int_0^{2\pi} -\sin(\varphi/4) + 1 d\varphi \\ &= \underline{\underline{2\pi - 4}} \end{aligned}$$

Bsp: Tangentenfläche der Schraubenlinie im 1. Oktanten

$$z = hu + hv \geq 0 \Rightarrow v \geq -u$$

$$\vec{r}(u, v) = \vec{s}(u) + v \cdot \vec{\dot{s}}(u)$$

$$B^? \quad \begin{aligned} u &\in [0, \pi/2] \\ v &\in [-u, 0] \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ hu \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = v \cdot (-h \sin u, h \cos u, -1)$$

$$\Rightarrow dO = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |v| \cdot \sqrt{h^2 + 1} dv du$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0}} = \int_0^{\pi/2} \int_{-u}^0 |v| \cdot \sqrt{h^2 + 1} dv du = \sqrt{h^2 + 1} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{v^2}{2} \right]_{-u}^0 du$$

$= -v, \text{ da } v \leq 0$

$$= \sqrt{h^2 + 1} \int_0^{\pi/2} 0 - \left(-\frac{u^2}{2} \right) du = \left[\frac{u^3}{6} \right]_0^{\pi/2} \cdot \sqrt{h^2 + 1} = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{48} \sqrt{h^2 + 1}}}$$

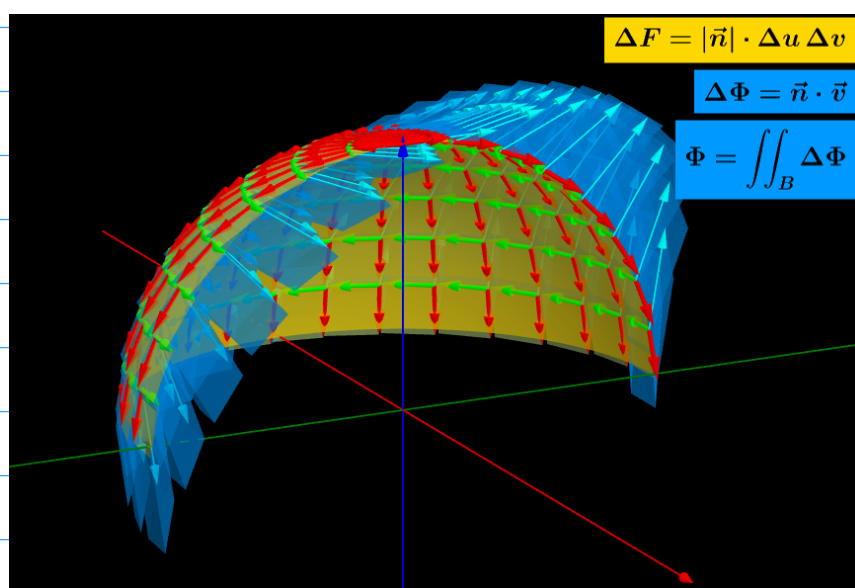
Themen: Fluss eines Vektorfelds, Beispiele, Divergenzsatz

VI.4 Der Fluss

 \mathbb{R}^3

Sei \vec{v} ein Vektorfeld $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $S \subset B$ eine Fläche.

Wie gross ist der Fluss von \vec{v} durch S ? Bsp: Flüssigkeit, Gas, Wärme



Bsp möglichst einfach: \vec{v} eben, S ein Strecke, \vec{v} homogen

Fluss hängt nun ab von:

- Betrag $|\vec{v}|$
- Länge von S , $|S| = O$
- Winkel zwischen \vec{v} und S : Nur der Teil von \vec{v} , der wirklich "durch S fließt", ist entscheidend.

⇒ Der Fluss Φ von \vec{v} durch S ist: $\Phi = (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot O$
 \hookrightarrow Oberfläche von S ,
 bzw Länge

Wie sieht dies allgemein aus?

- \vec{v} ist an jedem Punkt definiert / berechenbar
- \vec{n} kann überall berechnet werden
- O ist nicht mehr proportional und sollte mit $\iint \dots dO$ ersetzt werden

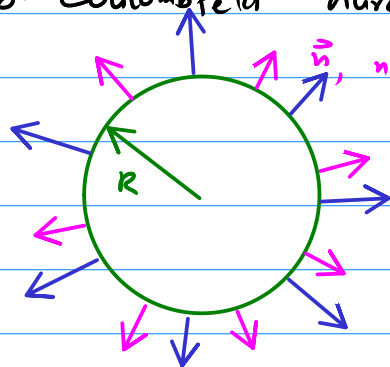
⇒ Flussanteil des Flächenstücks dO : $d\Phi = (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO$

→ Fluss Φ von \vec{v} durch S in Richtung \vec{n} ist:

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO$$

↳ \vec{n} verändert sich mit dO ,
bleibt aber auf einer Seite
von S .

Bsp: Coulombfeld durch die Kugeloberfläche mit Radius R , nach aussen



$\vec{v} = C \cdot \frac{e}{r^3} \cdot \vec{r}$, mit $r = |\vec{r}| = R$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_K C \cdot \frac{e}{R^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \, dO$$

$= R$, da \uparrow parallel
 $\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = |\vec{r}| \cdot |\vec{n}| = R \cdot 1$

$$= C \cdot \frac{e}{R^3} \underbrace{\iint_K R \, dO}_{= \text{Kugeloberfläche}} = \frac{Ce}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \underline{\underline{4\pi \cdot C \cdot e}}$$

Bemerkungen:

- $\vec{v} \cdot \vec{n}$ war hier besonders einfach, da parallel
- Φ hängt nicht von R ab: Das Vektorfeld nimmt so schnell ab wie die Kugeloberfläche zunimmt.

Sei S parametrisiert durch $\vec{r}(u,v)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \quad dO = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot dO = \pm (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$$

! Normalisierung und
Jacobideterminante kürzen sich!

→ Fluss von \vec{v} durch parametrisierte Fläche S :

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \pm \iint_B \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)) \, du \, dv$$

Fläche \uparrow Parameterbereich \uparrow
Vorzeichen von \vec{n} \downarrow ohne Betrag, wurde gekürzt!

Bsp: $\vec{v} = (xz, z, y)$, $S = \text{Einheitskugel}$, \vec{n} nach aussen

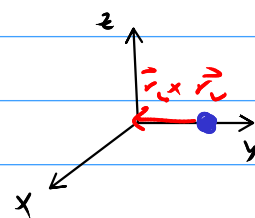
$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] = B$$

$$\Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix}$$

In welche Richtung zeigt $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$? Braucht evtl. Vorzeichenwechsel!

→ Berechne an einem Punkt: $u=v=\pi/2$

$$\Rightarrow \vec{r}(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



→ $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ zeigt nach innen, Vorzeichen wechseln!

$$\Rightarrow \Phi = - \iint_B \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

$$= \oint \iint_B \begin{pmatrix} \sin v \cos u \cos v \\ \cos v \\ \sin v \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +\sin^2 v \cos u \\ +\sin^2 v \sin u \\ +\sin v \cos v \end{pmatrix} du dv$$

$$B = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos^2 u \cos v + \sin^2 v \cos v \sin u + \sin^2 v \cos v \sin u du dv$$

$$= \int_0^\pi \sin^3 v \cos v dv \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 u du$$

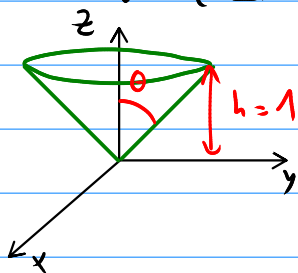
$$\int_0^{2\pi} \sin u du = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin u du = 0$$

$$= \left[\frac{\sin^4 v}{4} \right]_0^\pi \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{0}$$

Bsp: Kegelmantel S mit Polarwinkel $\theta = \pi/4$ und maximaler Höhe $= 1$,

$\vec{v} = (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$, \vec{n} nach aussen



Fläche S parametrisieren:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi] \\ s \in [0, 1] \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s \times \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -s \cos \varphi \\ -s \sin \varphi \\ s \end{pmatrix}, \text{ zeigt nach innen, also "}" verwenden}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_B \begin{pmatrix} 2s \cos \varphi - s^2 \sin \varphi \\ s^2 \cos \varphi + 3s \sin \varphi \\ s^2 \cos \varphi \sin \varphi - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ -s \end{pmatrix} d\varphi ds$$

$$= \iint_B s^2 \cdot \left(\underbrace{2 \cos^2 \varphi}_{\int_0^{2\pi} = \pi} - \underbrace{s \sin \varphi \cos \varphi}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{s \cos \varphi \sin \varphi}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{3 \sin^2 \varphi}_{\int_0^{2\pi} = \pi} - \underbrace{s \cos \varphi \sin \varphi}_{\int_0^{2\pi} = 0} + 1 \right) d\varphi ds$$

$$= \int_0^1 s^2 \cdot (2\pi + 3\pi + 2\pi) ds = 7\pi \cdot \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{7}{3}\pi}}$$

VI.5 Der Divergenzsatz

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Volumen mit $B \subset D(\vec{v})$,
berandet durch die Fläche $S = \partial B$, den Rand von B

Divergenzsatz von Gauss: Der Fluss von \vec{v} durch ∂B nach aussen ist

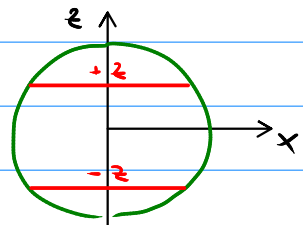
$$\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV$$

Voraussetzung: \vec{v} ist in ganz B definiert und diff'bar

Bsp: $\vec{v} = (xz, z, y)$ durch Kugeloberfläche mit Radius 1 nach aussen
= ∂B , Rand der Einheitskugel B

$$\text{Divergenzsatz: } \Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{1,x} + v_{2,y} + v_{3,z} = z \Rightarrow \underline{\underline{\Phi = \iiint_B z dV = 0}}$$



Bsp: Coulombfeld durch Kugeloberfläche mit Radius R :

$$\vec{v} = C \cdot \frac{e}{r^3} \cdot \vec{r} \quad \text{mit } r = |\vec{r}|, \quad \text{nicht definiert in } \vec{r} = \vec{0}!$$

⇒ Divergenzatz ist auf diese Fläche nicht anwendbar.

06.04.2022

Themen: Beweis Divergenzatz, Beispiele, Divergenz als Quelle, Anwendungen

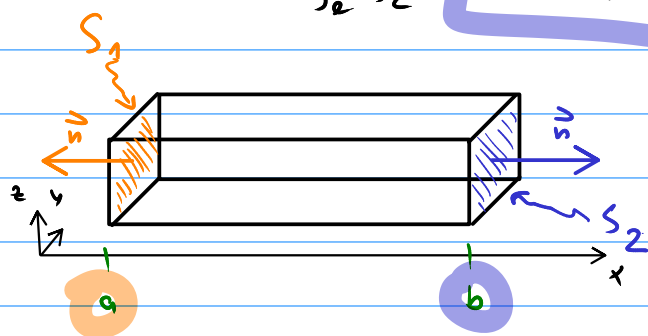
Beweis Divergenzatz für Quader $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \iiint_B v_{1,x} dV + \iiint_B v_{2,y} dV + \iiint_B v_{3,z} dV$$

$$\iiint_B \frac{\partial v_1}{\partial x} dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial v_1}{\partial x} dx dy dz$$

$$= \int_e^f \int_c^d v_1(b, y, z) - v_1(a, y, z) dy dz$$

$$= \int_e^f \int_c^d \left[\vec{v}(b, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}(a, y, z) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dy dz$$



$$= \iint_{S_1 \cup S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dO$$

Analog: $v_{2,y}$ für hinten/vorne
 $v_{3,z}$ für oben/unten

⇒ □

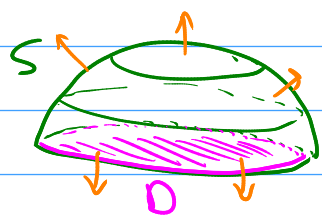
Vergleiche mit Hauptsatz: $\int_{I=[a,b]} f'(x) dx = f(b) \cdot (+1) + f(a) \cdot (-1)$

Bsp (Niveau Basisprüfung): $\vec{v} = (\ln(1+y^2 z^4), e^{-x^2 \cos z}, z^2 + 1)$

S : Obere Halbkugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$,
 \vec{n} nach aussen orientiert. Fluss von \vec{v} durch S ?

Problem: $\vec{v} \cdot \vec{n}$ wohl nicht einfach integrierbar.

Divergenzsatz? S umschließt kein Volumen V !



$\Rightarrow S \cup D$ umschließt nun eine obere Halbkugel,
also $\partial V = S \cup D$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV &= \iint_{S \cup D} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_D \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \underbrace{\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV}_I - \underbrace{\iint_D \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma}_{II}$$

I: $\operatorname{div} \vec{v} = 0 + 0 + 2z = 2z$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \ln(1+y^2 z^4) \\ e^{-x^2} \cos z \\ z^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V 2z dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \underbrace{2r \cos \theta}_{2z} \cdot \underbrace{r^2 \sin \theta dr d\theta dz}_{dV} \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\pi/2} \underbrace{2 \cos \theta \sin \theta d\theta}_{g'(x)} = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\left[\sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2}}_{f(g(x))} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

II: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ für die Fläche D

$$\Rightarrow \iint_D \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(1+y^2 z^4) \\ e^{-x^2} \cos z \\ \underbrace{z^2 + 1}_{z=0 \text{ in } D} \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\sigma = \iint_D -1 d\sigma = -\pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi}} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$

Senken & Quellen

Sei P_0 mit Ortsvektor $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und ΔV ein Volumen mit $P_0 \in \Delta V$ und Rand $\partial(\Delta V)$.

Was passiert, wenn ΔV zum Punkt P_0 schrumpft?

$$\vec{v} \text{ Vektorfeld} \Rightarrow \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} dV = \iint_{\partial(\Delta V)} \vec{v} \cdot \vec{n} dO$$

Mittelwertsatz: Es gibt ein $P_r = (x_r, y_r, z_r) \in \Delta V$ mit

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} dV = \operatorname{div} \vec{v}(x_r, y_r, z_r) \cdot \operatorname{vol}(\Delta V)$$

Mit $\operatorname{vol}(\Delta V) \rightarrow 0$ während $P_0 \in \Delta V$ gilt



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}_0) &= \lim_{\operatorname{vol} \rightarrow 0} \operatorname{div} \vec{v}(x_r, y_r, z_r) = \lim_{\operatorname{vol} \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Delta V)} \cdot \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} dV \\ &= \lim_{\operatorname{vol} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\operatorname{vol}(\Delta V)}}_{1/\text{Volumen}} \cdot \underbrace{\iint_{\partial(\Delta V)} \vec{v} \cdot \vec{n} dO}_{\text{Fluss}} = \frac{\text{Fluss}}{\text{Volumen}} \end{aligned}$$

→ Divergenz misst also infinitesimal den Flussbeitrag pro Volumen.

Die obige Gleichung heisst die Koordinatenfreiheit der Divergenz, denn der Ausdruck $\lim \text{Fluss}/\text{Volumen}$ hängt nicht mehr vom gewählten Koordinatensystem ab.

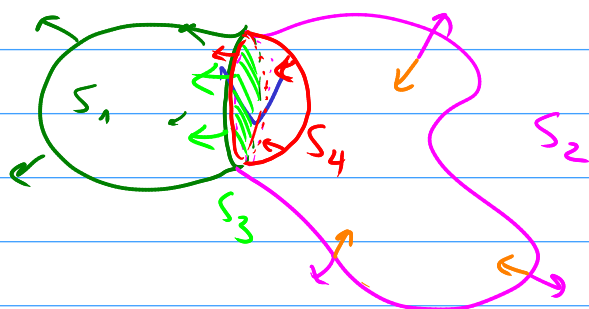
Satz: Wenn (ξ, η, ζ) ein anderes kartesisches Koordinatensystem ist, dann gilt für \vec{v} (also \vec{v} im neuen Koordinatensystem):

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{1,x} + v_{2,y} + v_{3,z} = \tilde{v}_{1,\xi} + \tilde{v}_{2,\eta} + \tilde{v}_{3,\zeta} = \operatorname{div} \vec{\tilde{v}}.$$

Fazit: Flüsse entstehen aus Divergenz

- $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}_0) > 0 \Rightarrow p_0$ ist eine **Quelle** von \vec{v} .
- $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}_0) < 0 \Rightarrow p_0$ ist eine **Senke** von \vec{v} .
- Wenn $\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$ (überall!), ist \vec{v} **quellenfrei**.

\Rightarrow Wenn $S = \partial V$ ein Volumen berandet, gilt
 $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV = 0$, d.h. der Fluss durch jeder Randfläche eines $V \in \mathcal{D}(\vec{v})$ ist immer 0.



$$0 = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV$$

$$= \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$= \iint_{S_2} \vec{v} \cdot (-\vec{n}) d\sigma$$

\Rightarrow Der Fluss für Flächen mit gemeinsamem Rand ist gleich gross, egal welche Fläche gewählt wurde.

- Wenn $\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0}$, ist **rotationsfrei**

VI.6 Anwendungen des Divergenzgesetzes

Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

Stationäres Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z, t)$, $s(x, y, z, t)$
 Strömungsfeld Dichte

Sei B ein Volumen im Strömungsfeld

Masse in B zum Zeitpunkt t : $m(t) = \iiint_B s(x, y, z, t) dV$

Zeitliche Änderung: $m'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_B s dV = \iiint_B s_t dV$

Gesetz der Erhaltung der Materie: Änderung erfolgt über Zu-/Abfluss, also den Fluss von $g\vec{v}$ durch ∂B nach aussen:

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_{\partial B} (g\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma}_{\text{Abfluss}} = -m'(t) = -\iiint_B s_t dV$$

$$\iiint_B \operatorname{div}(g\vec{v}) dV \quad // \quad + \iiint_B s_t dV$$

$$\Rightarrow \iiint_B \operatorname{div}(g\vec{v}) + s_t dV = 0, \text{ für jedes Volumen } B.$$

Für jedes B , $\iiint = 0 \Rightarrow \text{Integrand} = 0$, also $\boxed{\operatorname{div}(g\vec{v}) + s_t = 0}$

Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

Spezialfälle: (a) Falls g stationär ist, ist $s_t = 0$
 $\Rightarrow \operatorname{div}(g\vec{v}) = 0$, d.h. $(g\vec{v})$ ist quellenfrei.

Es gilt (Übung!): $\operatorname{div}(g\vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{div} \vec{v}$

\Rightarrow (b) Falls g konstant ist (auch räumlich!) ist $\operatorname{grad} g = \vec{0}$
 und damit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, d.h. \vec{v} ist quellenfrei.
 \Rightarrow Strömungsfelder von inkompressiblen Medien sind quellenfrei.

08.04.2022 Themen: Wärmeleitungsgleichung, Grundgleichung der Elektrostatik, Hydrostatischer Auftrieb, Arbeit

Wärmeleitungsgleichung

Seien K ein homogener Körper und $u(x, y, z, t)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t an der Stelle (x, y, z) .

\Rightarrow Wärmemenge in einen Teilkörper $B \subset K$:

$$W(t) = \iiint_B c \cdot \rho \cdot u(x, y, z, t) dV$$

\uparrow Spez. Wärme \nwarrow Dichte, beide const., > 0

$$\Rightarrow W'(t) = \iiint_B c \cdot s \cdot u_t dV$$

Energieerhaltung: Wärmeänderung ist ein Zu-/Abfluss

Newton: Wärmefluss durch Flächenstück dS ist proportional zur Richtungsableitung $D_{\vec{n}} u$ und dem Flächeninhalt dO .

$$\Rightarrow dW = -k \underbrace{\text{grad } u \cdot \vec{n}}_{\substack{\text{const.}, > 0 \\ = D_{\vec{n}} u}} \cdot dO, \text{ austretende Wärme durch } dS$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Wärmeveränderung: } W'(t) &= \iiint_B c \cdot s \cdot u_t dV \stackrel{\substack{\text{-dW aufintegriert über } \partial B \\ \downarrow}}{=} \iint_{\partial B} k \cdot \text{grad } u \cdot \vec{n} dO \\ &\stackrel{\substack{\text{grad } u \text{ ist ein Vektorfeld} \Rightarrow \text{Div-Satz}}}{=} k \cdot \iiint_B \underbrace{\text{div}(\text{grad } u)}_{\substack{= \Delta u, \text{ Laplace-Op} \\ = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}}} dV \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_B c \cdot s \cdot u_t - k \cdot \Delta u dV = 0$$

Muss für beliebige BCK gelten $\Rightarrow c \cdot s \cdot u_t - k \cdot \Delta u \equiv 0$ konstant

$$\text{Setze } a^2 := \frac{k}{c \cdot s} > 0 \Rightarrow \boxed{u_t - a^2 \cdot \Delta u = 0} \quad \begin{array}{l} \text{Wärmeleitungs-} \\ \text{gleichung;} \\ \text{eine lineare partielle} \\ \text{Differentialgleichung} \end{array}$$

Spezialfall: K isoliert $\Rightarrow u$ wird mit $t \rightarrow \infty$ stationär

$\Rightarrow u_t = 0$ für t gross $\Rightarrow \Delta u \stackrel{!}{=} 0$, d.h. u ist harmonisch, Lösung der Laplace-DGL.

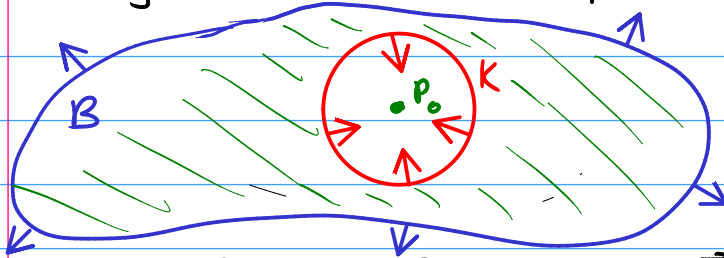
Grundgleichung der Elektrostatik

Elektrisches Feld einer Punktladung e im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = e \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}, \text{ mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, C = 1$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} \equiv 0$, quellenfrei, aber in \vec{r}_0 nicht definiert.

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Volumen mit $P_0 \in B$, Rand ∂B ,
Kugel $K \subset B$ mit Mittelpunkt P_0 .



In $\bar{B} = B \cup \partial B \setminus K$ ist \vec{E} definiert
 \Rightarrow Divergenzsatz ist anwendbar!

$$\Rightarrow 0 = \iiint_{\bar{B}} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iint_{\partial \bar{B}} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = \iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO + \iint_{\partial K} \vec{E} \cdot \vec{n} dO$$

Richtung von \vec{n} ?

∂B : nach aussen, ∂K : nach innen,
jeweils weg von \bar{B} .

\vec{n} nach innen, $4\pi\epsilon$ ist nach aussen

$$\Rightarrow \iint_{\partial K} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = -4\pi\epsilon = -\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = 4\pi\epsilon, \text{ f\"ur jedes Volumen } B \text{ mit } P_0 \in B.$$

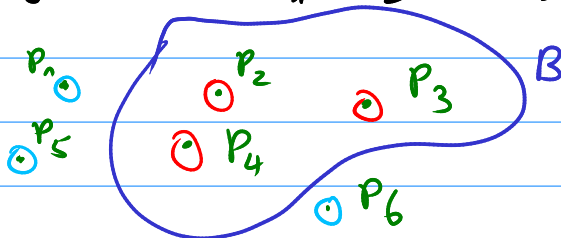
\Rightarrow Im Allgemeinen gilt also f\"ur beliebige $B \subset \mathbb{R}^3$:

$$\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = \begin{cases} 4\pi\epsilon, & \text{falls } P_0 \in B \\ 0, & \text{falls } P_0 \notin B \end{cases}$$

Bei mehreren Punktladungen e_1, \dots, e_m in Punkten P_1, \dots, P_m

$\leftarrow E\text{-Feld von } P_2$

$$\text{gilt: } \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_m \Rightarrow \iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = 4\pi \cdot \sum_{i: P_i \in B} e_i$$



\odot Tr\"agt zum Fluss bei
 \circ Kein Beitrag zum Fluss

F\"ur die Ladungsdichte $\rho(x, y, z)$ statt Punktsquellen folgt

$$\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = 4\pi \iiint_B \rho dV \quad (\text{Integral statt Summe})$$

Divergenzsatz: $\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dO = \iiint_B \operatorname{div} \vec{E} dV$

$\Rightarrow \iiint_B \operatorname{div} \vec{E} - 4\pi \rho dV = 0$, für jedes Volumen $B \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho}$, Grundgleichung der Elektrostatik,
eine der vier Maxwell-Gleichungen.

Hydrostatischer Auftrieb

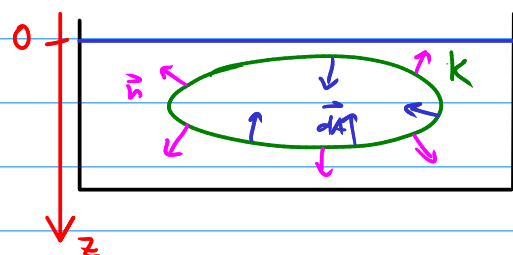
Sei K ein Körper, der in eine Flüssigkeit mit spezifischem Gewicht γ ganz eingetaucht wird

Archimedisches Prinzip: K erfährt eine Auftriebskraft entsprechend der Gewichtskraft des verdrängten Mediums.

Sei der Flüssigkeitsspiegel horizontal.

In Tiefe z herrsche Druck $p(z) = p_0 + \gamma z$

\Rightarrow Auf das Flächenstück dO von ∂K wirkt die Kraft $d\vec{A} = -(p_0 + \gamma z) \cdot \vec{n} dO$



Auf K wirkt die Kraft $\vec{A} = \iint_{\partial K} d\vec{A} = \begin{pmatrix} -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_1 dO \\ -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_2 dO \\ -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_3 dO \end{pmatrix}$,
 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

• x-Koordinate: $(p_0 + \gamma z) \cdot n_1 = \begin{pmatrix} p_0 + \gamma z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}$
 $=: \vec{v}$, mit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

$\Rightarrow -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_1 dO = -\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = -\iiint_K \operatorname{div} \vec{v} dV = 0$.

• y-Koordinate: Analog mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 + \gamma z \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_2 dO = 0$.

z-Koordinate: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + \gamma z \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \gamma$

$$\Rightarrow -\iint_{\partial K} (p_0 + \gamma z) \cdot n_3 dO = -\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = -\iiint_K \operatorname{div} \vec{v} dV$$

$$= -\iiint_K \gamma dV = -\gamma \cdot V, \text{ mit } V = \operatorname{vol}(K)$$

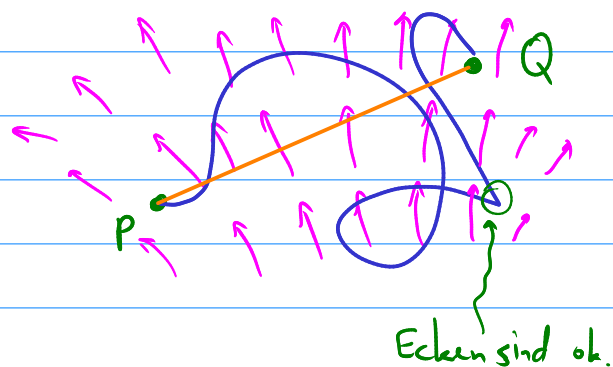
$\Rightarrow \vec{A} = (0, 0, -\gamma V)$, das Archimedisches Prinzip.

VI.7 Die Arbeit

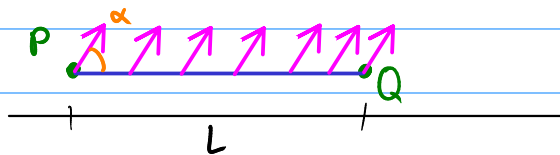
Sei $\vec{v}(x, y, z)$ ein Kraftfeld und P, Q zwei Punkte in $D(\vec{v})$.
Sei W ein **Weg** von P nach Q , d.h. eine Kurve mit Startpunkt P , Endpunkt Q , bestehend aus diff'baren Kurvenstücken.

Ein Teilchen, das sich entlang W bewegt, erfährt eine Kraft \vec{v} .

$\Rightarrow \vec{v}$ leistet eine mechanische **Arbeit** entlang des Wegs W .



Bsp: \vec{v} homogen, W verbindet P und Q gradlinig, Abstand L



Arbeit $A = L \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{PQ}$,
denn A skaliert mit der Länge L ,
dem Betrag $|\vec{v}|$, aber nur der Anteil
von \vec{v} in Richtung W spielt eine Rolle.

Allgemeiner betrachten wir die Arbeit dA entlang des Wegstückes $d\vec{r}$ von W : $dA = \vec{v} \cdot d\vec{r}$, da infinitesimal betrachtet ist
 \vec{v} homogen und $d\vec{r}$ gradlinig.

$$\Rightarrow \text{Arbeit } A := \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad \text{von } \vec{v} \text{ entlang } W$$

Physikalisch betrachtet: \vec{v} selbst leistet A , d.h.

- $A > 0 \Rightarrow$ Teilchen wird von \vec{v} geschoben
- $A < 0 \Rightarrow$ Es muss Arbeit $|A|$ aufgewendet werden, um gegen \vec{v} „anzukämpfen“.

13.04.2022 Themen: Arbeit entlang parametrisierten Wegen, Beispiele, Operationen von Wegen, Satz von Stokes

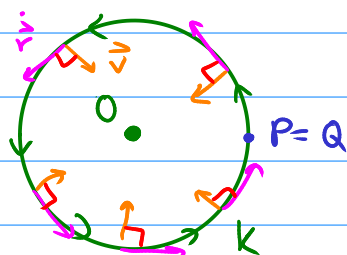
Arbeit entlang eines parametrisierten Wegs

Sei W gegeben durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_p, t_Q]$ mit $\vec{r}(t_p) = \vec{OP}$ und $\vec{r}(t_Q) = \vec{OQ}$

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) dt \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

$$\Rightarrow A = \int_{t_p}^{t_Q} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_p}^{t_Q} \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t), z(t)) \\ v_2(x(t), y(t), z(t)) \\ v_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt$$

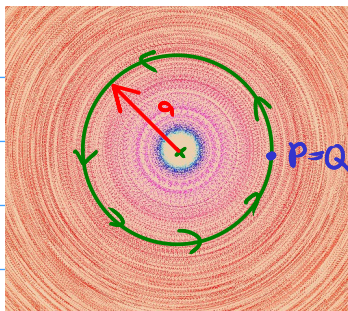
Bsp: Gravitationsfeld: $\vec{v}(\vec{r}) = -C \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ mit $r = |\vec{r}|$,
 $W = K$, ein Kreis um O in der xy -Ebene, Radius R



Hier: \vec{v} und $\dot{\vec{r}}$ sind immer senkrecht
 $\Rightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A = 0}}$

Bsp: Stromdurchflossener Leiter, Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{v}(x, y, z) = 2 \cdot j \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$



$W=K$, Kreis um 0 in xy -Ebene, Radius a

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

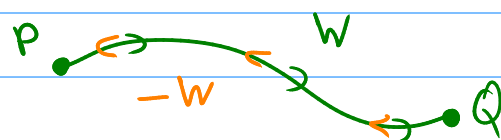
$$\begin{aligned} \underline{A} &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{v}(\vec{r}(t))}_{\vec{v}(\vec{r}(t))} \cdot \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\dot{\vec{r}}(t)} dt = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin t / a^2 \\ a \cos t / a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t + 0 dt = \underline{4\pi}, \quad \text{d.h. } A \text{ ist unabhängig von Radius } a. \end{aligned}$$

Bsp: $\vec{v}(x, y, z) = (2xy, x^2 + y^2, 0)$

$W=E$, eine ebene Ellipse: $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \int_E \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2ab \cos t \sin t \\ a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{-2ab \cos t \sin^2 t}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{a^2 b \cos^3 t}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{b^3 \sin^2 t \cos t}_{\int_0^{2\pi} = 0} dt = \underline{0} \end{aligned}$$

Operationen von Wegen

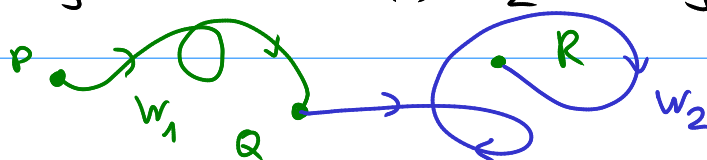


- W ein Weg von P nach Q

$\Rightarrow -W$ ist der umgekehrte Weg von Q nach P .

\Rightarrow Wenn $A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$, dann ist $\int_{-W} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_W \vec{v} \cdot (-\dot{\vec{r}}(t)) dt = \underline{-A}$
rückwärts!

- W_1 ein Weg von P nach Q , W_2 ein Weg von Q nach R



→ $w_1 + w_2$ ist der Weg von P nach R via Q entlang w_1, w_2

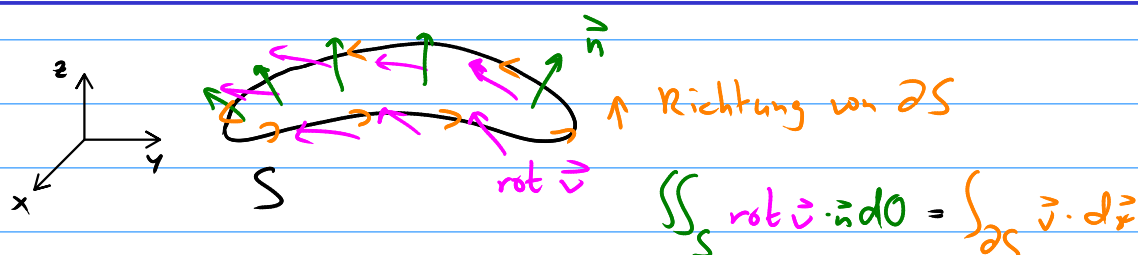
$$\int_{w_1 + w_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{w_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{w_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

VI.8 Der Satz von Stokes

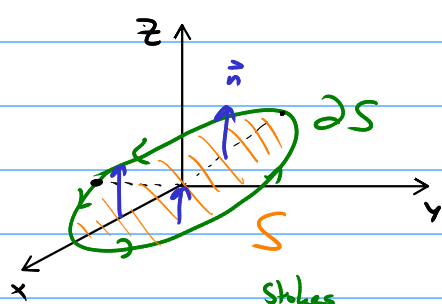
Sei S eine berandete Fläche mit Rand ∂S und gewähltem \vec{n} auf S

Satz von Stokes:
$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} d\theta,$$

wobei ∂S bezüglich \vec{n} im Gegenuhreigersinn durchlaufen wird.
(Daumenregel der rechten Hand!)



Bsp: $\vec{v} = (2xy, x^2 + y^2, 0)$, S : Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$
 $\Rightarrow \partial S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Umlaufrichtung ↺, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

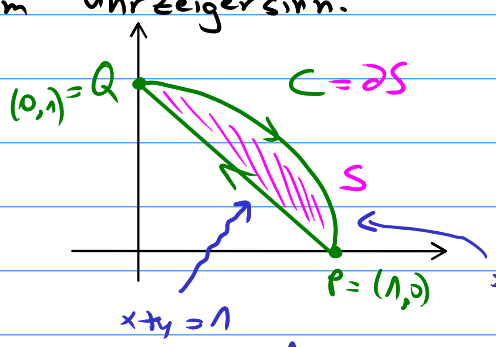
$$A = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} d\theta = \iint_S \vec{0} \cdot \vec{n} d\theta = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Allgemein gilt: Wenn \vec{v} wirbelfrei ist ($\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$) und C der Rand einer Fläche S mit $S \subset D(\vec{v})$ ist, dann ist die Arbeit von \vec{v} entlang C sicher 0.

Bsp: $\vec{v} = (x^2 - y^2, -xy, 0) \Rightarrow \text{rot } \vec{v} = \vec{v} \times \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$

Sei $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$. Sei C der Weg von P nach Q geradlinig gefolgt von Q nach P entlang des Einheitskreises im Uhrzeigersinn.



$$\begin{aligned} A &= \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO \\ &= \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} -y \, dx \, dy = \int_0^1 -y \cdot (\sqrt{1-y^2} - (1-y)) \, dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 2y \cdot \sqrt{1-y^2} \, dy + \int_0^1 y - y^2 \, dy = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(1-y^2)' = -2y$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0 - 1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{-1/6}}$$

Bsp: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $S = \Gamma(f)$ mit $D(f) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

Rand von S ? In der xy -Ebene ist $(x, y) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t)$ eine Parametrisierung

$$\Rightarrow z = f(x, y) = x^2 - y^2 = a^2 \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$\Rightarrow \text{Parametrisierung von } \partial S: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ a^2 \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Sei $\vec{v} = (z, x, y)$. Arbeit von \vec{v} entlang ∂S ?

Variante 1: Wegintegral.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ -4a^2 \cos t \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{-a^3 \cos^2 t \sin t}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{a^3 \sin^3 t}_{\int_0^{2\pi} = 0} + \underbrace{a^2 \cos^2 t}_{\int_0^{2\pi} = \pi} - \underbrace{4a^3 \cos t \sin^2 t}_{\int_0^{2\pi} = 0} dt \\ &= \underline{\underline{\pi a^2}} \end{aligned}$$

Variante 2: Satz von Stokes

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \vec{n} ? \text{ Parametrisierung von } S!$$

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, a^2 - v^2) \quad \text{da } z = x^2 - y^2, \quad u = x, \quad v = y$$

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > 0, \\ \text{d.h. } \vec{n} \text{ zeigt nach oben } \checkmark \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iint_B \text{rot } \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

Parameterbereich für (u, v) ,
Kreis mit Radius a

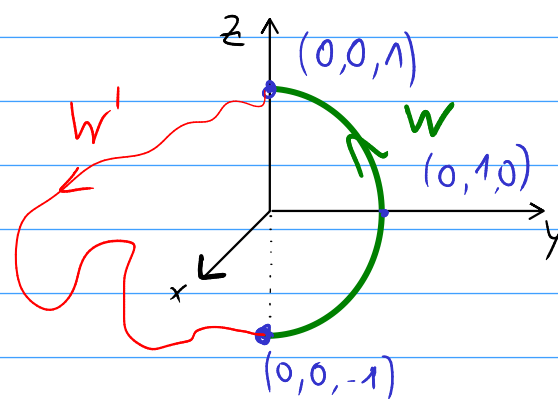
$$= \iint_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} du dv = \iint_B \underbrace{-2u}_{\int_B = 0} + \underbrace{2v}_{\int_B = 0} + 1 du dv, \text{ Symmetrie}$$

$$= \iint_B 1 du dv = \underline{\underline{\pi a^2}}, \text{ Fläche von } B.$$

Typisches Aufgabenbeispiel:

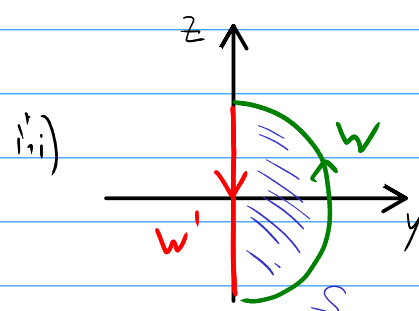
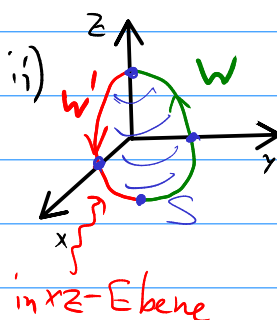
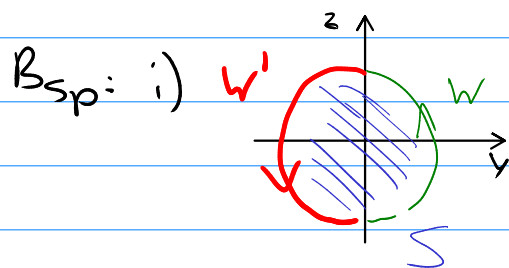
$$\vec{v} = (x^2 + yz, x + y^2z, z^2)$$

Arbeit A von \vec{v} entlang W ?



W ist nicht der Rand einer Fläche, aber kann durch Ansetzen von W' geschlossen werden.

Welches W' ist am besten geeignet?



Dann: Wähle eine Fläche S mit Rand $\partial S = W + W'$

i) $S =$ Kreisscheibe
oder Halbkugel

ii) $S =$ Viertel-
Kugel

iii) $S =$
Halbkreis

Ziel: Wähle W' und S , so dass die Integrale einfach werden

Stokes: $\int_{W+W'} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\theta$

$$\Rightarrow A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\theta - \int_{W'} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Hier: iii) $S =$ in der yz -Ebene mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{v} \times \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ x + y^2z \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ y \\ 1-z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ y \\ x-z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -y^2$$

$$\Rightarrow \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iint_S -y^2 dO = -\pi/8$$

$$\begin{aligned} \iint_S -y^2 dO: \quad dO &= s ds d\varphi \\ s &\in [0,1], \\ \varphi &\in [-\pi/2, \pi/2], \\ y &= s \sin \varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 -s^3 \sin^2 \varphi ds d\varphi \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\pi/8}} \end{aligned}$$

2. Integral: $-w'$

$$\vec{r}(t) = (0, 0, t), \quad t \in [-1, 1]$$

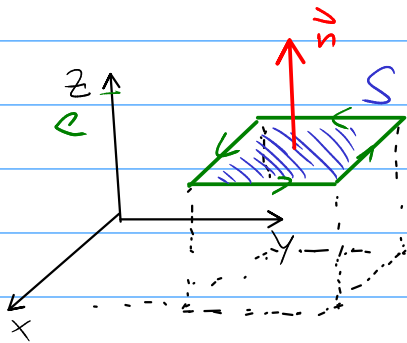
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (0, 0, 1)$$

$$\int_{-w'} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \underbrace{\vec{v}(0, 0, t)}_{\vec{v}(\vec{r}(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{r}}(t)} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A = \int_w \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dO + \int_{-w'} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\pi/8 + 2/3$$

Beweis vom Satz von Stokes für ein achsenparalleles Rechteck



Sei $(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times \{e\}$ dieses Rechteck

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach oben,
Rand in \odot durchlaufen

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iint_S v_{2,x} - v_{1,y} dO$$

$$\text{Ziel: } = \int_{\odot S} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_S v_{2,x} - v_{1,y} dO = \int_c^d \int_a^b v_{2,x} dx dy - \int_c^d \int_a^b v_{1,y} dx dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b v_{2,x} dx dy - \int_a^b \int_c^d v_{1,y} dy dx$$

Hauptsatz:
$$= \int_c^d v_2(b, y, e) - v_2(a, y, e) dy - \int_a^b v_1(x, d, e) - v_1(x, c, e) dx$$

$$= \underbrace{\int_c^d v_2(b, y, e) dy}_{\text{Wegintegral}} - \underbrace{\int_c^d v_2(a, y, e) dy}_{\text{Wegintegral}} - \underbrace{\int_a^b v_1(x, d, e) dx}_{\text{Wegintegral}} + \underbrace{\int_a^b v_1(x, c, e) dx}_{\text{Wegintegral}}$$

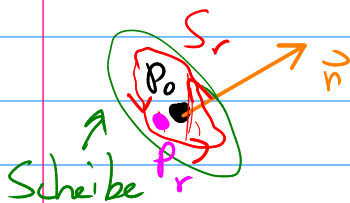
$$= \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

□

Koordinatenfreies $\text{rot } \vec{v}$

Sei $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und \vec{n} ein beliebiger Einheitsvektor, \vec{v} ein Vektorfeld.

Sei S_r eine Fläche um P_0 , so dass \vec{n} überall senkrecht auf S_r steht, enthalten in der Kreisscheibe mit Radius r um P_0 .



Setze $C_r := \partial S_r$, Gegenuhzeigerum bzgl \vec{n}

$$\Rightarrow \text{Stokes: } \int_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Mittelwertsatz: Es gibt ein $P_r \in S_r$ mit

$$\iint_{S_r} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \text{Fläche}(S_r) \cdot (\text{rot } \vec{v}(P_r) \cdot \vec{n})$$

Außerdem: $\text{rot } \vec{v}(P_0) \cdot \vec{n} = \lim_{r \rightarrow 0} (\text{rot } \vec{v}(P_r) \cdot \vec{n})$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Fläche}(S_r)} \cdot \iint_{S_r} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Fläche}(S_r)} \cdot \int_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$= \frac{\text{Wirkelarbeit}}{\text{Fläche}} \text{ in Richtung } \vec{n}$

D.h.: $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$ maximal $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{v}$ und \vec{n} sind parallel
 $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{v}$ steht senkrecht auf S_r
 $\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Fläche}} \int \vec{v} d\vec{r}$ maximal

Fazit: $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$ stellt die Wirbelung in P_0 um die Achse \vec{n} dar,
 mit $|\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}| \leq \text{Wirbelstärke}$

$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}$ wirbelfrei \Rightarrow Arbeitsintegrale entlang
 geschlossener Wege (Rand einer Fläche) sind immer 0

VI.9 Eine Anwendung des Satzes von Stokes

- Stationäres Magnetfeld $\vec{H}: (x, y, z, t) \rightarrow \vec{H}(x, y, z, t)$
- C ein geschlossener Weg mit Durchlaufsinn, z.B. Draht
- S eine Fläche mit Rand $\partial S = C$
- \vec{n} NEV auf S , s.d. C bzgl. \vec{n} in \uparrow durchlaufen wird.

\Rightarrow Fluss von \vec{H} durch S : $Z(t) = \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} d\vec{O}$

Gesetz von Faraday: Zeitliche Veränderung in Z induziert
 eine Spannung: $V_{\text{ind}} = -\mu_0 \cdot Z'(t)$, proportional zu $\frac{\partial}{\partial t}$ Fluss

$$= -\mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} d\vec{O} = -\mu_0 \iint_S \vec{H}_t \cdot \vec{n} d\vec{O}$$

Spannung ist Arbeit des elektrischen Felds \vec{E} :

$$V_{\text{ind}} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} d\vec{O} = -\mu_0 \iint_S \vec{H}_t \cdot \vec{n} d\vec{O}$$

$$\Rightarrow \iint_S (\operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_t) \cdot \vec{n} dO = 0 \quad \text{für alle Flächen } S$$

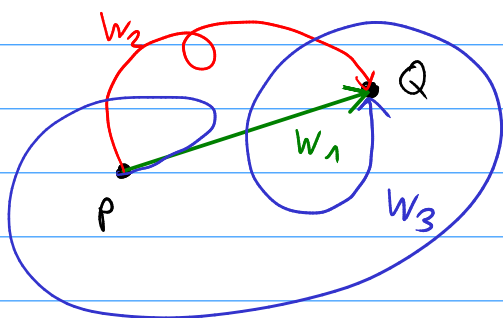
$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_t = 0, \quad \text{Maxwellgleichung}$$

27.04.2022

Themen: Konservative Vektorfelder, Potentialfelder, einfach zusammenhängend, Zusammenhang mit rot und Integrabilitätsbedingungen

VI.10 Potentialfelder

Beobachtung: In manchen Vektorfeldern spielt es keine Rolle, welchen Weg man wählt, um die Arbeit von P nach Q zu rechnen.



$$A = \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_3} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Def: \vec{v} ist **konservativ**, wenn für alle Wege von P nach Q die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ gleich gross ist.

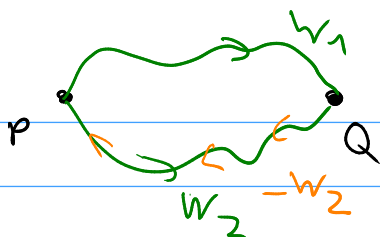
\Rightarrow D.h. die Arbeit von \vec{v} hängt nur von P, Q ab.

\Rightarrow Wenn $P = Q$, ist Arbeit = 0, da der konstante Weg mit $\dot{\vec{r}} = 0$ gewählt werden kann.

Satz: \vec{v} konservativ \Leftrightarrow Für alle geschlossenen Wege W ist $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$.

Beweis: " \Rightarrow ": Ja, setze $P = Q$, Arbeit = 0.

" \Leftarrow ": Seien W_1, W_2 Weg von P nach Q
Zu zeigen: $\int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$



Betrachte: $W := W_1 + (-W_2)$,
geschlossener Weg von P nach P .

$$\Rightarrow \int_{W_1 + (-W_2)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{-W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

□

Zusammenhang mit grad

Für ein Skalarfeld f ist $\vec{v} := \text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

Sei W ein Weg von P nach Q mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\underline{\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}} = \int_{t_p}^{t_Q} \text{grad } f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_p}^{t_Q} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t_p}^{t_Q} \underbrace{f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} + f_z \cdot \dot{z}}_{\text{Verallgemeinerte Kettenregel}} dt = \int_{t_p}^{t_Q} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt = \underline{\underline{f(\vec{r}(t_Q)) - f(\vec{r}(t_p)) = f(Q) - f(P)}}$$

⇒ Das Arbeitsintegral hängt nur von P, Q ab, nicht von W .

⇒ Jedes Vektorfeld der Form $\vec{v} = \text{grad } f$ ist konservativ.

Def: $\vec{v} = \text{grad } f$ ist ein **Potentialfeld** bzw. **Gradientenfeld** mit **Potential** f .

In einem Potentialfeld ist die Arbeit von P nach Q gerade $f(Q) - f(P)$

Satz: \vec{v} konservativ $\Leftrightarrow \vec{v}$ ist ein Potentialfeld, also $\vec{v} = \text{grad } f$.

Beweis: " \Leftarrow ": Gerade gezeigt, Potentialfelder sind konservativ

" \Rightarrow ": Konstruiere ein f mit $\vec{v} = \text{grad } f$ unter der Bedingung " \vec{v} konservativ"

Wähle dazu $P_0 \in D(\vec{v})$, $Q = (x, y, z) \in D(\vec{v})$ und W ein Weg von P_0 nach Q .

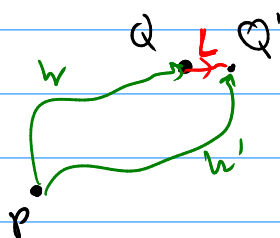
\Rightarrow Setze $f(Q) := f(x, y, z) := \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$, unabhängig von W da \vec{v} konservativ

Nach zu zeigen: $\vec{v} = \text{grad } f$, d.h. $v_1 = f_x$ etc

Sei $Q' = (x+h, y, z)$, $h > 0$.

\Rightarrow Weg $L: t \mapsto (t, y, z)$, $t \in [x, x+h]$, von Q nach Q'

Dann ist: $f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(Q') - f(Q)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_L \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v_1(t, y, z) dt \quad \text{da } \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MWS: Es gibt ein $t' \in (x, x+h)$ mit $\int_x^{x+h} v_1(t, y, z) dt = h \cdot v_1(t', y, z)$

$$\Rightarrow \underline{f_x(x, y, z)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot v_1(t', y, z) = \underline{v_1(x, y, z)}$$

Analog für $f_y = v_2$ und $f_z = v_3$. □

Bemerkung: Die Wahl von P_0 kann f verändern, d.h. f ist nicht eindeutig.

Zusammenhang mit $\text{rot } \vec{v}$

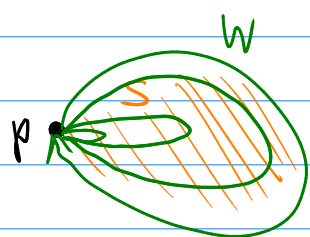
Wenn $\vec{v} = \text{grad } f$ ist, dann ist $\text{rot } \vec{v} = \text{rot grad } f = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ f_{xz} - f_{zx} \\ f_{yx} - f_{xy} \end{pmatrix} = \vec{0}$

⇒ Potentialfelder sind wirbelfrei.

Umkehrschluss: Wenn $\text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$ an irgend einem Punkt, dann kann es kein f mit $\vec{v} = \text{grad } f$ geben, d.h. \vec{v} ist kein Pot.-feld.

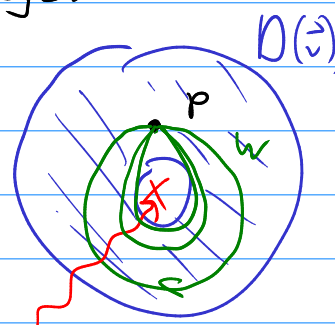
Frage: Sind wirbelfreie Vektorfelder auch immer Potentialfelder?

Problem: Für Stokes muss ein geschlossener Weg der Rand einer Fläche sein, die ganz im Definitionsbereich liegt.



$$\Rightarrow \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$= 0 \text{ wenn } \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$



nicht in $D(\vec{v})$, $\text{rot } \vec{v} = ??$

Die Folgerung " $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene W " klappt nur, wenn $D(\vec{v})$ keine "Löcher" hat.

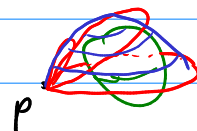
Lösung: Der Definitionsbereich $D(\vec{v})$ muss **einfach zusammenhängend** sein, d.h. geschlossene Wege müssen innerhalb $D(\vec{v})$ zu einem Punkt zusammenziehbar sein.

Satz: Wenn $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ und $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist, dann ist \vec{v} ein Potentialfeld.

Bsp: Einfach zusammenhängend sind:

\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Punkt}\}$, Punkt, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{gefüllte Kugel}\}$,

Kugeloberfläche, konvexe gefüllte Körper



Nicht einfach zusammenhängend:

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Gerade}\}$, Torus/Donut, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$

Bsp: Coulombfeld, $\vec{v} = \frac{C \cdot \vec{r}}{r^3}$ mit $r = |\vec{r}|$

$\Rightarrow D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, d.h. einfach zusammenhängend

$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0} \Rightarrow \vec{v}$ ist ein Potentialfeld, mit $f = ?$ (Serik!)

Integrabilitätsbedingung für \mathbb{R}^3

Gegeben φ, ψ, χ in 3 Variablen, gibt es ein f mit

$$f_x = \varphi, \quad f_y = \psi, \quad f_z = \chi?$$

Ja, falls $\varphi_y = \psi_x, \quad \varphi_z = \chi_x, \quad \psi_z = \chi_y$

Denn $\vec{v} = \text{grad } f = (f_x, f_y, f_z)$ erfüllt $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$

$$\text{aber } \text{rot } \vec{v} = (\chi_y - \psi_z, \varphi_z - \chi_x, \psi_x - \varphi_y) \equiv \vec{0}$$