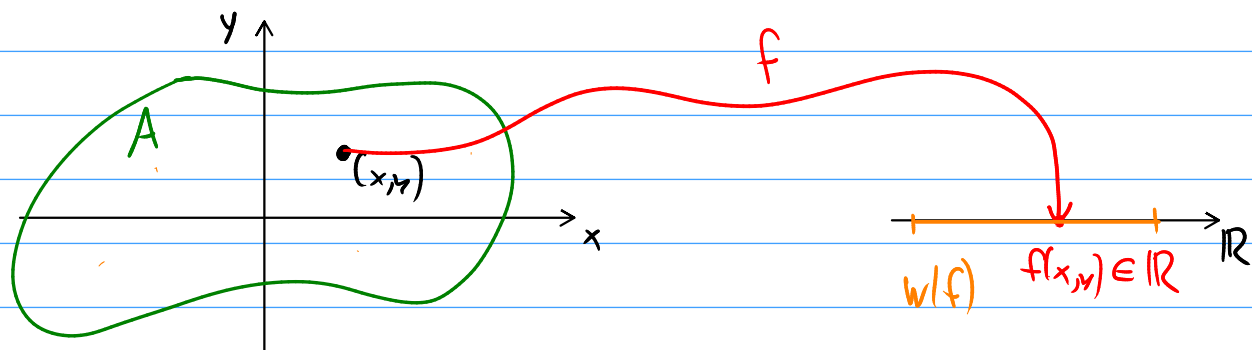


- Übungen: Ab heute (MATL) bzw Freitag (MAVT)
- Montag, 28.02.: Selbsteinschätzungstest in Schnellübung, nur SC/MC-Fragen
Modus: 90min, wie SC/MC-Teil an der Basisprüfung

IV Funktionen in mehreren Variablen

IV.1 Funktionen in 2 Variablen



Def: Sei $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine **reelle Funktion in 2 Variablen**

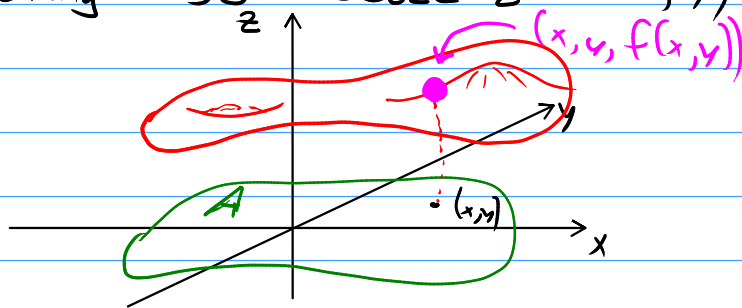
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

mit Definitionsbereich $D(f) := A$

und Wertebereich / Bild

$$W(f) := \{ f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D(f) \}$$

Darstellung in 3D: Setze $z := f(x, y)$



Bsp: • $f(x, y) \hat{=}$ Höhe über Meer bei Koordinaten (x, y)

• $f(x, t) \hat{=}$ Temperatur eines dünnen Stabs am Punkt x zum Zeitpunkt t .

• $f(x, t) \hat{=}$ $A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \left(\frac{x}{c} - t\right) + \varphi\right)$, **harmonische Welle**
 ↑ Amplitude ↑ Periode ↑ Phasengeschwindigkeit ↑ Phasenverschiebung

• $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben $\Rightarrow f(x, y) = ax + by + c$

ist eine **lineare Funktion**.

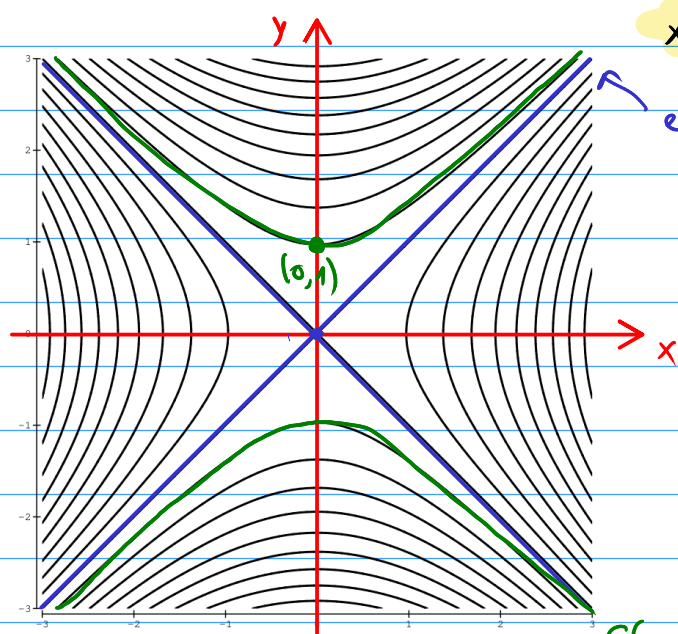
$D(f) = \mathbb{R}^2$, Falls $(a, b) \neq (0, 0)$, ist $W(f) = \mathbb{R}$

$$\bullet g(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow D(g) = \mathbb{R}^2, w(g) = [0, \infty)$$

Def: $\Gamma(f) := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D(f) \}$
ist der Graph von f , eine Fläche im Raum.

Def: Für $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{ (x, y) \in D(f) \mid f(x, y) = C \}$
die Niveaulinie von f zum Niveau C .

Bsp: $f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow$ Niveaulinien erfüllen die Gleichung
 $x^2 - y^2 = C$, Hyperbelgleichung



enthält $(0, 0)$

$$\Rightarrow f(0, 0) = 0^2 - 0^2 = 0 = C$$

\Rightarrow Niveaulinie für $C = 0$

$$x = y \Rightarrow f(x, x) = x^2 - x^2 = 0$$

$$x = -y \Rightarrow f(-y, y) = (-y)^2 - y^2 = 0$$

\Rightarrow Auch diese Niveaulinie

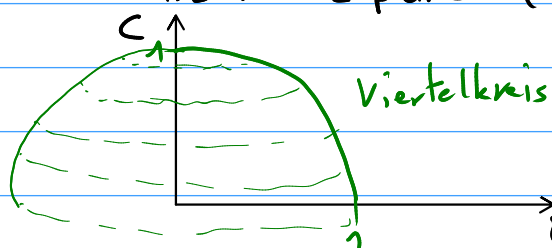
Bsp: $g(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. $\Gamma(g) = ?$

$$\text{Niveaulinien: } C = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow C^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - C^2$$

\Rightarrow Niveaulinien zu Niveau C ist ein Kreis

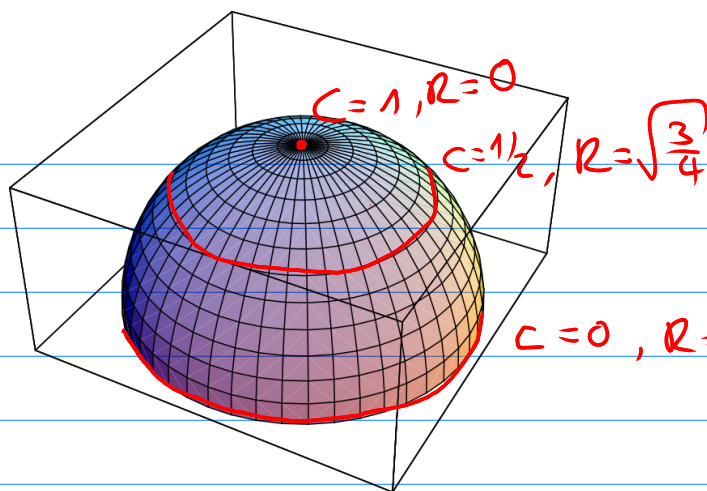
mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $\sqrt{1 - C^2} =: R(C)$



Viertelkreis

$$R(C)^2 + C^2 = 1$$

$\Rightarrow \Gamma(g)$ muss eine
Halbkugeloberfläche sein.



Spezialfälle der Niveaulinien:

- $C=1 \Rightarrow x=y=0$,
Niveaulinie ist ein Punkt.

- $C < 0$ oder $C > 1$:
Niveaulinie ist Leere Menge
($\Rightarrow C \notin W(g)$)

- Eine Niveaulinie kann auch eine Fläche bzw. ein Gebiet sein, wenn die Funktion dort konstant ist:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & \text{wenn } x^2 + y^2 \geq 1 \\ 0, & \text{wenn } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Bsp: Zustandsgleichung des Idealen Gases:

$$\overset{\text{Temperatur}}{T}(p, \overset{\text{Volumen}}{V}) = \frac{1}{\underset{\text{Druck}}{p} \cdot \underset{\text{Gaskonstante}}{R}} \cdot p \cdot V$$

Niveaulinie: $T \equiv C$ konstant, "Punkte" mit gleicher Temperatur
 \Rightarrow Niveaulinien sind Isothermen

Analog mit konstantem Druck: Isobaren

IV.2 Partielle Ableitungen

In einer Variable: Steigung $\hat{=}$ Ableitung, also

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

In zwei Variablen: Fixiere $y := y_0$, setze $g(x) := f(x, y_0)$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

Def: Die partielle Ableitung von f nach x adS (x_0, y_0) ist:

$$f_x(x_0, y_0) := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"del"}}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Analog: Die partielle Ableitung von f nach y adS (x_0, y_0) ist

$$f_y(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Für jede Koordinate/Variable gibt es eine partielle Ableitung, auch mit noch mehr Dimensionen.

Bsp: $f(x, y) = \left(x - \frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - x + 3y + 15/2$.

$\Rightarrow f_x(x, y) = 3 \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 0 + 0$

$f_y(x, y) = \left(x - \frac{5}{4}\right)^3 \cdot 2 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) + 0 + 3 + 0$

Also: Bei der partiellen Ableitung nach x wird y als Konstante behandelt.

Feststellung: f_x und f_y sind wiederum Funktionen in 2 Variablen.

\Rightarrow Weitere Ableitungen: $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$

Themen: Mehrfache partielle Ableitungen, Satz von Schwarz, Integrabilitätsbedingung

Letztes Mal:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Analog für $f_y(x_0, y_0)$

Notation: Der Gradient von f ist $\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

Bsp: $f(x, y) = e^{x^3 + 3y}$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = \underbrace{3x^2}_{\text{innere Abl.}} \cdot \underbrace{e^{x^3 + 3y}}_{\text{äussere Abl.}}$$

$$f_y(x, y) = \underbrace{3}_{\text{innere / äussere Abl.}} \cdot \underbrace{e^{x^3 + 3y}}_{\text{innere / äussere Abl.}}$$

2. Ableitungen: $(f_x)_x = 6x \cdot e^{x^3 + 3y} + 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3 + 3y}$
 $(f_x)_y = 3x^2 \cdot 3 \cdot e^{x^3 + 3y}$

$$(f_y)_x = 3 \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3 + 3y}$$

$$(f_y)_y = 3 \cdot 3 \cdot e^{x^3 + 3y}$$

Aufgabe: Finde alle f mit $f_x \equiv 0$ Nullfunktion
"gleich" als Funktion

$$\Rightarrow f = \int f_x dx = f(x, y) + C(y), \quad C(y) \text{ eine beliebige Funktion in } y.$$

Hier: $f = \int 0 dx = C(y)$, d.h. $f(x, y) = C(y)$, beliebige Funktion, nicht ganz konstant wie bei 1 Variable.

Aufgabe: $f_y(x, y) = \cos(y/x)$. Was kann f sein?

$$\Rightarrow f = \int f_y dy = x \cdot \sin(y/x) + u(x), \quad u \text{ beliebig}$$

Aufgabe: $f_{xy} \equiv 0$

$$f_x \text{ ist konstant in } y \Rightarrow f_x(x, y) = u(x)$$

$$\Rightarrow f = \int f_x dx = U(x) + V(y), \quad U \text{ und } V \text{ beliebig, d.h.: } x \text{ und } y \text{ kommen nicht "gemischt" vor.}$$

Bsp: $f(x, y) = \operatorname{Arctanh}(y/x)$

Erinnerung: $\operatorname{Arctanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$$f_x = \underbrace{\frac{1}{1-(y/x)^2}}_{\text{äussere}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2}\right)}_{\text{innere Abl.}} = \frac{-y}{x^2 - y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1-(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$(f_x)_y = \frac{(-1) \cdot (x^2 - y^2) - (-y) \cdot (-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$(f_y)_x = \frac{1 \cdot (x^2 - y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

IV.3 Der Satz von Schwarz, die Integrabilitätsbedingung

Satz von Schwarz: Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$.

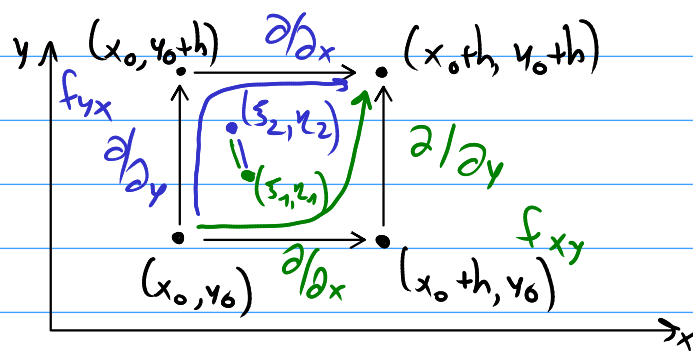
Wenn f_{xy} und f_{yx} in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig sind, dann gilt: $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

Folgerung: Die Reihenfolge von partiellen Ableitungen ist (meist) egal.

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyyxx} = f_{xxxyx}$$

Stetig in 2 Variablen? Def: f ist in einer Umgebung von (x, y) stetig, wenn für jede Folge $(x_n, y_n)_n$ mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ gilt: $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y)$

Beweis: Betrachte das Quadrat



Mittelwertsatz: Verschiebung in einer Koordinate ist durch die (partielle) Ableitung in diese Richtung ausdrückbar.

$$\text{Sei } \varphi(x) := f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$$

$$A(h) := \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$$

$$\text{MWS: } \frac{A(h)}{h} = \frac{\varphi(\overbrace{x_0+h}^b) - \varphi(\overbrace{x_0}^a)}{\underbrace{(x_0+h) - x_0}_{=b-a}} = \varphi'(\xi_1), \text{ mit } \xi_1 \in (x_0, x_0+h)$$

$$\begin{aligned} \text{MWS: } \frac{A(h)}{h^2} &= \frac{\varphi'(\xi_1)}{h} = \frac{f_x(\xi_1, \overbrace{y_0+h}^b) - f_x(\xi_1, \overbrace{y_0}^a)}{\underbrace{(y_0+h) - y_0}_{=b-a}} \\ &= f_{xy}(\xi_1, \eta_1) \text{ mit } \eta_1 \in (y_0, y_0+h) \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$$

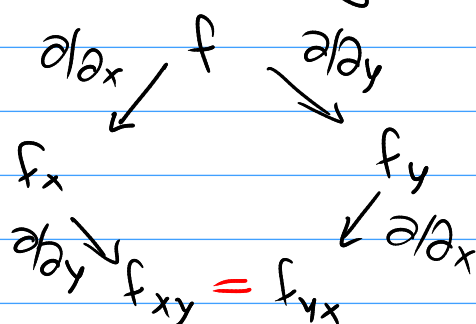
$$\Rightarrow \frac{A(h)}{h^2} = f_{yx}(\xi_2, \eta_2) \text{ mit } \begin{matrix} \xi_2 \in (x_0, x_0+h) \\ \eta_2 \in (y_0, y_0+h) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f_{yx}(\xi_2, \eta_2)$$

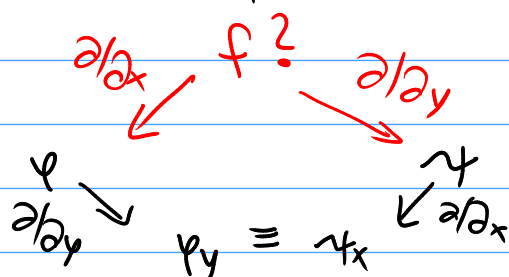
$$\text{Grenzwert: } h \rightarrow 0 \Rightarrow (\xi_1, \eta_1) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (\xi_2, \eta_2) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \underline{f_{xy}(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\xi_1, \eta_1) = \lim_{h \rightarrow 0} f_{yx}(\xi_2, \eta_2) = \underline{f_{yx}(x_0, y_0)} \quad \square$$

Wir haben also ein Diagramm



Was ist, wenn man f nicht kennt?



Satz: Erfüllen 2 stetig differenzierbare Funktionen die **Integrabilitätsbedingung (IB)** $\varphi_y \equiv \psi_x$

in einem achsenparallelen Rechteck, dann gibt es eine Funktion f mit $f_x \equiv \varphi$ und $f_y \equiv \psi$.

Beweis: Ohne, die f lassen sich konstruieren.

Bsp: Seien $\varphi(x,y) = x^2 + y$, $\psi(x,y) = y^2 + x$
 $\Rightarrow \varphi_y = 1$, $\psi_x = 1$ IB ✓
 Satz \Rightarrow Es gibt ein f mit $f_x \equiv \varphi$, $f_y \equiv \psi$

Bestimmen von f , Variante 1: Integrale vergleichen

$$\cdot f_x \equiv \varphi \Rightarrow f = \int f_x dx = \frac{1}{3} x^3 + xy + v(y)$$

$$\cdot f_y \equiv \psi \Rightarrow f = \int f_y dy = \frac{1}{3} y^3 + xy + u(x)$$

$$\Rightarrow \text{Setze } v(y) = \frac{1}{3} y^3 + C \text{ und } u(x) = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + xy + \frac{1}{3} y^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Variante 2: Integral ableiten

$$\cdot f_x \equiv \varphi = x^2 y \Rightarrow f = \int f_x dx = \frac{1}{3} x^3 + xy + v(y)$$

$$\cdot f_y \equiv \psi \Rightarrow f_y = \boxed{x + v'(y)} \stackrel{!}{=} y^2 + \boxed{x} = y$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{3} y^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + xy + v(y) = \frac{1}{3} x^3 + xy + \frac{1}{3} y^3 + C$$

Bsp: $\varphi(x, y) = \frac{y^2}{2x} + x^3, \quad \psi(x, y) = y \cdot \ln(x)$

$$\Rightarrow \varphi_y = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}, \quad \psi_x = \frac{y}{x} \quad \text{IB } \checkmark$$

f bestimmen: $f_x \equiv \varphi \Rightarrow f = \int \varphi dx = \frac{y^2}{2} \ln x + \frac{x^4}{4} + v(y)$

Variante 2: $f_y = y \cdot \ln x + v'(y) \stackrel{!}{=} y \cdot \ln x = \psi$

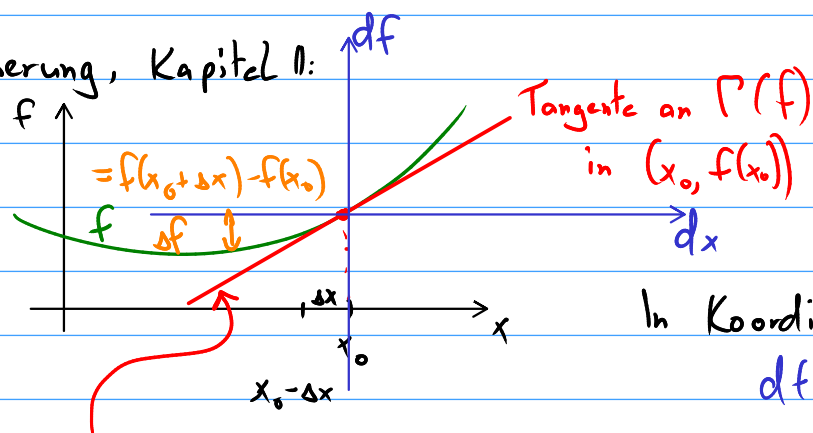
$$\Rightarrow v'(y) \equiv 0 \Rightarrow v(y) = C$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x, y) = \frac{y^2}{2} \ln x + \frac{x^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}}}$$

(Weil, die
Terme in x sind
alle schon bekannt.)

IV. 4 Linearisieren, Fehlerrechnung

Erinnerung, Kapitel I:

In Koordinaten (dx, df) :

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

$$t(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Stützpunkt}} + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Veränderung in } x\text{-Richtung}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Veränderung in } x\text{-Richtung}}$$

Satz: Für dx klein ist $df \approx dt$

Hier: Funktionen in 2 Variablen, d.h. auch mit 2 Richtung

Def: Lineare Ersatzfunktion von f ad S (x_0, y_0) ist:

$$t: (x, y) \mapsto \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{Stützpunkt}} + \underbrace{f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{Veränderung in } x\text{-Richtung}} + \underbrace{f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}_{\text{Veränderung in } y\text{-Richtung}}$$

$\Rightarrow t$ ist eine lineare Funktion, d.h. der Graph ist eine Ebene und die partiellen Ableitungen von t sind konstant.

Der Graph $\Gamma(t)$ ist die Tangentialebene von f ad S (x_0, y_0) :

$$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{Stützpunkt}} + \underbrace{f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{Veränderung in } x\text{-Richtung}} + \underbrace{f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}_{\text{Veränderung in } y\text{-Richtung}}$$

Bsp: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$f(1, 2) = 5, \quad f_x = 2x, \quad f_y = 2y$$

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 4$$

$$\Rightarrow z = 5 + 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2)$$

$$= -5 + 2x + 4y$$

Approximation durch Ersatzfunktion:

Wie in Kapitel II: Vergleiche f mit der Ersatzfunktion t

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - t(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) \cdot \overset{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} - f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Satz: Wenn f stetig diff'bar ist und $(x_0, y_0) \in D(f)$, dann gilt:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\underbrace{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}_{\text{Abstand zu } (x_0, y_0)}} = 0 \quad \text{bzw. } \varphi(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

Wenn $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

Beweis: Addiere und subtrahiere $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ in φ

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \quad \text{Unterschied in } y \\ &\quad + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad \text{Unterschied in } x \\ &\quad - f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x - f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y\end{aligned}$$

MWS: Es gibt ein $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ und ein $\eta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta x, \Delta y) &= f_y(x_0 + \Delta x, \eta) \cdot \Delta y \\ &\quad + f_x(\xi, y_0) \cdot \Delta x\end{aligned}$$

$- f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$
 $- f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \underbrace{\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}_{\substack{\leq 1 \\ \Delta y}} \cdot \underbrace{\left(f_x(\overset{x_0}{\xi}, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right)}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}_{\substack{\leq 1 \\ \Delta x}} \cdot \underbrace{\left(f_y(x_0 + \Delta x, \underset{y_0}{\eta}) - f_y(x_0, y_0) \right)}_{\rightarrow 0}\end{aligned}$$

$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \underline{\underline{0}}.$$

□

Totales Differential

Verschiebung des Koordinatensystems nach $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

⇒ Neue Koordinaten dx, dy, df

⇒ Lineare Ersatzfunktion von f erhält die Gleichung

Totales Differential: $df = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Vergleich: $t(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Sei $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

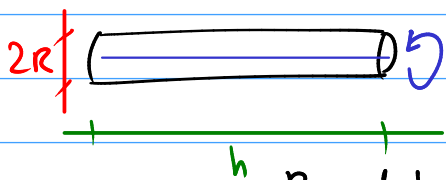
Unterschied $\Delta f \Leftrightarrow df$?

Da $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$, gilt: $\Delta f - df = \varphi(\Delta x, \Delta y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$

⇒ Für kleine $\Delta x, \Delta y$ approximiert $df \approx \Delta f$ gut.

Fehlerrrechnung

Bsp: Vollzylinder mit Radius R , Höhe h , Dichte ρ



Massenträgheitsmoment: $\Theta = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot h$

R und h haben einen Messfehler von 1%. Auswirkung auf Θ ?

Fehler: $\Delta \Theta \approx d\Theta = \underline{\Theta_R} dR + \underline{\Theta_h} dh$

$= \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (\underline{4 \cdot R^3 \cdot h \cdot dR} + \underline{R^4 dh})$, absoluter Fehler

Relativer Fehler: $\left| \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \right| \approx \left| \frac{d\Theta}{\Theta} \right|$

$$\leq 4 \cdot \left| \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{dh}{h} \right| = 4 \cdot \underbrace{\left| \frac{\Delta R}{R} \right|}_{\leq 1\%} + \underbrace{\left| \frac{\Delta h}{h} \right|}_{\leq 1\%} \leq 5\%$$

Der Grossteil des Fehlers stammt von R (von 1% nach 4%),
nicht von h (von 1% nach 1%)

Bsp: Spezifisches Gewicht: $\gamma = \frac{F_G}{V}$

- Gewichtskraft
- Volumen

Sei x das Gewicht des Körpers in Luft, y Gewicht in Wasser

Archimedisches Prinzip: $x = \gamma \cdot V$, $y = x - V \cdot 1$ (da $\rho_{\text{Wasser}} = 1$)

$$\Rightarrow \gamma = \frac{x}{x-y}$$

Seien x, y mit einer Toleranz von 1% gemessen.
Fehler in γ ?

$$\Delta \gamma \approx d\gamma = \gamma_x \cdot dx + \gamma_y \cdot dy = \frac{x-y-x}{(x-y)^2} dx + \frac{0-x \cdot (-1)}{(x-y)^2} dy$$

$$= \frac{-y dx + x dy}{(x-y)^2}$$

$$\left| \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right| \approx \left| \frac{d\gamma}{\gamma} \right| \stackrel{(*)}{=} \left| \frac{y}{x-y} \frac{dx}{x} + \frac{x}{x-y} \frac{dy}{y} \right|$$

$$\leq \left| \frac{y}{x-y} \right| \underbrace{\left| \frac{dx}{x} \right|}_{\leq 1\%} + \left| \frac{x}{x-y} \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{dy}{y} \right|}_{\leq 1\%}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right| \approx 2\% \cdot \left| \frac{y}{x-y} \right| = 2\% \cdot \underbrace{|\gamma - 1|}$$

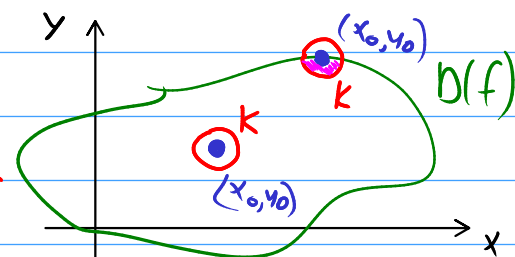
wird gross, wenn γ schon gross ist.

IV.5 Extrema

- Funktionen in einer Variable:
- Setze $f'(x)=0$, Klassifikation über höhere Ableitungen
 - Nicht diff'bare Stellen, Rand

Vokabular: Sei $(x_0, y_0) \in D(f)$. Diese Stelle ist eine...

- ... **globale Maximalstelle**, wenn $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$
- ... **globale Minimalstelle**, wenn $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$.
- ... **lokale Maximalstelle**, wenn $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f) \cap K$, wobei K eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0) ist.
- ... **lokale Minimalstelle**, wenn $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f) \cap K$
- ... **lokale / globale Extremalstelle**, wenn (x_0, y_0) eine lokale / globale Maximal- oder Minimalstelle ist.



- An so einer Stelle ist $f(x_0, y_0)$ das **lokale / globale Maximum / Minimum / Extremum**.

Bsp: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D(f) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

- Sei $(x_0, y_0) = (1, 0) \in D(f)$, $f(1, 0) = 1^2 + 0^2 = 1$.
Für alle $(x, y) \in D(f)$ ist $f(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1 = f(1, 0)$
 $\Rightarrow (1, 0)$ ist eine globale Maximalstelle.

- Ebenso: $f(0, 1) = f(-1, 0) = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1$
 \Rightarrow Diese Funktion hat sehr viele globale Maximalstellen!
- $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D(f) \Rightarrow (0, 0)$ ist eine globale Minimalstelle

Satz: Ist $D(f)$ ein beschränktes Gebiet mit Rand und dazu f stetig ist, dann hat f je eine globale Maximal- und Minimalstelle

beschränkt: Es gibt einen (möglicherweise sehr grossen) Kreis K mit $D(f) \subset K$.

Bsp: $f(x,y) = x^6 + y^4$, $D(f) = \{ (x,y) \mid |x|, |y| \leq 1 \}$

\Rightarrow Globale Maximalstelle in $(\pm 1, \pm 1)$,
globale Minimalstelle in $(0, 0)$

Wenn hingegen $D(f) = \{ (x,y) \mid |x|, |y| < 1 \}$, dann hat f keine globale Maximalstelle. Dieses $D(f)$ beinhaltet den Rand nicht.

Finden von Extrema

Satz: Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle von f , so ist

- i) (x_0, y_0) auf dem Rand von $D(f)$, oder
- ii) $f_x(x_0, y_0)$ oder $f_y(x_0, y_0)$ ist nicht definiert, oder
- iii) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Bemerkungen: • Im Fall iii) ist die Tangentialebene horizontal.

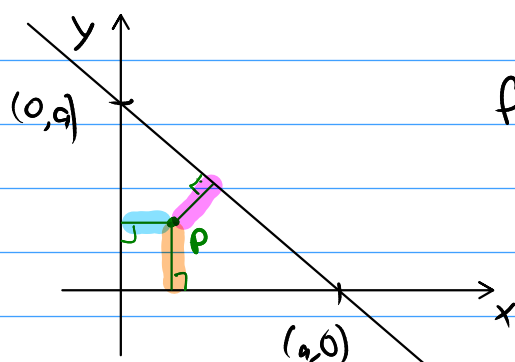
- Aus der Gleichung in iii) folgt **nicht**, dass (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle ist. Es könnte z.B. auch ein Sattelpunkt sein.
- Zum Finden aller Extremalstellen müssen auch alle Stellen vom Typ i) und ii) untersucht werden.

Bsp: $f(x,y) = y^2 - 2x^3 + x$

- i) $D(f) = \mathbb{R}^2$, kein Rand
- ii) $f_x = -6x^2 + 1$, $f_y = 2y$
 $\Rightarrow f_x$ und f_y existieren \Rightarrow Keine Extremalstellen mit ii)
- iii) $\begin{cases} -6x^2 + 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{6} \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (\pm 1/\sqrt{6}, 0)$ sind Kandidaten für lokale Extremalstellen

Bsp: Für $a > 0$ sei G die Gerade mit $x+y=a$



$f(P)$ = Summe der Abstände von P zu x -Achse, y -Achse und G .

Welches P minimiert $f(P)$?

$G: x+y=a$

Sei $P=(x,y) \Rightarrow f(P) = y + x + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-x-y)$
 innerhalb des Dreiecks

$D(f) = \{ (x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a \}$

$\begin{aligned} & \cdot f_x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \\ & \cdot f_y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \end{aligned} \quad \text{für alle } x,y \Rightarrow \begin{cases} \text{Immer diffbar, kein ii)} \\ f_x \neq 0, \text{ kein iii)} \end{cases}$

\Rightarrow Extremalstellen sind auf dem Rand!

Der Rand besteht aus 3 Segmenten:

• x -Achse zwischen $(0,0)$ und $(a,0)$

$\Rightarrow f(x,0) = x + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-x), \quad x \in [0,a]$

$f_x \neq 0 \Rightarrow f_x(x,0) \neq 0$ keine lok. Extrema für $x \notin (0,a)$
 \Rightarrow Extrema auf Rand des Intervalls, also in $(0,0)$ und $(a,0)$

Intervall
↓
Koordinaten

y -Achse zwischen $(0,0)$ und $(0,a)$
 $\Rightarrow f(0,y) = y + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-y)$, analog: Kandidaten: $(0,0), (0,a)$

Gerade $G: x+y=a \Rightarrow f(x,y) = \underbrace{x+y}_{=a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{a-x-y}_{=0}) = a$ konstant

Vergleichen:

- $\cdot f(0,0) = a/\sqrt{2}$ globales Minimum
- $\cdot f(0,a) = a$
- $\cdot f(a,0) = a$
- $\cdot f(x,y)$ mit $x+y=a$ = a globales Maximum

globale Maximalstellen.

Skript: 2 weitere Beispiele mit 'geraden Rändern'

Bsp: $f(x,y) = y^2 - 2x^3 + x$ mit $D(f) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\left. \begin{array}{l} \cdot f_x = -6x^2 + 1 \\ \cdot f_y = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Typ ii)} \text{ gibt es nicht} \\ \text{Typ iii)} \text{ bei } (x,y) = (\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, 0) \in D(f) \end{array}$

Typ i), Extrema auf dem Rand?

Rand ist ein Kreis, $x^2 + y^2 = 1$

Parametrisieren: $(x,y) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \sin^2 t - 2\cos^3 t + \cos t$

Funktion in einer Variable t , also: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0!$

$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \Rightarrow f = 1 - \cos^2 t - 2\cos^3 t + \cos t$

$u = \cos t \quad 1 - u^2 - 2u^3 + u =: g(u)$

Extrema von $g(u)$ mit $u \in [-1, 1]$:

$$g'(u) = -2u - 6u^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow 6u^2 + 2u - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{12} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{7}}{6}$$

$$\text{Randwerte: } u_3 = -1, \quad u_4 = 1$$

Werte einsetzen \Rightarrow Extrema von $g(u)$

\Rightarrow Das sind die Extrema von f auf dem Rand.

Zum Schluss: Randextrema mit Extrema im Inneren vergleichen.

Themen: Verallgemeinerte Kettenregel, Tangenten an implizit gegebene Kurven, Funktionen in 3 Variablen

IV.6 Verallgemeinerte Kettenregel

In einem Gebiet $A = D(f)$ liegt eine Kurve K mit Parametrisierung \vec{r} . Wie verhält sich f entlang K ?

Setze $F(t) = f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t))$. Was ist $F'(t)$?

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \quad \parallel \text{ mit } x = x(t), y = y(t) \end{aligned}$$

$$\text{Erinnerung: } \varphi(\Delta x, \Delta y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - f_x \Delta x - f_y \Delta y$$

$$\begin{aligned} \text{Schreibe: } \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \\ \Rightarrow x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta x, \quad y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t) + \Delta x, y(t) + \Delta y) - f(x(t), y(t))}{\Delta t}$$

φ einsetzen: $F'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y) + f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y}{\Delta t}$

Erweitern $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} + f_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right]$

$\rightarrow \dot{x}$ $\rightarrow \dot{y}$

$$\sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F'(t) = \underbrace{f_x}_{\text{Äußere Ableitungen}} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{\text{innere Ableitungen}} + \underbrace{f_y}_{\text{Äußere Ableitungen}} \cdot \underbrace{\dot{y}}_{\text{innere Ableitungen}}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \text{grad } f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t), \end{aligned}$$

die verallgemeinerte Kettenregel

Bsp: $f(x, y) = xy^2$, $\vec{r}(t) = \left(-\frac{3}{2}t \cos t, t \sin t\right)$, $F(t) = f(\vec{r}(t))$

$$\Rightarrow F'(t) = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} = y^2 \cdot \dot{x} + 2xy \cdot \dot{y}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left(-\frac{3}{2}(\cos t - t \sin t), \sin t + t \cos t\right)$$

$$\Rightarrow F'(t) = \underbrace{t^2 \sin^2 t}_{=y^2} \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{=\dot{x}} \cdot (\cos t - t \sin t) + 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)t \cos t}_x \cdot \underbrace{t \sin t}_{y(\sin t + t \cos t)} \cdot \dot{y}$$

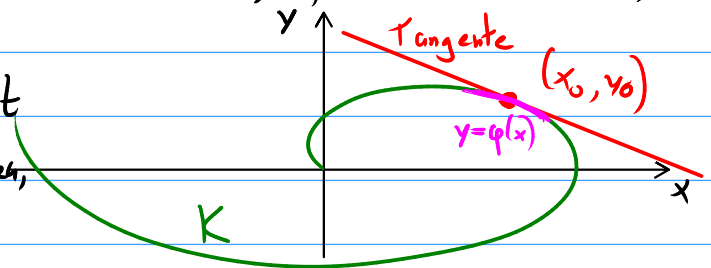
Bei $t = \pi$: $F'(\pi) = (\dots) \cdot \underbrace{(\sin^2 \pi)}_{=0} \cdot (\dots) + (\dots) \cdot \underbrace{(\sin \pi)}_{=0} \cdot (\dots) = \underline{\underline{0}}$

Anwendung: Tangenten an Niveaulinien und implizit gegebene Kurven

Sei K gegeben durch $f(x,y)=0$ und $(x_0, y_0) \in K$, d.h. $f(x_0, y_0)=0$

\Rightarrow In einem Bereich um (x_0, y_0) lässt sich y als Funktion von x ausdrücken,
d.h. $\varphi(x) = y$

$$\Rightarrow f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = 0$$



Gesucht: Tangentensteigung $\varphi'(x_0)$. Wie kommt man an φ' ran?

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ für alle } x \Rightarrow F'(x) = 0.$$

$$\text{Kettenregel: } F'(x) = f_x \cdot x_x + f_y \cdot y_x = f_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}, \text{ Tangentensteigung on } K \text{ bei } (x_0, y_0)$$

Bsp: Hyperbelgleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (x_0, y_0) \in K$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Tangentensteigung: } m = - \frac{f_x}{f_y} = + \frac{2x_0/a^2}{2y_0/b^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$\text{Tangentengleichung: } \underline{y - y_0} = m \cdot (x - x_0) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0) \quad \begin{array}{l} \parallel \cdot \frac{y_0}{b^2} \\ \parallel \dots = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{a^2} \cdot (x - x_0) - \frac{y_0}{b^2} (y - y_0) = 0$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \text{ da } (x_0, y_0) \in K \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \text{ Tangentengleichung}}}$$

Bsp. Zustandsgrößen von Gasen: Druck p , Volumen V , Temperatur T

Ideales Gas: $p \cdot V = nRT$. Realistischer: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = nRT$

Dieses Zusammenspiel ergibt jeweils 3 Funktionen:

$$p(V, T), \quad V(p, T), \quad T(p, V)$$

Definiere Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = \frac{1}{V} \cdot V_T$

Spannungskoeffizient: $\beta = \frac{1}{p} \cdot p_T$

Kompressibilität: $\kappa = -\frac{1}{V} \cdot V_p$

Für $V = C$ konstant wird p eine Funktion in T :

$$\tilde{p}: T \mapsto \tilde{p}(T) = p(V, T)$$

$\Rightarrow V(p, T) = V(\tilde{p}(T), T) = C$ konstant, eine Niveaulinie

Ableitung nach T : $V_p \cdot p_T + V_T \cdot \underbrace{T_T}_{=1} = 0$, da $V = C$ konstant

$$\Rightarrow -V \cdot \kappa \cdot p \cdot \beta + \alpha \cdot V \cdot 1 = 0 \quad || : V$$

$$\Rightarrow -\kappa \beta + \alpha = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \kappa \beta$. Diese Gleichung ist unabhängig von der verwendeten Gasgleichung!

IV.7 Funktionen in 3 Variablen

$$D(f) = A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$$

$$\text{bzw. } \vec{r} \longmapsto f(\vec{r})$$

Bsp.: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$, Lineare Funktion

$$\cdot g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{|\vec{r}|}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) = \vec{0}$$

Bilder sind schwierig zu zeichnen, es bräuchte 4 Dimensionen.
Stattdessen verwendet man Niveauflächen:

Def: Für $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x, y, z) \in D(f) \mid f(x, y, z) = C\}$ die **Niveaufläche** zum **Niveau C**.

Bsp: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d = C$

$\rightarrow ax + by + cz = C - d$, Ebene im Raum

$\cdot g(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} = C \Rightarrow$ Kugelschalen mit Radius $\frac{1}{\sqrt{C}}$, d.h.
Punkte näher bei $\vec{0}$ haben grössere Werte.

07.03.2022 Themen: Sätze für Funktionen in 3 Variablen, Richtungsableitung, Gradient

Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

Def: $f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$

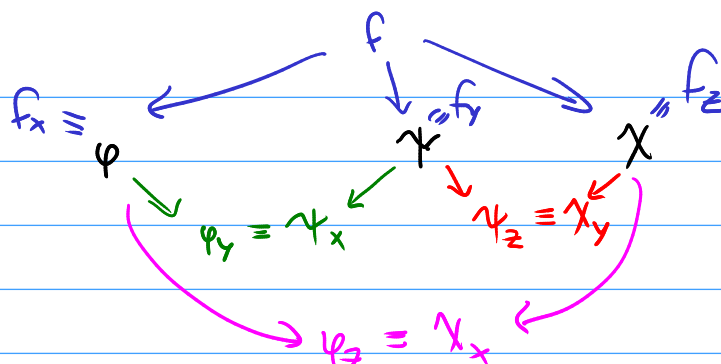
Analog: f_y, f_z

Notation: $\cdot \vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, wenn diese Punkte definiert sind.

$\cdot f_x = f_x(x, y, z)$, wenn klar ist, welcher Punkt gemeint ist.

Satz von Schwarz: Die Reihenfolge von partiellen Ableitungen spielt in der Regel keine Rolle, d.h. z.B. $f_{xyzx} \equiv f_{zyyx} \equiv f_{yzxx}$ usw.

Integrabilitätsbedingung: Sind φ, γ, χ Funktionen auf einem achsenparallelen Quader definiert und $\varphi_y \equiv \gamma_x$, $\varphi_z \equiv \chi_x$, $\gamma_z \equiv \chi_y$, dann gibt es ein f mit $f_x \equiv \varphi$, $f_y \equiv \gamma$ und $f_z \equiv \chi$.



Bsp: $\varphi = 3x^2 + 3y - 1$, $\gamma = z^2 + 3x$, $\chi = 2yz + 1$

IB prüfen: $\varphi_y = 3 = \gamma_x$, $\gamma_z = 2z = \chi_y$, $\varphi_z = 0 = \chi_x$ ✓

⇒ Es gibt so ein f .

$f_x = \varphi \Rightarrow f = \int \varphi dx = x^3 + 3xy - x + u(y, z)$

⇒ $f_y = 3x + u_y \stackrel{!}{=} z^2 + 3x = \gamma$

→ $u_y = z^2 \Rightarrow u = y \cdot z^2 + v(z)$

→ $u_z = 2yz + v'(z)$

← nicht $v(x, z)$, da u nicht von x abhängt!

⇒ $f_z = \frac{\partial}{\partial z} (x^3 + 3xy - x + u(y, z)) = u_z = 2yz + v'(z) \stackrel{!}{=} 2yz + 1 = \chi$

⇒ $v'(z) = 1$

⇒ $v(z) = z + C$

⇒ $f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C$

Verallgemeinerte Kettenregel

Parametrisierung einer Raumkurve: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ⇒ Definiere $F(t) = f(\vec{r}(t))$

→ $F'(t) = f_x(\vec{r}(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(\vec{r}(t)) \cdot \dot{y}(t) + f_z(\vec{r}(t)) \cdot \dot{z}(t)$

$= \text{grad } f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \text{Gradient von } f$

$\text{grad } f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}^3$, Vektorfeld in \mathbb{R}^3
 $\vec{r} \mapsto \text{grad } f(\vec{r})$ (mehr dazu in Kapitel VI)

Alternative Notation: $\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot f = \text{grad } f$
 "Nabla" \hookrightarrow als Skalar

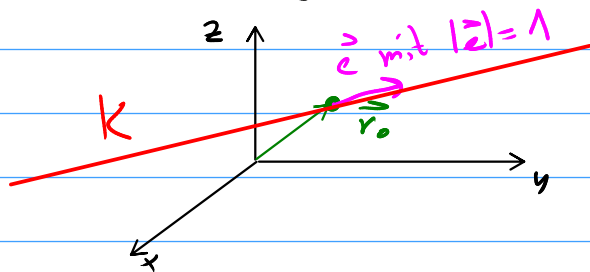
Bsp: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d \Rightarrow \text{grad } f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \text{grad } g(\vec{r}) = \frac{-2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}.$$

Richtungsableitung

Sei K eine Gerade durch $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Parametrisierung: $t \mapsto \vec{r}_0 + \vec{e} \cdot t$, wobei $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor ist.



Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 mit $\vec{r}_0 \in A \subset \mathbb{R}^3$.

Setze $F(t) := f(\vec{r}(t)) \Rightarrow F'(t) = \text{grad } f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$

$\dot{\vec{r}}(t) = (\vec{r}_0 + \vec{e} \cdot t)' = \vec{e}$. Am Punkt $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ ist die Ableitung also:

$F'(0) = \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot \vec{e} =: D_{\vec{e}} f(\vec{r}_0)$, die Richtungsableitung von f in Richtung \vec{e} an der Stelle \vec{r}_0 .

Bsp: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{\vec{e}} f(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}_0) \\ f_y(\vec{r}_0) \\ f_z(\vec{r}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_x(\vec{r}_0)$

\Rightarrow Richtungsableitung nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist gerade die partielle Ableitung f_x .

Bsp: $f(x, y, z) = \sin(xyz)$, $\vec{r}_0 = (1, 1, 0)$, $\vec{z} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Normierung, damit $|\vec{z}| = 1$.

$$\Rightarrow D_{\vec{z}} f(\vec{r}_0) = \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\cos(xyz)}_{\text{grad } f, \text{ noch nicht eingesetzt}} \cdot \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cos(0)}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

$D_{\vec{z}} f$ variiert bei fixen f und \vec{r}_0 als Skalarprodukt in \vec{z} .

- Um $D_{\vec{z}} f(\vec{r}_0)$ zu maximieren, muss das Skalarprodukt möglichst gross werden $\Rightarrow \vec{z}$ muss in Richtung $\text{grad } f(\vec{r}_0)$ zeigen

Satz: Der Gradient $\text{grad } f(\vec{r}_0)$ ist die grösste Richtungsableitung von f adS \vec{r}_0 und er zeigt in die Richtung des grössten Anstiegs.

- $D_{\vec{z}} f(\vec{r}_0) = 0$ heisst das, dass \vec{z} senkrecht auf $\text{grad } f(\vec{r}_0)$ steht. Ausserdem ändert sich f in Richtung \vec{z} nicht, d.h. \vec{z} ist „in der Niveaufläche“ an der Stelle \vec{r}_0 .

Satz: $\text{grad } f(\vec{r}_0)$ steht senkrecht auf der Niveaufläche und auf der Tangentialebene von f in \vec{r}_0 .

Anwendung: Tangentialebene für implizit gegebene Flächen (z.B. Niveauflächen)

Sei $Q: \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = C$ gegeben, mit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
 z.B. ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid

Sei $f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, so dass Q eine Niveaufläche von f ist.

Weiter sei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Q$.

$$\Rightarrow \text{grad } f(\vec{r}_0) = (2\alpha x_0, 2\beta y_0, 2\gamma z_0)$$

Für die Tangentialebene T gilt:

$$\vec{r} = (x, y, z) \in T \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \text{ ist senkrecht zu } \text{grad } f(\vec{r}_0) \\ \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \text{grad } f(\vec{r}_0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha x_0 \\ 2\beta y_0 \\ 2\gamma z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha(x - x_0)x_0 + 2\beta(y - y_0)y_0 + 2\gamma(z - z_0)z_0 = 0$$

$$f(\vec{r}_0) = \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2 = C$$

$$\Rightarrow 2\alpha x \cdot x_0 + 2\beta y \cdot y_0 + 2\gamma z \cdot z_0 = 2C \quad \parallel :2$$

Tangentialebene T : $\alpha \cdot x \cdot x_0 + \beta \cdot y \cdot y_0 + \gamma \cdot z \cdot z_0 = C$
an Niveaufläche Q adS (x_0, y_0, z_0)

Aufgabe: Gegeben 2 Flächenscharen:

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = C_1, \quad \frac{x^2}{\sqrt{y^2 - z^2}} = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Behauptung: Jede Fläche der einen Schar steht senkrecht auf jeder Fläche der anderen Schar.

Lösung: Beide Scharen sind Niveauflächen:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 = C_1, \quad g(x, y, z) = x^2 / \sqrt{y^2 - z^2} = C_2$$

Flächen schneiden sich senkrecht, wenn $\text{grad } f \perp \text{grad } g$

$$\text{grad } f = (2x, 4y, 4z) = 2 \cdot (x, 2y, 2z)$$

$$\text{grad } g = \left(\frac{2x}{\sqrt{y^2 - z^2}}, \left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{x^2 \cdot 2y}{\sqrt{y^2 - z^2}^3}, \left(+\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{x^2 \cdot (+2z)}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f \cdot \text{grad } g &= 2 \cdot \left(\frac{2x^2}{\sqrt{y^2 - z^2}} - \frac{2x^2 y^2}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} + \frac{2x^2 z^2}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} \right) \\ &= \frac{4x^2}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} \cdot \left(y^2 - z^2 - y^2 + z^2 \right) = \underline{0} \text{ für alle } (x, y, z) \quad \square \end{aligned}$$

Lineare Ersatzfunktion

Die **lineare Ersatzfunktion** von f an der Stelle $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist für $\vec{r} = (x, y, z)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}) &= f(\vec{r}_0) + f_x(\vec{r}_0) \cdot (x - x_0) + f_y(\vec{r}_0) \cdot (y - y_0) + f_z(\vec{r}_0) \cdot (z - z_0) \\ &= f(\vec{r}_0) + \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned}$$

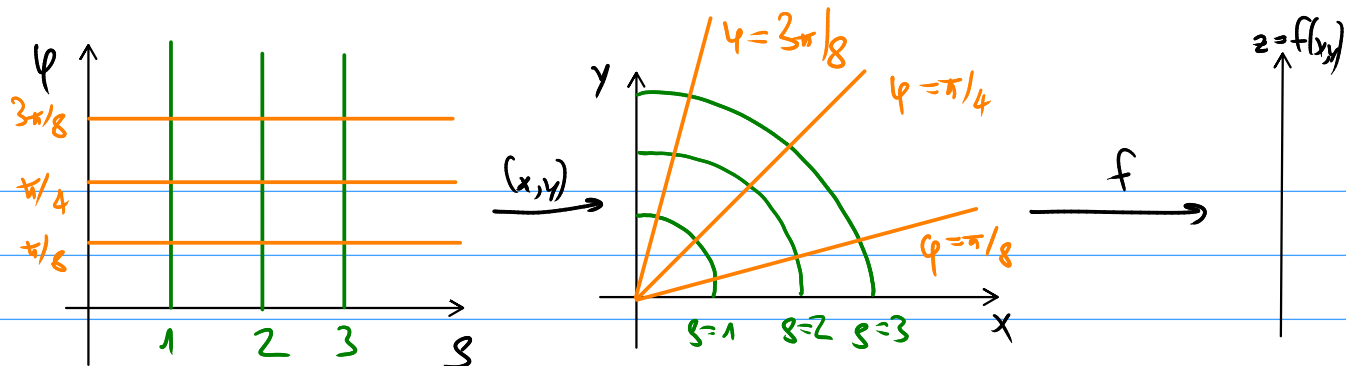
Sind f_x, f_y und f_z stetig, so ist $f(\vec{r}) = L(\vec{r}) + o(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$

IV.8 Koordinatentransformation

Oft lässt sich die mathematische Formulierung eines Problems durch die Wahl von geeigneten Koordinaten vereinfachen.

Bsp: Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 , Zylinder-/Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^3 .

Wie verhalten sich partielle Ableitungen unter Transformationen?



$$x(s, \varphi) = s \cos \varphi$$

$$y(s, \varphi) = s \sin \varphi$$

$$\tilde{f} = f \circ (x, y)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(s, \varphi) = f(x(s, \varphi), y(s, \varphi))$$

Für ein festes φ ist $s \mapsto (x(s, \varphi), y(s, \varphi))$ eine Parametrisierung einer ebenen Kurve in der xy -Ebene mit Parameter s .

Verallgemeinerte Kettenregel: $\tilde{f}_s(s, \varphi) = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s$
 $= \underline{\underline{f_x \cdot \cos \varphi + f_y \cdot \sin \varphi}}$

$$\begin{aligned} x_s &= \cos \varphi, & x_\varphi &= -s \sin \varphi \\ y_s &= \sin \varphi, & y_\varphi &= s \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\varphi(s, \varphi) &= f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi \\ &= \underline{\underline{-f_x \cdot s \sin \varphi + f_y \cdot s \cos \varphi}} \end{aligned}$$

In f_x und f_y wird dabei $(x(s, \varphi), y(s, \varphi))$ eingesetzt.

Bsp: $f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x = 2u \cosh v \\ f_y = -2y = -2u \sinh v \end{cases}$

Neue Koordinaten: $x(u, v) = u \cdot \cosh v$
 $y(u, v) = u \cdot \sinh v$

$$\begin{aligned} x_u &= \cosh v, & x_v &= u \sinh v \\ y_u &= \sinh v, & y_v &= u \cosh v \end{aligned}$$

$$\tilde{f} = f \circ (x, y) = u^2 \cosh^2 v - u^2 \sinh^2 v = u^2, \text{ konstant in } v.$$

Kettenregel: $\tilde{f}_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v = 2u \cosh v \cdot u \sinh v + (-2u \sinh v) \cdot u \cosh v$
 $= 2u^2 (\cosh v \sinh v - \sinh v \cosh v) = \underline{\underline{0}} \checkmark$

Transformation in die andere Richtung

$$\begin{aligned}
 (\hat{f}_s \quad \hat{f}_\varphi) &= (f_x \quad f_y) \cdot \begin{pmatrix} x_s & x_\varphi \\ y_s & y_\varphi \end{pmatrix} \\
 &= (f_x \quad f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -s \sin \varphi \\ \sin \varphi & s \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \leftarrow M
 \end{aligned}$$

Kettenregel in Matrix-Vektor-Schreibweise

Umkehrung: Multiplikation mit M^{-1} von rechts

$$\rightarrow (\hat{f}_s \quad \hat{f}_\varphi) \cdot M^{-1} = (f_x \quad f_y)$$

$$\text{Hier } M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{s} \sin \varphi & \frac{1}{s} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow f_x &= \hat{f}_s \cos \varphi - \hat{f}_\varphi \cdot \frac{1}{s} \sin \varphi \\
 f_y &= \hat{f}_s \sin \varphi + \hat{f}_\varphi \cdot \frac{1}{s} \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Höhere partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{ss} &= (\tilde{f}_s)_s = (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi)_s = (f_x)_s \cdot \cos \varphi + (f_y)_s \sin \varphi \\
 &= \cos \varphi \cdot (f_{xx} \cdot x_s + f_{xy} \cdot y_s) + \sin \varphi \cdot (f_{yx} \cdot x_s + f_{yy} \cdot y_s)
 \end{aligned}$$

$$= f_{xx} \cos^2 \varphi + 2 \cdot f_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + f_{yy} \sin^2 \varphi$$

$$\tilde{f}_{\varphi\varphi} = (\tilde{f}_\varphi)_\varphi = s \cdot (-f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi)_\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= s \cdot \left(-f_x \cdot \cos \varphi - (f_x)_\varphi \sin \varphi - f_y \sin \varphi + (f_y)_\varphi \cos \varphi \right) \\
 &\quad \text{Produktregel für } \partial/\partial \varphi \quad \text{Kettenregel!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= s \cdot \left(-f_x \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (f_{xx} \cdot x_\varphi + f_{xy} \cdot y_\varphi) \right. \\
 &\quad \left. - f_y \sin \varphi + \cos \varphi \cdot (f_{yx} \cdot x_\varphi + f_{yy} \cdot y_\varphi) \right)
 \end{aligned}$$

$$= s \cdot \left(f_{xx} \cdot (-\sin\varphi) \cdot (-s \sin\varphi) + f_{xy} \cdot (-\sin\varphi) \cdot s \cos\varphi + f_{yx} \cdot (\cos\varphi) \cdot (-s \sin\varphi) + f_{yy} \cdot \cos\varphi \cdot s \cos\varphi \right) - f_x \cos\varphi - f_y \sin\varphi$$

$= -\tilde{f}_s$

$$\Rightarrow \tilde{f}_{\varphi\varphi} + s \cdot \tilde{f}_s = s^2 \cdot (f_{xx} \sin^2\varphi - 2f_{xy} \cos\varphi \sin\varphi + f_{yy} \cos^2\varphi)$$

Der **Laplace-Operator** Δ ist für Funktionen $(x,y) \mapsto f(x,y)$ definiert durch $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ (Anwendung: Wärme Gleichung)

Es gilt gemäss Rechnung:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = \tilde{f}_{ss} + \frac{1}{s} \cdot \tilde{f}_s + \frac{1}{s^2} \tilde{f}_{\varphi\varphi}$$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten

Bsp: $f_{tt} = c^2 f_{xx}$, Wellengleichung in (x,t) , eine partielle Differentialgleichung

Neue Koordinaten: $x = \frac{u+v}{2}$, $t = \frac{u-v}{2c}$

$$\rightsquigarrow u = x + ct, v = x - ct$$

$$\Rightarrow \tilde{f} := f \circ (x,t)$$

$$\tilde{f}_u = f_x \cdot x_u + f_t \cdot t_u = f_x \cdot \frac{1}{2} + f_t \cdot \frac{1}{2c}$$

$$\tilde{f}_{uv} = \frac{1}{2} \left((f_x)_v + \frac{1}{c} \cdot (f_t)_v \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(f_{xx} \cdot x_v + f_{xt} \cdot t_v + \frac{1}{c} \cdot \left(f_{tx} \cdot x_v + f_{tt} \cdot t_v \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(f_{xx} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{f_{xt} \cdot \left(-\frac{1}{2c} \right) + \frac{1}{c} \cdot f_{tx} \cdot \frac{1}{2}}_{=0} + \frac{1}{c} \cdot f_{tt} \cdot \left(-\frac{1}{2c} \right) \right)$$

= 0

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(f_{xx} - \frac{1}{c^2} \underbrace{f_{tt}}_{= c^2 \cdot f_{xx}} \right)$$

laut Wellengleichung

$$= \underline{\underline{0}}.$$

$$\Rightarrow \hat{f} = F(u) + G(v), \quad F, G \text{ beliebig}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{f(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)}}.$$