

V Funktionen in mehreren Variablen: Integralrechnung

V.1 Das Gebietsintegral



Welches Volumen liegt zwischen B in der xy -Ebene und dem Graph $\Gamma(f)$ im Raum?

In Formeln: Was ist $\iint_B f(x,y) dF$?
 $\underbrace{dF}_{\text{Flächenstück von } B}$

Analog zu Funktionen in einer Variable:

B einteilen in immer kleinere Flächenstücke, messen wie hoch $f(x,y)$ ist, Quader aufsummieren

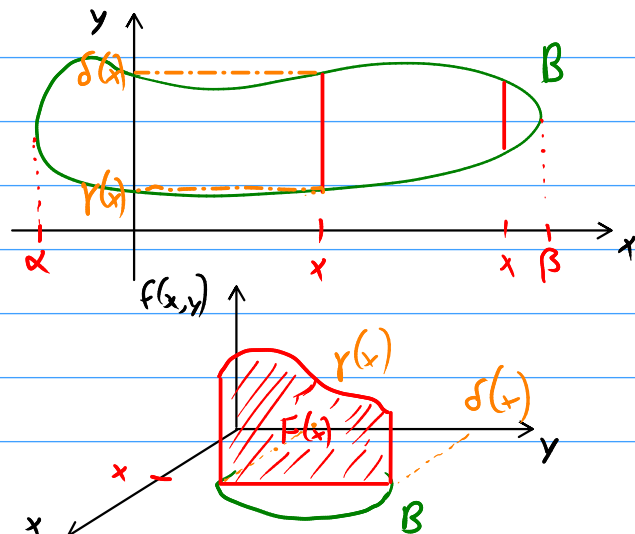
Und konkret? Variante 1:

Bestimme für jedes x die Querschnittsfläche $F(x)$ und summiere über alle x .

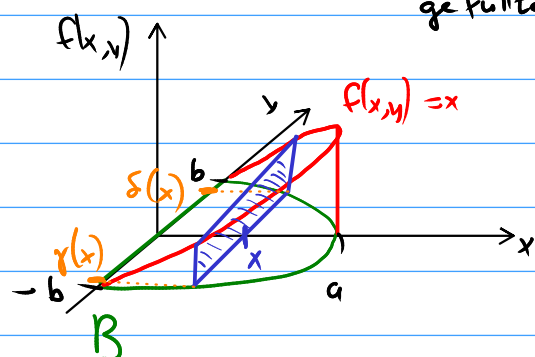
$$\Rightarrow V = \iint_B f(x,y) dF = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$$

$$F(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y) dy$$

$$\Rightarrow V = \int \int_B f(x,y) dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y) dy dx$$



Bsp: $f(x,y) = x$, $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$,
gefüllte Halbellipse in der rechten Halbebene



$$x \in [0, a] \Rightarrow \alpha = 0, \beta = a$$

(x,y) Randpunkt auf Ellipse:
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow y \in \left[-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right] \text{ für ein gegebenes } x$$

$$V = \iint_B f(x,y) dF = \int_0^a \int_{-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} x dy dx$$

$$= \int_0^a \left[xy \right]_{-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx = \int_0^a x \cdot \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^a 2b x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = - \int_1^0 b \sqrt{u} a^2 du = ba^2 \int_0^1 \sqrt{u} du$$

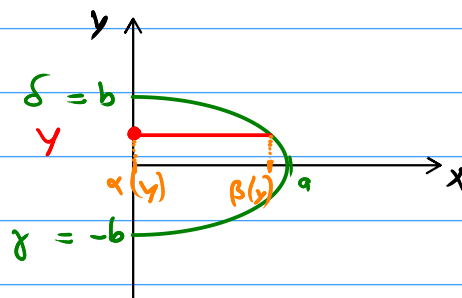
Substitution: $1 - \frac{x^2}{a^2} =: u \Rightarrow -\frac{2x}{a^2} dx = du$, u von 1 bis 0

$$\Rightarrow V = ba^2 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} ba^2$$

Variante 2: Bestimme für jedes y die Querschnittsfläche $G(y)$ und summiere über alle y .

$$V = \int_{-b}^b \int_0^{a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} x dx dy$$

$$= \int_{-b}^b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-b}^b \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy \stackrel{\int_{-b}^b \text{für gerade Funktion} = 2 \int_0^b}{=} a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy \\
 &= a^2 \cdot \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_0^b = a^2 \cdot \left(b - \frac{b}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} a^2 b}}.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \iint_B f(x,y) dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y) dy dx = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx dy$$

Die Integrationsreihenfolge kann also vertauscht werden, wenn dabei die Integrationsgrenzen mit angepasst werden. Es lohnt sich, sich das gut zu überlegen, je nach Geometrie vom Gebiet B .

Schwerpunktsformel: $x_S \cdot |B| = \underbrace{\iint_B x dF}_{= \frac{2}{3} a^2 b}$, d.h. $f(x,y) = x$

Flächeninhalt von B

Halbellipse: $|B| = \frac{\pi}{2} ab$

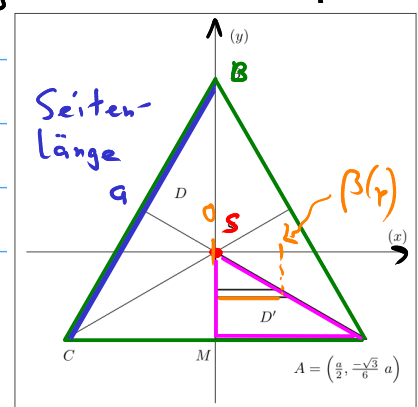
$$\Rightarrow x_S \cdot \frac{\pi}{2} ab = \frac{2}{3} a^2 b \Rightarrow \underline{\underline{x_S = \frac{4}{3\pi} a}}, \text{ x-Koordinate des Schwerpunkts der Halbellipse.}$$

Anwendungen von mehrdimensionalen Integralen:

- Gesamtmasse bei Flächendichte g : $m = \iint_B g(x,y) dF$
- Gesamtladung bei bekannter Flächenladungsdichte
- Hydrostatischer Druck auf eine Wand
- Schwerpunkt
- Massen- und Flächenträgheitsmomente

Bsp: Polares Flächenträgheitsmoment bzgl. dem Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks.

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \iint_B x^2 + y^2 dF \\
 &= 6 \cdot \iint_{D'} x^2 + y^2 dF
 \end{aligned}$$

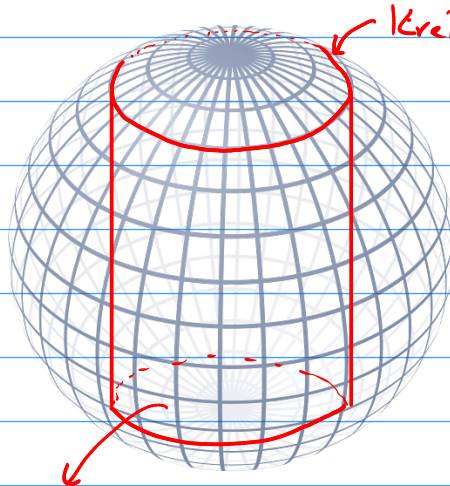


$$\begin{aligned}
 &= 6 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 \int_0^{-\sqrt{3}y} x^2 + y^2 dx dy \quad \text{--- } -\sqrt{3}y \rightarrow > 0, \text{ da } y < 0! \\
 &= 6 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{-\sqrt{3}y} dy = 6 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 \frac{-3\sqrt{3}y^3}{3} - \sqrt{3}y^3 - 0 dy \\
 &= -12\sqrt{3} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 y^3 dy = -12\sqrt{3} \cdot \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 \quad \text{--- } \uparrow \text{ verwendet mit unterer Grenze} \\
 &= 3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}a \right)^4 = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2^4} a^4 = \frac{a^4}{16\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

16.03.2022 Themen: Integrieren mit Polarkoordinaten, Volumenintegral

V.2 Koordinatentransformationen bei Gebietsintegralen

Bsp: Volumen eines Kugelausschnitts



Grundfläche B:

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$\Rightarrow |x| \leq \sqrt{r^2 - y^2}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Kugelradius } R \\ \text{Zylinderradius } r \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen } V?$

$$\text{Kugeloberfläche: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} =: f(x, y)$$

$\downarrow \pm |z|$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \iint_B f(x, y) dF \quad \text{--- } \downarrow \text{Rechtecksfläche}$$

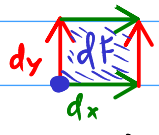
$$= 2 \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

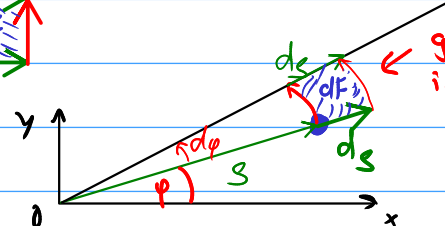
Integrierbar, aber eher mühsam.

Kann man stattdessen die Rotationssymmetrie ausnutzen?

Polar koordinaten: $s = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, r] \Rightarrow$ Grenzen sind nicht mehr mit einander verknüpft
 $\varphi = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow V = 2 \iint_B \sqrt{R^2 - s^2} \, dF \quad \text{in Polarkoordinaten?!}$$

dF in dx, dy : 

dF in $d\varphi, ds$: 

gebogen, aber infinitesimal ein gerades Segment mit Länge $s \, d\varphi$
wäre nur ein Winkel

$\Rightarrow dF$ wird infinitesimal zu einem Rechteck mit Kantenlängen $ds, s \, d\varphi$, also $dF = s \, d\varphi \, ds$

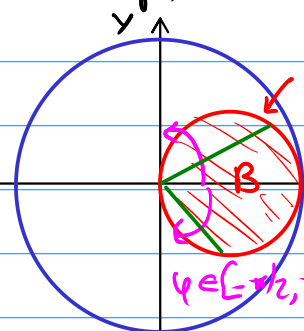
$$\Rightarrow dF = s \, ds \, d\varphi = s \, d\varphi \, ds = dx \, dy = dy \, dx$$

$$\Rightarrow V = 2 \iint_B \sqrt{R^2 - s^2} \, \underbrace{s \, ds \, d\varphi}_{= dF} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{R^2 - s^2} \, \underbrace{ds}_{\text{Grenze für } s} \underbrace{d\varphi}_{\text{Grenze für } \varphi}$$

Substitution, $u := R^2 - s^2$, $du = -2s \, ds$, u von R^2 bis $R^2 - r^2$

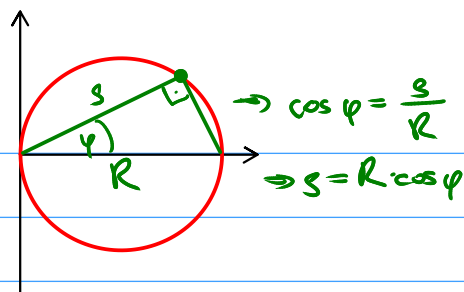
$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= - \int_0^{2\pi} \int_{R^2}^{R^2 - r^2} \sqrt{u} \, du \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{R^2 - r^2}^{R^2} \sqrt{u} \, du \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{R^2 - r^2}^{R^2} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(R^3 - (R^2 - r^2)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Bsp: Selbes Setup, aber anderer Ausschnitt

 Ausschnitt, von oben betrachtet

$$V = 2 \iint_B \sqrt{R^2 - s^2} \, s \, ds \, d\varphi$$

$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (s, \varphi) \in B \Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], s \in [0, R \cos \varphi]$



$$\Rightarrow V = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{R \cos \varphi} s \sqrt{R^2 - s^2} ds d\varphi$$

Symmetrie!

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(R^2 - s^2)^{3/2}}{-3} \right]_0^{R \cos \varphi} d\varphi$$

Kettenregel!

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{-3} - \frac{R^3}{-3} d\varphi = -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (R^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} - R^3 d\varphi$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} R^3 (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = 4 \frac{R^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{6\pi - 8}{9} R^3}}$$

Bsp: e^{-x^2} hat keine elementare Stammfunktion, aber:

$$\int := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \Rightarrow \int^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dF = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s^2} s ds d\varphi$$

Substitution: $u = s^2$, $du = 2s ds$, u von 0^2 bis ∞^2

$$\Rightarrow \int^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{2} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}}$$

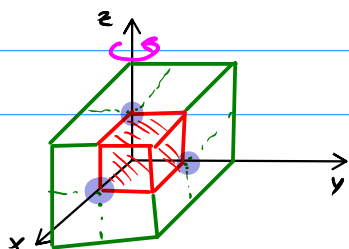
V.3 Volumenintegral

$$f: (x, y, z) \mapsto f(x, y, z), \quad f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\subset \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \text{Volumenintegral } \iiint_{\mathbb{B}} f(x, y, z) dV$$

Bsp: Massenträgheitsmoment eines Würfels, homogene Dichte s , Kantenlänge 2, um z -Achse, Würfelmitte $\hat{=}$ Ursprung

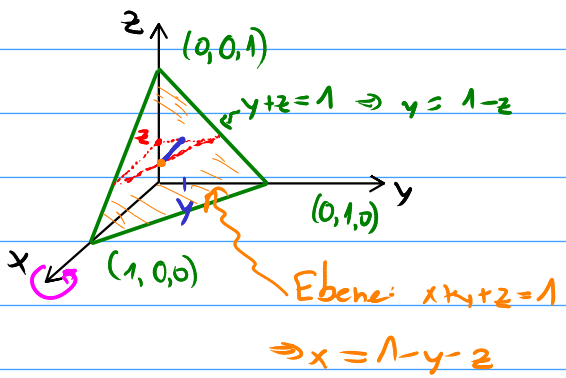


$$\underline{\underline{\Theta_z = \iiint_{\mathbb{B}} s \cdot \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\text{Abstandsquadrat zur Achse}} dx dy dz}}$$

Symmetrie!

$$\begin{aligned}
 &= 8 \int_0^a \int_0^a \int_0^a s \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz = 8s \int_0^a \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^a dy dz \\
 &= 8s \int_0^a \int_0^a \left[\frac{a^3}{3} + ay^2 \right] dy dz = 8s \int_0^a \left[\frac{a^3 y}{3} + \frac{ay^3}{3} \right]_0^a dz \\
 &= 8s \int_0^a \left[\frac{2}{3} a^4 \right] dz = 8s \left[\frac{2}{3} a^4 z \right]_0^a = 8s \cdot \frac{2}{3} a^5 = \frac{16}{3} s a^5 = \frac{2}{3} m a^2 \\
 &\quad m = 8a^3 s
 \end{aligned}$$

Bsp: Trägheitsmoment eines Tetraeders mit homogener Dichte s , um x -Achse



$$\begin{aligned}
 \Theta_x &= s \iiint_B y^2 + z^2 dx dy dz \\
 &= s \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} y^2 + z^2 dx dy dz \\
 &= s \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[xy^2 + xz^2 \right]_0^{1-y-z} dy dz \\
 &= s \int_0^1 \int_0^{1-z} (y^2 + z^2)(1-y-z) dy dz = s \int_0^1 \int_0^{1-z} (y^2 - y^3 - zy^2 + z^2 - yz^2 - z^3) dy dz \\
 &= s \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - z \frac{y^3}{3} + z^2 y - \frac{y^2}{2} z^2 - yz^3 \right]_0^{1-z} dz \\
 &= s \int_0^1 \left(\frac{(1-z)^3}{3} - \frac{(1-z)^4}{4} - z \cdot \frac{(1-z)^3}{3} + z^2(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2} z^2 - (1-z)z^3 \right) dz
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen nach $1, z, z^2, z^3, z^4$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{\underline{\Theta_x}} &= \frac{s}{12} \cdot \int_0^1 (7z^4 - 16z^3 + 12z^2 - 4z + 1) dz \\
 &= \frac{s}{12} \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{16}{4} + \frac{12}{3} - \frac{4}{2} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{s}{30}}}
 \end{aligned}$$

18.03.2022: Keine Vorlesung, es wird die Aufzeichnung vom FS 2020 gezeigt.

Die nächsten Seiten sind deshalb eine Kopie der damaligen Notizen.

V.4 Transformation von Gebiets- und Volumenintegralen

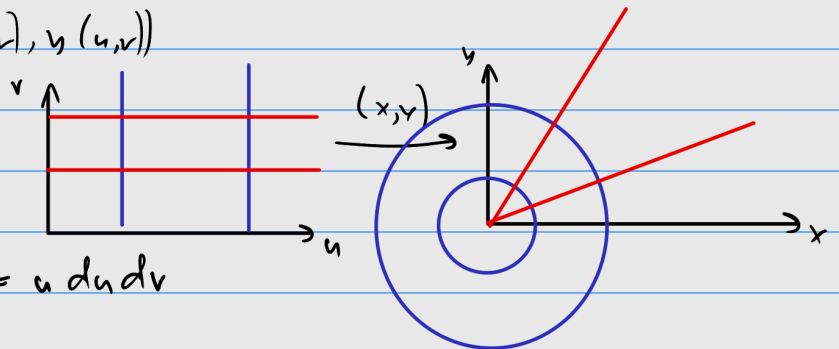
$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \text{Koordinatentransformation für Gebiete}$$

Bsp: $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$

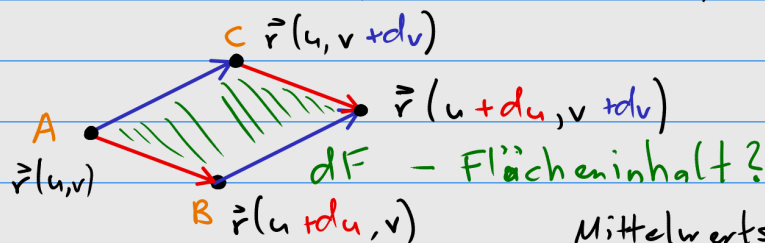
$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$dF = dx dy = u du dv$$



Was bedeutet so eine Transformation für dF im allgemeinen?



$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \frac{\vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u, v)}{du} \cdot du \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=} \vec{r}_u(u, v) \cdot du \\ &= (x_u(u, v), y_u(u, v)) \cdot du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \frac{\vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u, v)}{dv} \cdot dv = \vec{r}_v(u, v) dv \\ &= (x_v(u, v), y_v(u, v)) dv \end{aligned}$$

Fläche Parallelogram $\hat{=}$ Betrag des Vektorprodukts der Kanten

$$\begin{aligned} \Rightarrow dF &= |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = \left| \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix} \right| du dv \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| du dv \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=: J, \text{ Jacobi-Matrix}} \end{aligned} \quad \Rightarrow dF = |det J| du dv$$

Bsp: Polar koordinaten: $dF = \left| \det \begin{pmatrix} x_s & x_\varphi \\ y_s & y_\varphi \end{pmatrix} \right| ds d\varphi$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -s \sin \varphi \\ \sin \varphi & s \cos \varphi \end{pmatrix} \right| ds d\varphi = s ds d\varphi \quad \checkmark$$

Bsp: Ausgefüllte Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.
Was ist das polare Trägheitsmoment?

$$J_0 = \iint_B \underbrace{x^2 + y^2}_{\substack{\text{Abstandsquadrat} \\ \text{zur Achse (z)}}} dF$$

Ellipsenkoordinaten:

$$\begin{cases} x(s, t) = a \cdot s \cdot \cos t \\ y(s, t) = b \cdot s \cdot \sin t \\ t \in [0, 2\pi], s \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Jacobi-Matrix } J = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t & -a \cdot s \cdot \sin t \\ b \cdot \sin t & b \cdot s \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J = abs \cos^2 t + abs \sin^2 t = a \cdot b \cdot s$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{J_0} &= \iint_B x^2 + y^2 dF = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ((a \cos t)^2 + (b \sin t)^2) abs dt ds \\ &= \int_0^1 a \cdot b \left(\overset{\uparrow}{a^2 s^2 \pi} + \overset{\uparrow}{b^2 s^2 \pi} \right) s ds = \pi ab \int_0^1 a^2 s^3 + b^2 s^3 ds = \pi ab \frac{a^2 + b^2}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{=} 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

Bsp: Bedeutung von J bei einem Roboterarm \rightarrow Skript S.38ff

Transformationen für Volumenintegrale

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(u+du, v+dv, w+dw)$$

$$\vec{r}(u, v+dv, w)$$

$$\vec{r}(u, v, w)$$

$$\vec{r}(u+du, v, w)$$

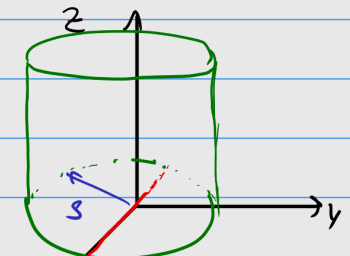
Volumenelement dV ist ein Spat
Volumen $\hat{=}$ Betrag des Spat-
produkts

$$dV = |(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_w| du dv dw = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right| du dv dw$$

$=: J$, Jacobi-Matrix

Bsp: Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Polar koordinaten} \\ \text{Höhe} \end{array} \right\}$$



Trägheitsmoment

$$J = \begin{pmatrix} x_s & x_\varphi & x_z \\ y_s & y_\varphi & y_z \\ z_s & z_\varphi & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -s \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & s \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J = s \quad \Rightarrow \underline{dV} = |\det J| ds d\varphi dz = \underline{s ds d\varphi dz}$$

Bsp: Zylinder mit Radius a , Höhe h , Dichte 1.

Trägheitsmoment bzgl. Durchmesser der Grundfläche (Rot. um x-Achse)

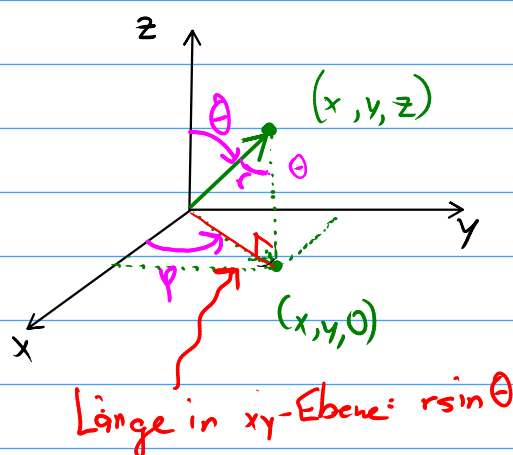
$$\Theta = \iiint_V y^2 + z^2 dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (s^2 \sin^2 \varphi + z^2) s ds d\varphi dz$$

13.03.2020

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{\underline{\ominus}} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{g^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{g^2 z^2}{2} \right]_0^4 d\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{g^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{g^2 z^2}{2}}_{\int_0^{2\pi} = \pi} d\varphi dz \\
 &= \int_0^h \frac{g^4 \pi}{4} + \pi g^2 z^2 dz = \frac{\pi g^4 h}{4} + \frac{\pi g^2 h^3}{3} \\
 &= \underline{\underline{\pi g^2 h \left(\frac{g^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)}} = \underline{\underline{V \cdot \left(\frac{g^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)}}
 \end{aligned}$$

21.03.2022

Themen: Kugelkoordinaten, Rechenbeispiele, Gravitationskraft der Vollkugel



$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

- $r \in [0, R]$, Radius
- $\varphi \in [0, 2\pi]$, Azimut, "Ost-West-Ausrichtung"
- $\theta \in [0, \pi]$, Polwinkel, Winkel zum Nordpol

Jacobi-Matrix:
$$\begin{aligned}
 &\begin{matrix} \partial/\partial r & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial \theta \end{matrix} \\
 J &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\det J}} &= -r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + 0 \\
 &\quad - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi - r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi - 0 \\
 &= -r^2 \left(\sin^3 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \cos^2 \theta \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right) \\
 &= -r^2 \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \stackrel{=1}{=} \\
 &= \underline{\underline{-r^2 \sin \theta}}
 \end{aligned}$$

$$dV = dx dy dz = |\det J| dr d\varphi d\theta = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

$\underbrace{r^2}_{\neq 0}, d\varphi, \theta \in [0, \pi]$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V \tilde{f}(r, \varphi, \theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Volumenintegral in Kugelkoordinaten

Bsp: Kugelvolumen, Radius R

$$\begin{aligned} f &\equiv 1 \Rightarrow \underline{V} = \iiint_K 1 dV = \iiint_K r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin\theta d\varphi d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \sin\theta d\theta = \frac{2\pi R^3}{3} [-\cos\theta]_0^\pi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} R^3}} \end{aligned}$$

Variante 2: $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow V = 2 \cdot \iint_B \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$

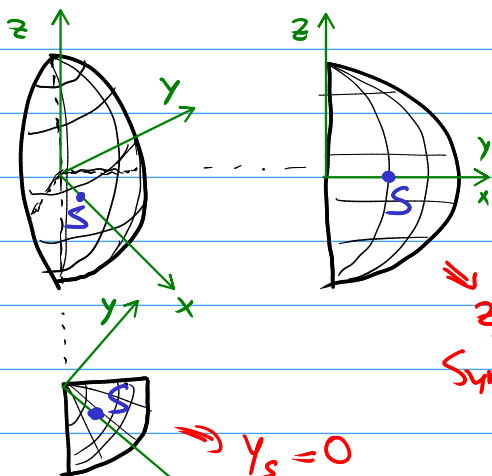
Variante 3: $z = \tilde{f}(s, \varphi) = \sqrt{R^2 - s^2} \Rightarrow V = 2 \iint_B \sqrt{R^2 - s^2} s ds d\varphi$

Je nach Kugelausschnitt sind Variante 2/3 einfacher als Kugelkoordinaten!

Bsp: Massenträgheitsmoment der Vollkugel K, Radius R, Dichte ρ
Hier: z-Achse homogen

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Theta_z}} &= \iiint_K \rho \cdot \underbrace{(x^2 + y^2)}_{= r^2 \sin^2\theta} dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\rho r^2 \sin^2\theta}_{\tilde{f}(r, \varphi, \theta)} \underbrace{r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}_{dV} \\ &= \rho \cdot \underbrace{2\pi}_{=\int_0^{2\pi} d\varphi} \cdot \int_0^\pi \underbrace{\frac{R^5}{5} \sin^3\theta d\theta}_{\int_0^\pi r^4 dr, \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{8}{15} \pi \rho R^5}} = \underline{\underline{\frac{2}{5} m R^2}} \\ &\hspace{15em} \text{Kugelmasse} \end{aligned}$$

Bsp: Schwerpunkt einer Viertelkugel



$z_s = 0$
Symmetrie

$y_s = 0$
Symmetrie

- Grenzen unabhängig
- Variablen in unabhängigen Faktoren

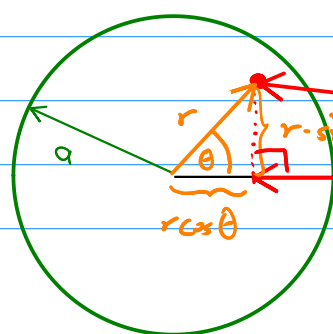
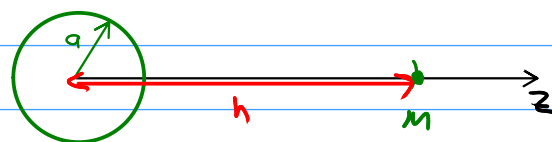
$$= 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^R r^3 dr$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot [\sin \varphi]_0^{\pi/4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{x_s} = \frac{\pi R^4}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \underbrace{\pi R^3}_{\text{Volumen der Viertelkugel}}} = \frac{\pi R^4}{4 \sqrt{2} \pi R^3} = \frac{3}{\sqrt{32}} \cdot R \approx \underline{\underline{0,53 \cdot R}}$$

Anwendung in Physik: Gravitationskraft einer Vollkugel auf einen Massenpunkt.

- Kugelradius a
- Kugeldichte ρ homogen
- Massenpunkt mit Masse m
- Abstand zum Kugelmittelpunkt $h \geq a$



Kraft des Kugелеlements: $|\vec{dK}| = G \frac{m \cdot (\rho dV)}{R^2}$ Massenelement

in z-Richtung: $|\vec{dK}_z| = |\vec{dK}| \cdot \cos \alpha$

$$\cdot \cos \alpha = \frac{h - r \cos \theta}{R}, \quad R^2 = (h - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{K}_z| = \iiint_K |\vec{dK}_z| = \iiint_K \cos \alpha \cdot |\vec{dK}| = \iiint_K \cos \alpha \frac{G \cdot m \cdot s}{R^2} dV$$

$$= G \cdot m \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \frac{h - r \cos \theta}{((h - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)^{3/2}} \cdot r^2 \cdot \sin \theta d\theta dr d\varphi$$

$$= G \cdot m \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \int_0^{\pi} \frac{(h - r \cos \theta) \sin \theta}{(h^2 - 2hr \cos \theta + r^2)^{3/2}} d\theta dr d\varphi$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{h \sin \theta}{r^{3/2}} d\theta = \frac{2}{h^2 - r^2}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{-r \cos \theta \sin \theta}{r^{3/2}} d\theta = -\frac{2}{h^2 - r^2} + \frac{2}{h^2} \quad \left. \vphantom{\int_0^{\pi}} \right\} \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{2}{h^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{K}_z| = G \cdot m \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \cdot \frac{2}{h^2} dr d\varphi = \frac{2 G m s}{h^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{G \cdot m}{h^2} \cdot \underbrace{\frac{4\pi s a^3}{3}}_{\text{Kugelmasse } M} = \frac{G \cdot m \cdot M}{h^2}$$

Kugelmasse M

Kettenregel, da $\cos' \theta = -\sin \theta$

$$\begin{aligned} \underline{I_1} &= \int_0^{\pi} \frac{h \sin \theta}{r^{3/2}} d\theta \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} +h \left(-\frac{1}{r^{1/2}} \right) \cdot \frac{1}{2hr} \left[\frac{1}{r^{1/2}} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{((h+r)^2)^{1/2}} - \frac{1}{((h-r)^2)^{1/2}} \right) = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{h+r} - \frac{1}{h-r} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{h^2 - r^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{v} \Rightarrow v' = -\sin\theta \\
 I_2 &= \int_0^\pi \frac{-r \cos\theta \sin\theta}{(h^2 - 2hr \cos\theta + r^2)^{3/2}} d\theta \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{h-r} \cos\theta \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{h-r} (h^2 - 2hr \cos\theta + r^2)^{-1/2} d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h+r} - \frac{1}{h-r} + 2 \frac{1}{-hr} \left(h^2 - 2hr \cos\theta + r^2 \right)^{1/2} \Big|_0^\pi \right) \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{h+r}{h^2-r^2} - \frac{1}{r} (h+r) + \frac{1}{r} (h-r) \right) \\
 &= -\frac{2}{h^2-r^2} + \frac{2}{h^2}
 \end{aligned}$$

23.03.2022 Themen: Integrale mit Parametern im Integranden und/oder Integralgrenzen

V.5 Integrale mit Parameter

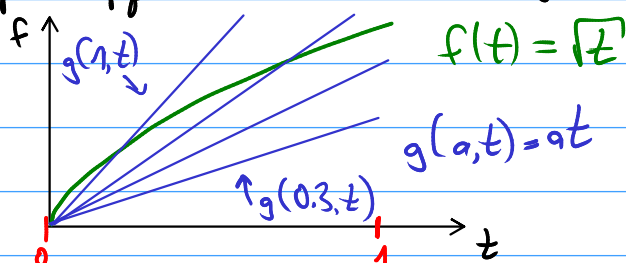
Querkraft eines belasteten Balkens: $Q(x) = A - \int_0^x \overbrace{p(t)}^{\text{Kraft im Abstand } t} dt$

Biegemoment: $M(x) = -Ax + \int_0^x (x-t) p(t) dt$

Behauptung: $M'(x) = -Q(x)$

Problem: Ableitungsvariable x steht auch im Integranden!

Bsp: Approximation mit kleinsten Quadraten



Welches a sorgt dafür, dass $g(a,t)$ gut $f(t)$ approximiert?
Und wie misst man "gut"?

Idee: Fläche zwischen f und g minimieren

$$\Psi(a) = \int_0^1 |f(t) - g(a, t)| dt, \text{ finde das minimierende } a!$$

Methode der kleinsten Quadrate:

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \int_0^1 (f(t) - g(a, t))^2 dt = \int_0^1 (\sqrt{t} - at)^2 dt \\ &= \int_0^1 t - 2at^{3/2} + a^2 t^2 dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2a \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + a^2 \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4a}{5} + \frac{a^2}{3} \end{aligned}$$

Minimieren: $\Phi'(a) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Phi'(a) = -\frac{4}{5} + \frac{2a}{3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a = \frac{6}{5}$$

$\Rightarrow f(t) = \sqrt{t}$ wird auf $[0, 1]$ von $g(t) = \frac{6t}{5}$ am besten approximiert, wenn man mit Kleinsten Quadraten misst.

Bsp: $\Phi(x) := \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$, hat keine elementare Stammfunktion

Was ist $\Phi(x)$? Oder $\Phi'(x)$?

Satz: Sei $f: (x, t) \mapsto f(x, t)$ diff'bar und f_x stetig.

Dann ist $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b f_x(x, t) dt$

Bsp von vorher: $f(x, t) = (\sqrt{t} - xt)^2$ ($x=a$ von vorher)

$$\Rightarrow f_x(x, t) = -t \cdot 2(\sqrt{t} - xt) = 2xt^2 - 2t^{3/2}$$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 f(x, t) dt \stackrel{\text{Satz}}{=} \int_0^1 f_x(x, t) dt = \int_0^1 2xt^2 - 2t^{3/2} dt$$

$$= \left[\frac{2x t^3}{3} - 2 \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2x}{3} - \frac{4}{5} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{6/5}}$$

Bsp: $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$. $\Phi'(x) = ?$

$$\Phi'(x) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \frac{t^x - 1}{\ln t} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^x \cdot \cancel{\ln t}}{\cancel{\ln t}} dt$$

$$t^x = e^{x \cdot \ln t} \Rightarrow \frac{d}{dx} t^x = (\ln t) \cdot e^{x \cdot \ln t} = (\ln t) \cdot t^x$$

Erinnerung: $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \Phi(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + C$$

Was ist C ? Wähle x , s.d. $\frac{t^x - 1}{\ln t}$ einfach zu integrieren ist!

$$x=0 \Rightarrow \frac{t^0 - 1}{\ln t} = \frac{1 - 1}{\ln t} = 0 \Rightarrow \Phi(0) \stackrel{\text{Integral}}{=} 0 \stackrel{!}{=} \ln(1+0) + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt = \ln(x+1)}}$$

Beweis vom Satz: $\Phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$

Differenzenquotient: $\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}$, $h > 0$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x+h, t) dt - \int_a^b f(x, t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x+h, t) - f(x, t) dt \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}}_{\text{Ziel: } \rightarrow 0 \text{ wenn } h \rightarrow 0} - \int_a^b f_x(x, t) dt = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f_x(x, t)} - f_x(x, t) dt$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \Phi'(x) = \int_a^b f_x(x, t) dt. \quad \square$$

Bsp: Behauptung: Die Funktion $\Phi(x) = \int_0^\pi 1 \cdot \cos(x \cdot \sin t) dt$

löst die Differentialgleichung $\Phi''(x) + \frac{1}{x} \cdot \Phi'(x) + \Phi(x) = 0$.

Beweis: Satz $\Rightarrow \Phi'(x) = \int_0^\pi \underbrace{\sin t}_{\text{innere}} \cdot \underbrace{(-\sin(x \cdot \sin t))}_{\text{äußere Ableitung}} dt$

$$\Rightarrow \Phi''(x) = \int_0^\pi -\sin^2 t \cdot \cos(x \cdot \sin t) dt$$

Φ'' und Φ enthalten " $\cos(x \cdot \sin t)$ ", aber Φ' nicht \Rightarrow Forme Φ' um

Partielle Integration: $\Phi'(x) = \left[+\sin(x \cdot \sin t) \cdot \cos t \right]_{t=0}^\pi$

$$- \int_0^\pi \underbrace{(+\cos t)}_{=v} \cdot \underbrace{(+\cos(x \cdot \sin t))}_{=u'} \cdot \underbrace{x \cdot \cos t}_{\text{innere Abl, nach } t} dt$$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = \overset{t=\pi}{0} - \overset{t=0}{0} - x \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \cos(x \cdot \sin t) dt$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi'' + \frac{1}{x} \cdot \Phi' + \Phi = \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin t) (-\sin^2 t - \cos^2 t + 1) dt = \int_0^\pi 0 dt = 0}}$$

Parameter in Integralgrenzen

Sei $\Psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) dt$

Satz: $\Psi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \underbrace{f_x(t, x)}_{\text{f ändert sich}} dt + \underbrace{f(v(x), x) \cdot v'(x)}_{\text{v ändert sich}} - \underbrace{f(u(x), x) \cdot u'(x)}_{\text{u ändert sich}}$
(jeweils mit x)

Spezialfälle: • $v(x) = b$, $u(x) = a$ konstant $\Rightarrow v' = u' = 0$, Satz von vorher

• $u(x) = a$, $v(x) = x$, $f(t, x) = g(t)$ unabhängig von x

$\Rightarrow f_x = 0$, $v' = 1$, $u' = 0 \Rightarrow$ Hauptsatz für $g(t)$.

Beweis: $\gamma(u, v, w) = \int_u^v f(t, w) dt$

Setze $\Psi(x) := \gamma(u(x), v(x), w(x))$ mit $w(x) = x$

Verallgemeinerte Kettenregel: $\Psi'(x) = \gamma_u \cdot u_x + \gamma_v \cdot v_x + \gamma_w \cdot w_x$

Hauptsatz: $\gamma_u = -f(u(x), \overset{w(x)}{\downarrow} x)$, $\gamma_v = f(\overset{w(x)}{\downarrow} v(x), x)$

$\Rightarrow \Psi'(x) = f(\overset{v(x)}{\downarrow} v(x), \overset{u_x}{\downarrow} x) \cdot \overset{u_x}{\downarrow} v'(x) - f(\overset{u_x}{\downarrow} u(x), \overset{u_x}{\downarrow} x) \cdot \overset{u_x}{\downarrow} u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t, x) dt \cdot \overset{w_x}{\downarrow} 1 \quad \square$

Anwendungsbeispiel vom Anfang:

Querkraft eines belasteten Balkens: $Q(x) = A - \int_0^x \overbrace{p(t)}^{\text{Kraft im Abstand } t} dt$

Biegemoment:

$M(x) = -Ax + \int_0^x \underbrace{(x-t)p(t)}_{\substack{= f(t, x) \\ \Rightarrow u' = 0}} dt$

$\Rightarrow \underline{\underline{M'(x) = -A + \underbrace{(x-x) \cdot p(x)}_{\substack{= f(v(x), x) \\ \downarrow \\ x}} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)}} + \int_0^x \underbrace{p(t)}_{= f_x} dt = -Q(x)}}$