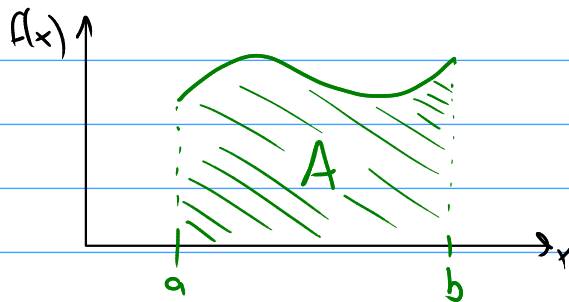


### III Integralrechnung

#### III.1 Das bestimmte Integral



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Wie gross ist die Fläche  $A$ ?

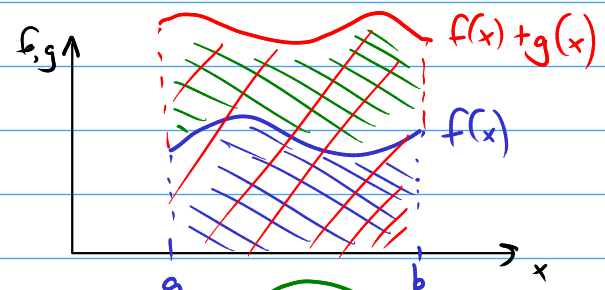
Notation:  $A =: \int_a^b f(x) dx$

Labels:  $f(x)$  is the **Integrand**,  $a$  and  $b$  are the **Grenzen** (limits), and  $dx$  is the **Integrationsvariable** (integration variable).

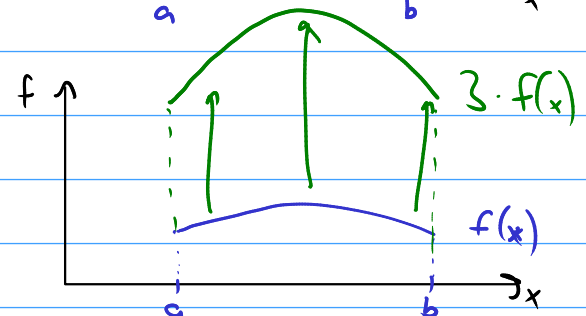
$\int_a^b f(x) dx$  ist das **bestimmte Integral**

Welche Regeln sollen dafür gelten?

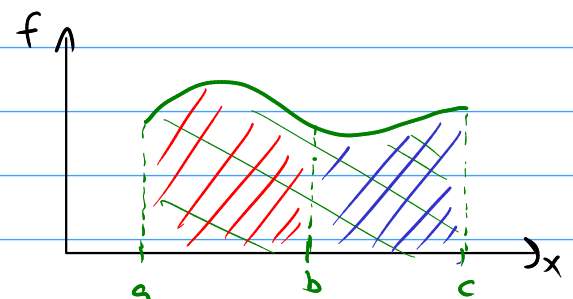
$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$



$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$



$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

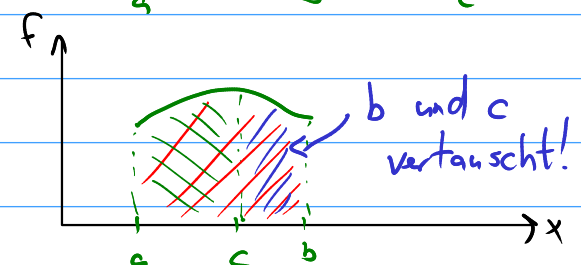


Falls  $c < b$  ist und  $f \geq 0$ :

$$\int_a^c f(x) dx < \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx < \int_a^b f(x) dx$$

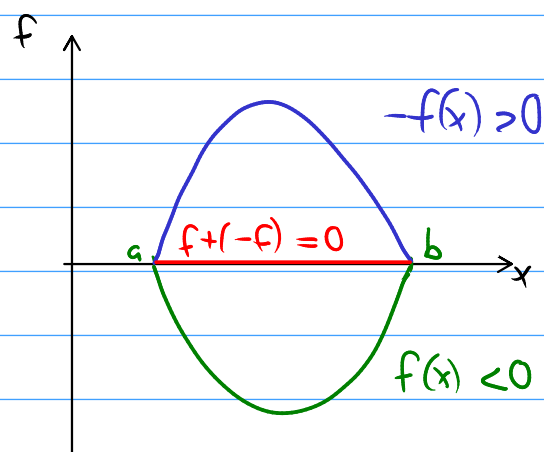
$$\Rightarrow \int_b^c f(x) dx < 0$$



Tatsächlich gilt:  $\int_b^c f(x) dx = -\int_c^b f(x) dx$   
 Damit gilt die Regel für alle  $a, b, c$ , egal was grösser/kleiner ist.

- Wenn  $f < 0$  ist  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ , denn:

$$\begin{aligned} f(x) + (-f(x)) &= 0 \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) + (-f(x)) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_a^b -f(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_a^b -f(x) dx &= -\int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$



Auf diese Weise berechnete Flächen dürfen **negativ** sein, wenn  $f$  negative Werte annimmt. Wenn es um den geometrischen Flächeninhalt gehen soll, muss man mit  $|f(x)|$  rechnen.

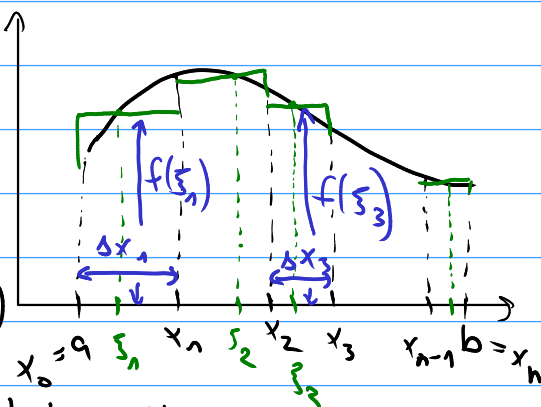
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\heartsuit) d\heartsuit$ ,  
unabhängig vom verwendeten Symbol.

### Konstruktion des bestimmten Integrals als Riemannsumme

(a) Teile  $[a, b]$  in  $n$  Abschnitte auf

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

(Bsp: Regelmässige Einteilung:  $x_k = a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)$ )



(b) Wähle  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  in jedem Intervall

(Bsp:  $\xi_k = x_{k-1}$  oder  $\xi_k = x_k$  oder  $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ )

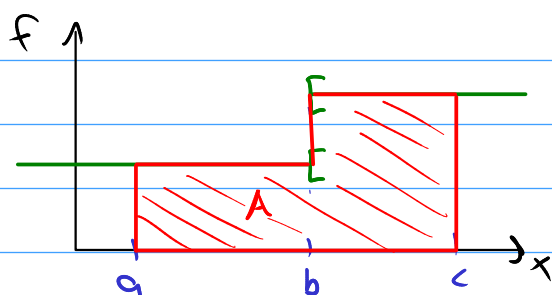
(c) Setze  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  (Intervallbreite) und berechne die **Riemannsumme**

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

(d) Betrachte  $n \rightarrow \infty$ , so dass **alle**  $\Delta x_k \rightarrow 0$   
(überall eine feine Einteilung)

Definition: Das **bestimmte Integral** ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$



$f$  darf an einzelnen, isolierten Stellen sogar **unstetig** sein.

Das bestimmte Integral existiert trotzdem

Bedingungen:   
•  $a$  und  $b$  sind reell und fixiert  
•  $f$  darf keine Pole haben

(Ausnahmen: Uneigentliche Integrale, III.13)

## III.2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

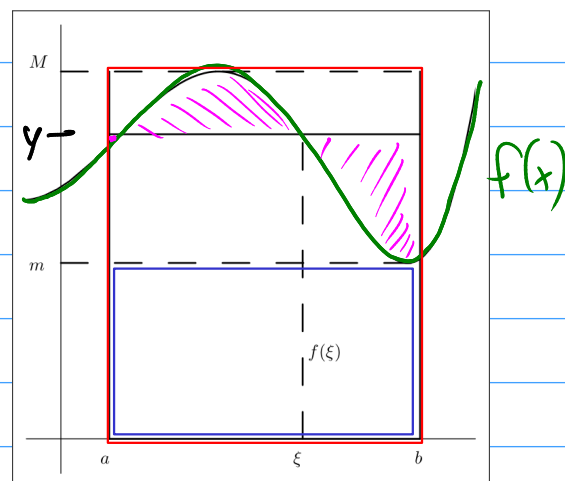
Für  $x \in [a, b]$  gilt:

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a)$$

$\Rightarrow$  Es gibt ein  $y \in [m, M]$  mit

$$y \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$



Falls  $f$  stetig: Zwischenwertsatz  $\rightarrow$  Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = y \rightarrow$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  
 $\Rightarrow$  Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$ , so dass  $f(\xi) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$ .

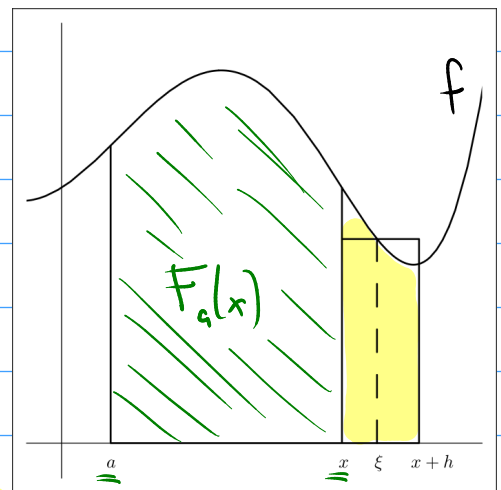
$\Rightarrow \xi$  ist so gewählt, dass  $f(\xi)$  die durchschnittliche Höhe von  $f$  zwischen  $a$  und  $b$  ist. (Mehrere verschiedene  $\xi$  sind möglich.)

## Hauptsatz

Betrachte das bestimmte Integral als Funktion:

$$F_a(x) := \int_a^x f(t) dt$$

Wie verändert sich  $F_a$  mit  $x$ ?  
 $\Rightarrow$  Ableitung berechnen!



$$\frac{d}{dx} F_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Mittelwertsatz: Es gibt ein  $\xi \in [x, x+h]$  mit  $f(\xi) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t) dt$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot f(\xi) \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:  $f$  stetig,  $F_a(x) := \int_a^x f(t) dt$ ,  
 $[a, b] \subset D(f) \Rightarrow$  Für  $x \in [a, b]$  ist  $F'_a(x) = f(x)$ .

$\Rightarrow F'_a(x)$  ist unabhängig von  $a$ .

Definition: Eine Funktion  $F$  mit  $F'(x) = f(x)$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .



Eigenschaften: (i)  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$  ist eine Stammfunktion

(ii)  $F$  Stammfunktion  $\Rightarrow F(x) + C$  ist für jedes  $C \in \mathbb{R}$  auch eine Stammfunktion

(iii)  $F, G$  Stammfunktionen von  $f$

$$\Rightarrow f = F' = G' \Rightarrow (F - G)' \equiv 0$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) \equiv C \text{ für eine Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

(i), (ii), (iii)  $\Rightarrow$  Jede Stammfunktion von  $f$  kann als  $\int_a^x f(t) dt + C$  geschrieben werden.

### Integrale berechnen mit Stammfunktionen

Es gilt  $\int_a^b f(t) dt = F_a(b)$

$F$  eine weitere Stammfunktion  $\Rightarrow F_a(x) = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Setze  $x = a \Rightarrow F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C$

$$\Rightarrow C = -F(a)$$

$x = b \Rightarrow F_a(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$

Satz:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $F$  eine Stammfunktion von  $f$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b =: F(t) \Big|_a^b$$

Bsp:  $\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$

$\int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$

### III.3 Das Integrieren

Def: Das **unbestimmte Integral**  $\int f(x) dx$  ist die Menge der Stammfunktionen von  $f$ .

Der Übergang  $f \mapsto \int f(x) dx$  heißt **Integrieren**.

Hauptsatz: Die Ableitung des unbestimmten Integrals ist die Funktion selbst.

Regeln, wie beim bestimmten Integral:

- $\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx$
- $\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$ , für alle  $A \in \mathbb{R}$ .
- $\int g'(f(x)) \cdot f'(x) dx = g(f(x)) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

- Das "+C" ist nötig, damit alle Stammfunktionen berücksichtigt sind.
- Es ist nicht nötig, "+C" zu schreiben, solange im Ausdruck ein unbestimmtes Integral  $\int$  steckt.
- Bei bestimmten Integralen (also mit Grenzen) ist ebenfalls kein "+C" nötig.

Bsp: •  $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cdot \underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{=\cos^2 x} dx$

$$= \int \cos x dx - \int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \underbrace{\sin^2 x}_{g(x)} dx$$

$g(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow g'(x) = x^2$   
 $\Rightarrow g'(f(x)) = 2 \sin^2 x$   
 $\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\sin^3 x}{3}$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\bullet f(x) = a \cdot x + b, \quad g(x) \text{ beliebig} \Rightarrow f'(x) = a$$

$$\Rightarrow \int \cancel{a} \cdot g'(ax+b) dx = \frac{g(ax+b)}{a} + C \quad \text{?}$$

(nicht nötig, da C alle reellen Zahlen abdeckt)

$$\text{z. B. } \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (ax+b)^{3/2} + C$$

$= g'(ax+b)$

$$\Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\bullet \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = ?$$

$$\text{Allgemein: } \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$\text{Hier: } r = -1/2, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\frac{1}{2} \cdot f'(x) \cdot g'(f(x)) = \cancel{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Integrand

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int f'(x) \cdot g'(f(x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot g(f(x)) + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2-1} + C = \underline{\underline{\sqrt{x^2-1} + C}}$$

Bemerkungen: • Nicht jede Stammfunktion ist elementar beschreibbar.

- Viele Stammfunktionen können berechnet und elementar beschrieben werden, aber es gibt keinen allgemeinen Algorithmus und man muss viel üben.

### III.4 Die Methode der partiellen Integration

Produktregel für Ableitungen:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\Rightarrow u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$$\Rightarrow \int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx,$$

partielle Integration

Bsp:  $\int (x+1)e^x \, dx$

Wie wählt man  $u$  und  $v$ ? Ziel:  $u \cdot v'$  soll leichter zu integrieren sein!

Hier:  $u' = e^x \Rightarrow u = e^x$   
 $v = x+1 \Rightarrow v' = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \underbrace{(x+1)}_v \underbrace{e^x}_{u'} \, dx &= \underbrace{(x+1)}_v \cdot \underbrace{e^x}_u - \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{e^x}_u \, dx \\ &= (x+1) \cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{x \cdot e^x + C}} \end{aligned}$$

Was passiert bei der anderen Wahl?

$u' = x+1 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + x$   
 $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$

$$\Rightarrow \int \underbrace{(x+1)}_{u'} \underbrace{e^x}_v \, dx = \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + x\right)}_u \cdot \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + x\right)}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx$$

Das Integral ist so nicht einfacher geworden.

$\Rightarrow$  Wähle  $v$  so, dass  $v'$  das Integral  $\int u \cdot v'$  vereinfacht.

Trick 1: Nach dem Integral auflösen

Angenommen:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= g(x) - A \cdot \int f(x) dx \\ \stackrel{\text{d.h.: } u' \cdot v &= A \cdot u \cdot v'}{=} \stackrel{\downarrow}{=} \mathbf{I} &= g(x) - A \cdot \mathbf{I} & \quad \parallel + A \cdot \mathbf{I} \\ \Rightarrow (1+A) \cdot \mathbf{I} &= g(x) + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \mathbf{I} = \frac{g(x)}{1+A} + C$$

Bsp:  $\int \underbrace{\cos^2 x dx}_{=I} = \int \underbrace{\cos x}_{=v'} \cdot \underbrace{\cos x}_{=u} dx \Rightarrow u' = -\sin x$   
 $\Rightarrow v = \sin x$

$$= \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} + \int (+\sin x) \cdot \sin x dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x + \underbrace{(-1)}_A \cdot \underbrace{\int \cos^2 x dx}_I \quad \parallel +$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos^2 x dx = x + \cos x \sin x + C$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2} + C$$

Trick 2: 2x partiell integrieren, dann auflösen

Bsp:  $\int \underbrace{e^{ax}}_{u'} \underbrace{\sin(bx)}_{=v} dx = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{a} - \int \frac{b}{a} \underbrace{e^{ax}}_{u'} \underbrace{\cos(bx)}_{v'} dx$   
 $a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow u = \frac{e^{ax}}{a} \quad \Rightarrow v' = b \cos(bx) \quad \Rightarrow u = \frac{e^{ax}}{a} \quad \Rightarrow v' = -b \sin(bx)$

$$= \frac{e^{ax} \sin(bx)}{a} - \frac{b}{a} \cdot \left( \frac{e^{ax} \cos(bx)}{a} + \int \frac{b}{a} e^{ax} \sin(bx) dx \right)$$

$$= \frac{e^{ax} \sin(bx)}{a} - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \cdot \underbrace{\int e^{ax} \sin(bx) dx}_I$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot I = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \left(a \sin(bx) - \frac{b}{a} \cos(bx)\right) + C \quad // \cdot a^2$$

$$\Rightarrow I = \int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \cdot \left(a \sin(bx) - b \cos(bx)\right) + C$$

Beim 2x partiell integrieren sollte man u und v ungefähr beibehalten und **nicht** vertauschen! Beim Vertauschen kommt  $I = I$  heraus.

Trick 3: Multiplizieren mit 1

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int \ln(x) dx &= \int \underbrace{1}_{u=x \leftarrow u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v \rightarrow v' = 1/x} dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C = x \cdot (\ln(x) - 1) + C \end{aligned}$$

Bietet sich an für Funktionen mit bekannter Ableitung und Umkehrfunktionen.

### III.5 Die Methode der Substitution

$$\text{Kettenregel: } \int f'(x) \cdot g(f(x)) dx = g(f(x)) + C$$

$$\text{Setze } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x) \cdot g(f(x)) dx = \int g(u) \cdot du \quad \text{Substitutionsregel} \quad (= g(u) + C = g(f(x)) + C)$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int \sin x \cdot \cos^n x dx &= \int u^n du = -\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \\ u = \cos x \Rightarrow du &= -\sin x dx \\ &= -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C \end{aligned}$$

Rücksubstitution

$$\bullet \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$\bullet \text{ Setze } x = \sinh(u) \Rightarrow \operatorname{Arsinh}(x) = u$$

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\cosh(u)} = du$$

$$dx = \cosh(u) du$$

$$\bullet \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{\cosh^2 u} = \cosh(u)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2} dx = \int \cosh(u) \cdot \cosh(u) du = \int \cosh^2(u) du$$

$$\int \underbrace{\cosh u}_{v'} \underbrace{\cosh u}_u du = \sinh u \cdot \cosh u - \int \underbrace{\sinh^2 u}_{=\cosh^2 u - 1} du$$

$$\Rightarrow v = \sinh u$$

$$= \sinh u \cdot \cosh u + \int 1 du - \int \cosh^2 u du$$

$$\Rightarrow 2 \int \cosh^2 u du = u + \sinh u \cdot \cosh u + C$$

$$\Rightarrow \int \cosh^2 u du = \frac{u + \sinh u \cdot \cosh u}{2} + C$$

$$\text{Rücksubstitution: } \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{Arsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2}}{2} + C$$

26.11.2021

Themen: Substitution mit angepassten Grenzen, Integrale von Potenzen von sin und cos, Integrale von rationalen Funktionen

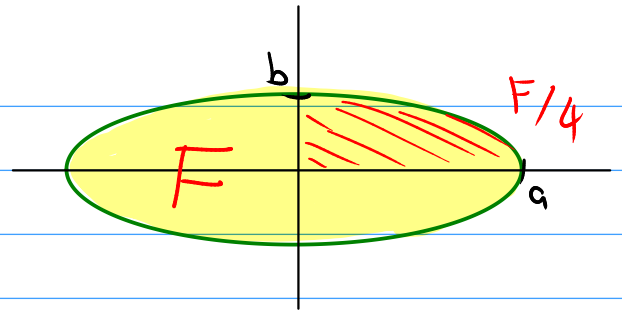
$$\text{Vorsicht bei Herleitungen wie } \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{Arsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2}}{2} + C$$

Wir haben Wurzeln, Vorzeichen, Definitionsbereiche ignoriert.  
Deshalb: Test durch Ableitung

$$\left( \frac{\operatorname{Arsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2}}{2} + C \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + (1+x^2) + x^2) = \underline{\underline{\sqrt{1+x^2}}}$$

Bsp: Fläche einer Ellipse



Explizite Darstellung:

$$f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Aus Symmetrie  $F/4 = \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$

Substitution:  $x = a \cdot \sin t \Rightarrow dx = a \cdot \cos t \cdot dt$

$$\begin{aligned} \int b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= b \int \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 t}}_{=\cos t} a \cdot \cos t dt \\ &= ab \int \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} (t + \sin t \cos t) + C \end{aligned}$$

Hier: Stammfunktion ist nur Mittel zum Zweck, uns interessiert die Fläche! Deshalb: Nicht Rücksubstituieren, sondern Grenzen für Variable  $t$  anpassen.

$x$  von 0 bis  $a$ ,  $x = a \cdot \sin t \Rightarrow 0 = a \cdot \sin t \Rightarrow t = 0$   
 $a = a \cdot \sin t \Rightarrow t = \pi/2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{F}{4} &= \int_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_0^{\pi/2} ab \cos^2 t dt \\ &= \frac{ab}{2} \cdot (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{ab}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \frac{\pi a \cdot b}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F = \pi ab}}$$

Vorsicht bei nicht-injektiven Funktionen:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x) \cdot \sin x dx \Rightarrow \int_0^0 -g(a \cdot \cos t) dt = \underline{\underline{0}}?!$$

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ ,  $t$  von  $\cos(-\pi/2) = 0$  bis  $\cos(\pi/2) = 0$

Kann nicht stimmen!  
 (Bsp:  $g = \sin x$ )



Was ist passiert?

Substitutionsformel für bestimmte Integrale:  
Wenn  $f$  stetig diff'bar ist, gilt:

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t) dt$$

Im Bsp vorher:  $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos(t) = f(t)$   
Dies ist keine stetig diff'bare Funktion auf dem benötigten Bereich  $[-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow$  Formel nicht anwendbar!

Bemerkungen: • Symmetrien ausnutzen um das Integrationsintervall zu verkleinern behält dieses Problem manchmal

• Manchmal substituiert man  $u$  da  $f(x) = g(u)$ ,  
z.B.  $u^2 = e^x - 1$ . Differentiale ersetzen:  $f'(x)dx = g'(u)du$ ,  
im Beispiel also  $2u du = e^x dx$

26.11.2021 08:15 - 10:00  
**V - Analysis I**  
LAUFZEIT  
00:03:30  
ANZAHL STIMMEN  
0274  
>>>  
Start  
Zurücksetzen  
RESULTATE ANZEIGEN  
LIVE  
Vollbild (Beta)

Ein bestimmtes Integral werde mit der Substitution  $u = x^2$  berechnet:

(2)  $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot \sin(x^2) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^{\pi/2} \sin(u) du \stackrel{(2)}{=} -\cos(u) \Big|_0^{\pi/2} \stackrel{(3)}{=} +1$

Welche Gleichheitszeichen sind - nur für sich betrachtet! - korrekt?

(1)  $\Rightarrow du = 2x dx$

• (1)

• (2)

• (3)

• Weiss ich nicht ☹

Runde 1 27% | 61 Anzahl Stimmen

Runde 2 17% | 47 Anzahl Stimmen

Runde 1 25% | 57 Anzahl Stimmen

Runde 2 13% | 35 Anzahl Stimmen

Runde 1 71% | 162 Anzahl Stimmen

Runde 2 84% | 229 Anzahl Stimmen

Runde 1 5% | 11 Anzahl Stimmen

Runde 2 3% | 9 Anzahl Stimmen

### III.6 Einige weitere Beispiele

In Anwendungen tauchen gewisse Integrale oft auf, z. B.

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad \text{und} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

$$\int \sin^n x \, dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{v} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'} \, dx$$

$u' \Rightarrow v = -\cos x$   
 $v' = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{= 1 - \sin^2 x} \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \cdot \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \cdot \int \sin^n x \, dx$$

$$\Rightarrow \cancel{(1+n-1)} \cdot \int \sin^n x \, dx = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx}_n$$

Grenzen einsetzen:

$$\underline{\underline{I_n}} = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \left. -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} \right|_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -(0 - 0) + \frac{n-1}{n} \cdot \underline{\underline{I_{n-2}}}, \text{ Rekursionsformel}$$

Für  $\cos^n x$ , also  $J_n$ ?

$$\underline{\underline{I_n}} = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^n t \, (-dt) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = \underline{\underline{J_n}}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos(\pi/2 - x), \text{ setze } t = \pi/2 - x \Rightarrow dt = -dx \\ &= \cos(t) \quad \quad \quad t \text{ von } \pi/2 \text{ bis } 0 \end{aligned}$$

Es gilt also  $I_n = I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$ . Werte?

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \pi/2$$

$$I_2 = \frac{2-1}{2} \cdot I_{2-2} = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_6 = \frac{5}{6} \cdot I_4 = \frac{15\pi}{96} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

$$I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}$$

$$I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$I_7 = \frac{6}{7} \cdot I_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

Diese Integrale approximieren  $\pi$ !

Für  $x \in [0, \pi/2]$ :  $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x$

Setze  $n=2k$  und integriere:  $I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1} \quad \parallel : I_{2k+1}$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \leq \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

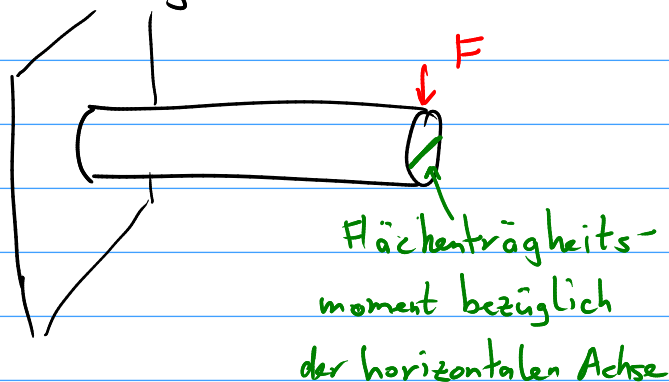
$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k}}_{= I_{2k}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k+1}{2k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{(2k) \cdot (2k)}{(2k-1) \cdot (2k+1)}$$

Produkt von Wallis 1655/1656

Bsp: Integral beim axiellen Flächenträgheitsmoment



Benötigt für Biegemoment eines Balkens

→ Relevant ist der Querschnitt des Balkens

Hier Zylinder, Radius  $a \leadsto I = \int_0^a \underbrace{x^2}_{\text{Abstands-}} \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}_{\text{Masse in}} dx$   
 (plus Vorfaktoren) quadrat Abstand  $x$

Substitution:  $x = a \sin t \Rightarrow dx = \underline{a \cos t dt}$ ,  $t$  von 0 bis  $\pi/2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{I} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{a^2 \sin^2 t}_{\text{quadrat}} \cdot \underbrace{a \cos t}_{\text{Abstand}} \cdot \underbrace{a \cos t dt}_{\text{quadrat}} \\ &= a^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{\substack{\text{L} \rightarrow 1 - \sin^2 t}} dt = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t - \sin^4 t dt \\ &= a^4 \cdot (I_2 - I_4) = a^4 \cdot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi a^4}{16}}} \end{aligned}$$

Integrale von rationalen Funktionen

Bsp:  $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = ?$

$$x^2 + x - 6 = (x-2) \cdot (x+3), \quad \int \frac{1}{x+b} dx = \ln|x+b| + C$$

Aufteilen des Integrals in Kehrwerte von Linearfaktoren:  
 Partialbruchzerlegung!

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \quad \parallel \cdot (x-2)(x+3)$$

$$\Rightarrow 1 = A \cdot (x+3) + B \cdot (x-2), \text{ muss f\"ur alle } x \in \mathbb{R} \text{ gelten}$$

→ Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{l} x^0 = 1 : \\ x^1 = x : \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 = 3A - 2B \\ 0 = A + B \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} A = 1/5 \\ B = -1/5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x-6} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{5} \ln|x+3| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

Vorsicht bei mehrfachen Nullstellen:

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Neuer Term f\"ur doppelte Nullstelle

Offenes Problem: Komplexe Nullstellen, z. B.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

29.11.2021 Themen: Ende Stammfunktionen rationaler Funktionen, Fl\"achen bei ebenen Kurven

Bsp:  $I = \int \frac{4x-3}{x^2+x+1} dx = ?$

Problem: Der Nenner  $x^2+x+1$  hat 2 komplexe Nullstellen

2 Tricks: (i) Nenner ableiten:  $(x^2+x+1)' = 2x+1$

$$\text{Es gibt: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$

Hier:  $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1| + C = \ln(x^2+x+1) + C,$   
 da  $x^2+x+1 > 0$   
 pol.-Div. :  $(2x+1)$

Eliminiere damit  $x$  im Zähler:  $4x-3 \stackrel{\downarrow}{=} 2 \cdot (2x+1) - 5$

$$\Rightarrow I = 2 \cdot \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - 5 \cdot \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= 2 \cdot \ln(x^2+x+1) - 5 \cdot \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

(ii) Quadratisches Ergänzen & arctan

Bekannt:  $\int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(u) + C$

Quadratisches Ergänzen:

Suche  $a, b$  mit Nenner  $= (x+a)^2 + b = b \cdot \left( \left( \frac{x+a}{\sqrt{b}} \right)^2 + 1 \right)$

Hier:  $x^2+x+1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 1 = \left( x^2 + x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left( \left( \frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} \right)^2 + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (u^2 + 1) \quad \text{mit } u = \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{2 \cdot 1}{\frac{3}{4}(u^2+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(u) + C$$

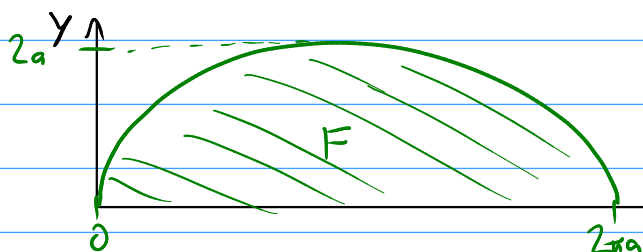
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{4x-3}{x^2+x+1} dx = 2 \cdot \ln(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Verwendete Werkzeuge: Kettenregel, quadratisches Ergänzen, Substitution, Ableitung des arctan.

## III.7 Flächenberechnung

Zykloide:  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$



Mit  $y = f(x)$  (explizite Form)

ist  $F = \int_0^{2\pi a} f(x) dx$

Problem: So ein  $f(x)$  ist keine elementare Funktion!

Lösung: Riemannsumme anpassen für parametrisierte Kurven

Sei  $K$  gegeben durch  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  mit  $t \in [t_A, t_B]$   
und  $\dot{x}(t) > 0$  für  $t \in (t_A, t_B)$

(a) Teile  $[t_A, t_B]$  in  $n$  Intervalle auf,

$$t_A = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_B$$

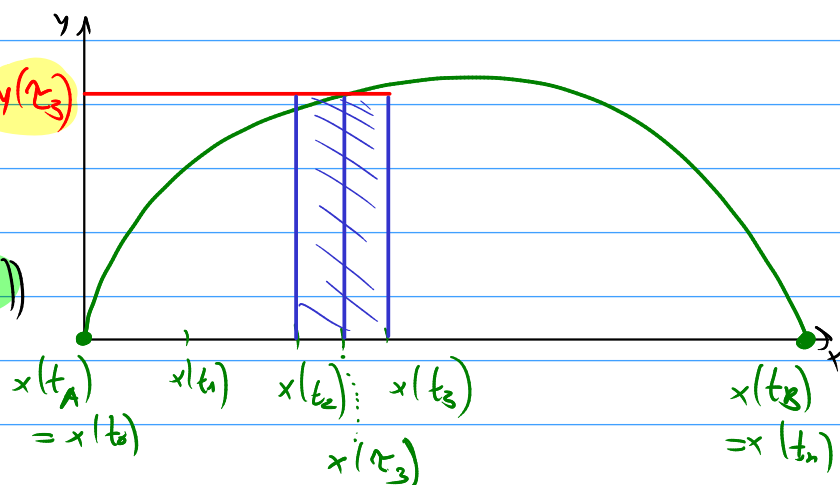
$\Rightarrow x(t_k) > x(t_{k-1})$  da  $\dot{x}(t) > 0$ , d.h.  $x$  strikt monoton wachsend

(b) Wähle  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ , so dass gilt

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}), \text{ gemäß Mittelwertsatz}$$

(c) Rechteckflächen:

$$y(\tau_1) \cdot (x(t_1) - x(t_0)) + \dots + y(\tau_n) \cdot (x(t_n) - x(t_{n-1}))$$



$$= y(\tau_1) \cdot \dot{x}(\tau_1) \cdot (t_1 - t_0) + \dots + y(\tau_n) \cdot \dot{x}(\tau_n) \cdot (t_n - t_{n-1})$$

(d) Betrachte  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  so dass alle  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \text{Riemannsumme: } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y(\tau_k) \cdot \dot{x}(\tau_k) \cdot \Delta t_k$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt, \text{ Fläche zwischen Kurve und x-Achse}$$

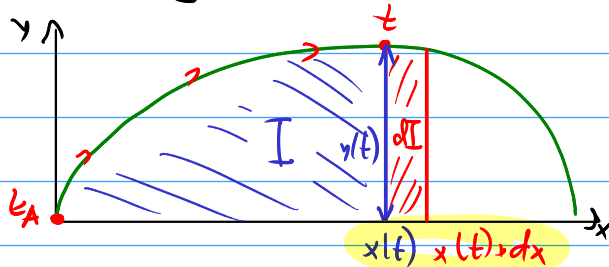
Zykloide:  $\dot{x}(t) = a - a \cos t = y(t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow F = \int_0^{2\pi} a^2 \cdot (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt$$

$$= a^2 \cdot \left( 2\pi + 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 3\pi a^2$$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$ , Symmetrie!

Herleitung mit Differentialen:



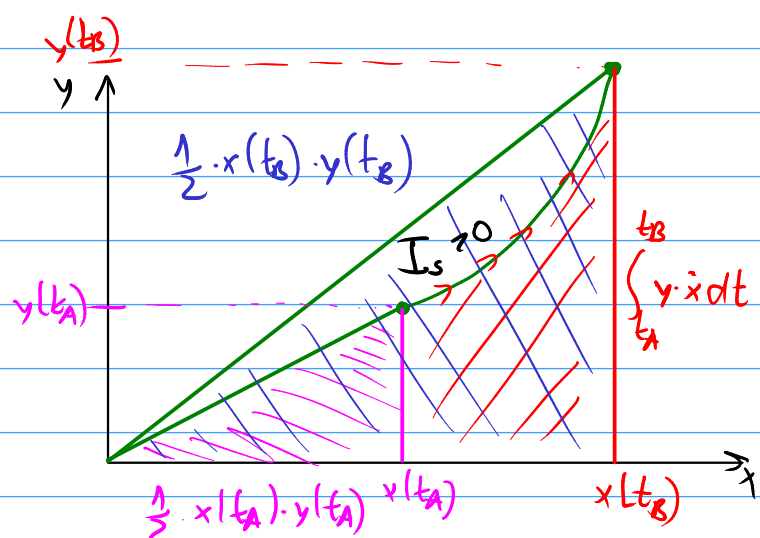
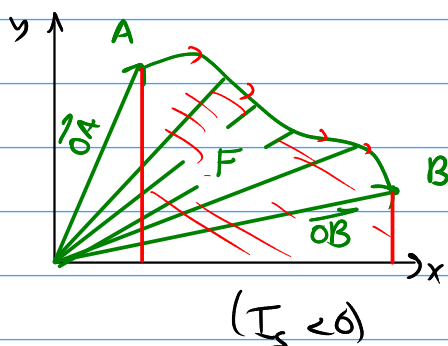
$$I = \int_{t_A}^{t_B} ? dt$$

$$dx = \dot{x} dt$$

$$dI = y(t) \cdot dx \stackrel{\downarrow}{=} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt$$

$$\Rightarrow I = \int dI = \int y(t) \cdot \dot{x}(t) dt$$

Sektorfläche



$$\Rightarrow \frac{1}{2} x(t_B) \cdot y(t_B) = I_s + \frac{1}{2} x(t_A) \cdot y(t_A) + \int_{t_A}^{t_B} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt$$

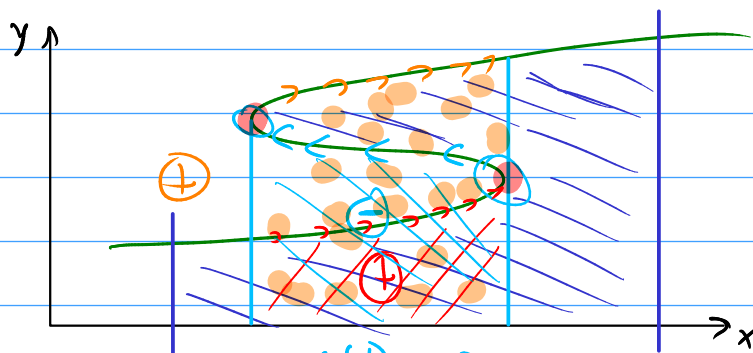


$$\begin{aligned}\Rightarrow I_s &= \frac{1}{2} (x(t_B) \cdot y(t_B) - x(t_A) \cdot y(t_A)) - \int_{t_A}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt \\ &= \frac{1}{2} (x \cdot y) \Big|_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} (x \cdot y)' dt - \int_{t_A}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y dt, \text{ Sektorfläche zwischen dem Ursprung } O, A, B$$

- Sektorfläche "links der Kurve"  $\Leftrightarrow I_s > 0$
- Sektorfläche "rechts der Kurve"  $\Leftrightarrow I_s < 0$

Ist  $\dot{x} > 0$  für die Flächenformel nötig?



$$\dot{x}(t) \leq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} y \cdot \dot{x} dt < 0$$

$$\dot{x}(t) > 0 \Rightarrow A_{\square} > 0$$

$$\text{Ziel: } A_{\square} = 1 \cdot \oplus$$

$$\dot{x}(t) > 0 \Rightarrow A_{\square} > 0$$

$$\begin{aligned}&= \text{Rot} + \text{Hellblau} + \text{Orange} \\ &= \oplus + \ominus + \oplus \\ &= \oplus \quad \checkmark\end{aligned}$$

Durch das Vorzeichen von  $\dot{x}(t)$  heben sich die mehrfach gezählten Flächenstücke genau passend auf.  
 $\Rightarrow$  Die Flächenformeln gelten auch für  $\dot{x}(t) \leq 0$ .

Bsp: Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + y^2}$ , betrachte nur rechten Ast

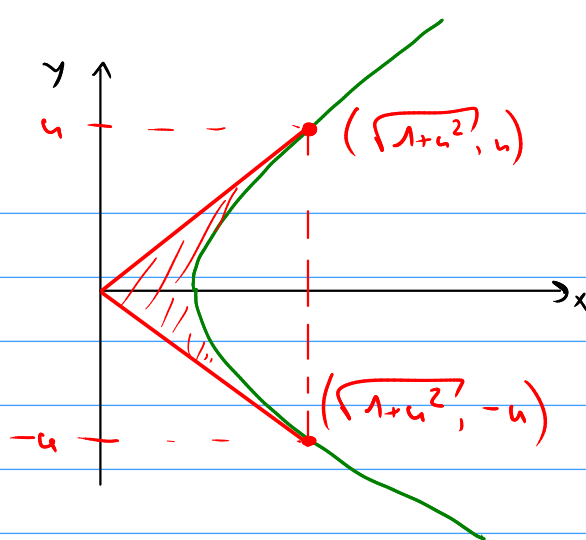
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (\sqrt{1+t^2}, t), \\ t \in [-u, u]$$

$$\Rightarrow I_s = \frac{1}{2} \int_{-u}^u x \cdot \dot{y} - \dot{x} y dt$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1 \right)$$

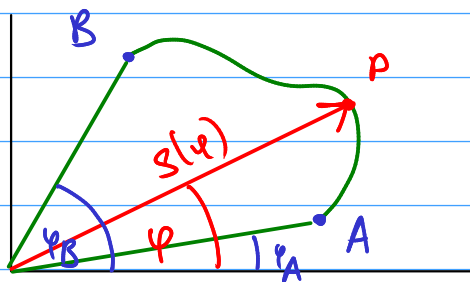
$$\Rightarrow \underline{I_s} = \int_0^u \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_x \cdot \underbrace{1}_{\dot{y}} - \underbrace{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}_{\dot{x}} \cdot \underbrace{t}_y dt = \int_0^u \frac{1 + \cancel{t^2} - \cancel{t^2}}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \text{Arsinh}(t) \Big|_0^u = \underline{\underline{\text{Arsinh}(u)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u = \sinh(I_s)}}$$



01.12.2021 Themen: Sektorfläche in Polarkoordinaten, Bogenlänge, Beispiele

## Sektorfläche in Polarkoordinaten



Sei  $s(\varphi)$  gegeben mit  $\varphi \in [\varphi_A, \varphi_B]$

$$\Rightarrow \vec{r}(\varphi) = (s(\varphi) \cdot \cos \varphi, s(\varphi) \cdot \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(\varphi) = (\dot{s} \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi, \dot{s} \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi)$$

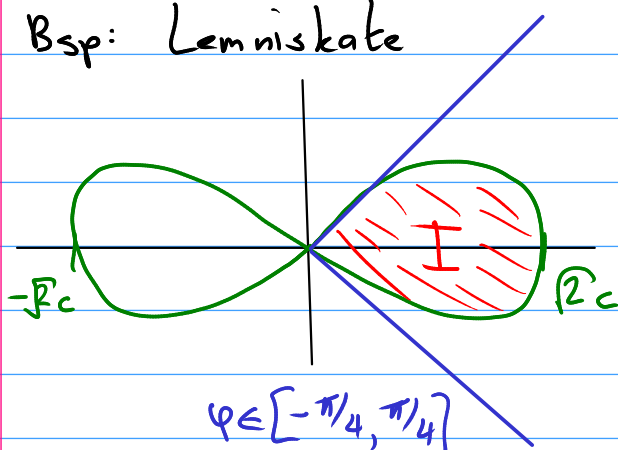
$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \dot{y} x - \dot{x} y d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} (\dot{s} \sin \varphi + s \cos \varphi) \cdot \underline{s} \cos \varphi - (\dot{s} \cos \varphi - s \sin \varphi) \cdot \underline{s} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \overset{2}{s} \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} + s \dot{s} \cdot \underbrace{(\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi)}_{=0} d\varphi$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} s^2(\varphi) d\varphi, \text{ Sektorfläche in Polarform}$$

Bsp: Lemniskate



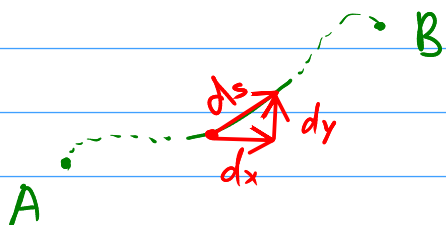
$$s(\varphi) = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)}, \quad c > 0$$

(Übung: Was ist  $D(s)$ ?)

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} s^2(\varphi) d\varphi \\ &\stackrel{\text{Symmetrie!}}{=} \int_0^{\pi/4} 2 \cdot c^2 \cdot \cos(2\varphi) d\varphi \\ &\quad \text{Einfache Abl.} \rightarrow \\ &= c^2 \left[ \sin(2\varphi) \right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{c^2}} \end{aligned}$$

### III.8 Bogenlänge

$K$  ebene Kurve, Parametrisierung  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [t_A, t_B]$



$$\text{Bogenstück: } (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

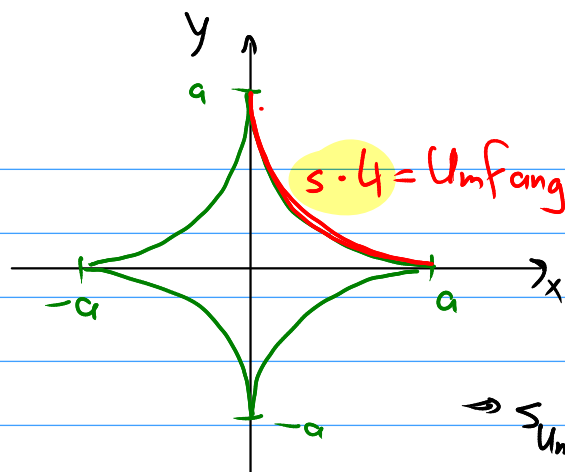
$$\text{Es gilt: } dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(\dot{x} dt)^2 + (\dot{y} dt)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$\text{Bogenlänge von A bis B: } s_A^B = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Bsp: Asteroide:  $\vec{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in [0, 2\pi], a > 0$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$$



$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \quad \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \underline{s_{\text{Umfang}}} &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t \, dt \\ &= 12a \left[ \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{6a}}\end{aligned}$$

Ohne Symmetrie:  $s = \int_0^{2\pi} |3a \cos t \sin t| \, dt = 3a \cdot \left[ \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0?!}}$

Vorsicht: Der Integrand  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  muss nicht-negativ bleiben, auch nachdem man ihn umgeformt hat.

- Lösung: (i) Symmetrien benutzen  $\Rightarrow$  Kürzere Integrationsintervalle  
 (ii) Mit Beträgen rechnen  
 (iii) Integral aufteilen und passende Vorzeichen verwenden.

Bsp: Zykloide:  $\vec{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$   
 $\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (a - a \cos t, a \sin t)$   
 $\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 ((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t)$   
 $= a^2 \cdot (1 - 2 \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1})$   
 $= 2a^2 \cdot (1 - \cos t) \geq 0 \quad \checkmark$

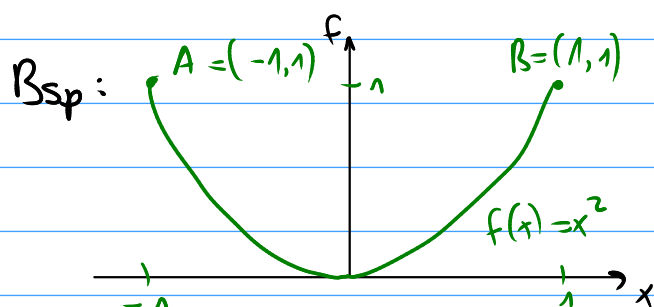
$$\Rightarrow s_{\text{Periode}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \cdot \sqrt{\underbrace{1 - \cos(t)}_{=2 \cdot \sin^2(t/2)}} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin(t/2)| \, dt$$

$\sin(t/2) \geq 0$  für  $t \in [0, 2\pi]$ , d.h. kein Betrag nötig

$$\Rightarrow \underline{s_{\text{Periode}}} = 2a \int_0^{2\pi} \sin(t/2) \, dt = 4a \left[ -\cos(t/2) \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8a}}$$

Spezialfall: Graph einer Funktion  $f$ .  $\vec{r}(t) = (t, f(t))$   
 $\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (1, f'(t))$

$$\Rightarrow s_A^B = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$



$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x$$

$$(f'(x))^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow s_A^B = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Setze  $u = 2x$ ,  $du = 2dx$ ,  $u$  von  $-2$  bis  $2$

$$\Rightarrow \underline{s_A^B} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{1 + u^2} du = \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Arsinh} u + u \cdot \sqrt{1 + u^2} \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} (\operatorname{Arsinh}(2) + 2 \cdot \sqrt{5})}}$$

Vorsicht:  $\sqrt{1 + f'(x)^2}$  ist oft schwierig bis unmöglich elementar zu integrieren. Meist wird dies numerisch approximiert.

Bogenlänge in Polarkoordinaten: Sei  $g(\varphi)$  gegeben

$$\Rightarrow \vec{r}(\varphi) = (g(\varphi) \cos \varphi, g(\varphi) \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(\varphi) = (\dot{g} \cos \varphi - g \sin \varphi, \dot{g} \sin \varphi + g \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{g}^2 \cos^2 \varphi - 2g \dot{g} \cos \varphi \sin \varphi + g^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + \dot{g}^2 \sin^2 \varphi + 2g \dot{g} \sin \varphi \cos \varphi + g^2 \cos^2 \varphi \\ &= g^2 + \dot{g}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_A^B = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{g^2 + \dot{g}^2} d\varphi, \text{ Bogenlänge in Polarkoordinaten}$$

Bsp: Bernoullispirale,  $s(\varphi) = e^{k\varphi}$ ,  $k > 0$   
 $\Rightarrow \dot{s}(\varphi) = k \cdot e^{k\varphi}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s_A^B &= \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{e^{2k\varphi} + k^2 e^{2k\varphi}} d\varphi = \sqrt{1+k^2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} e^{k\varphi} d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \left[ e^{k\varphi} \right]_{\varphi_A}^{\varphi_B} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot (e^{k\varphi_B} - e^{k\varphi_A}) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} (s_B - s_A).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Bogenlänge hängt nur vom Radienabstand  $s_B - s_A$  und **nicht** vom Winkel oder der Winkeldifferenz ab.

Bsp: Klothoide: Verbindung von Geraden- und Kreisstücken mit linear ansteigender Krümmung

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{au^2}{2}\right) du$$

$$y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{au^2}{2}\right) du$$

Parameter  $a > 0$ ,  
 $t \in \mathbb{R}$ , meistens  $t \geq 0$ .

$x$  und  $y$  können nicht elementar ausgedrückt werden,  
 $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  aber schon!

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $\cos\left(\frac{au^2}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x(t) &= F(t) - F(0) \Rightarrow \dot{x}(t) = F'(t) = \cos\left(\frac{at^2}{2}\right) \\ \text{analog: } \dot{y}(t) &= \sin\left(\frac{at^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\cos^2(\quad) + \sin^2(\quad)} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Bogenlänge: } s_0^P = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^T 1 dt = T$$

Also: Weg " = " Zeit

Krümmung:  $\ddot{x}(t) = -at \cdot \sin\left(\frac{at^2}{2}\right)$ ,  $\ddot{y}(t) = at \cos\left(\frac{at^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k(t)}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = at \cdot \cos^2\left(\frac{at^2}{2}\right) + at \sin^2\left(\frac{at^2}{2}\right) = \underline{\underline{at}}$$

→ Krümmung wächst proportional mit der Zeit und damit auch mit dem Weg

Themen: Volumenberechnung, Rotationsvolumen

Freitag, 24.12.: Unterricht am Morgen

08-10: Weihnachtsvorlesung

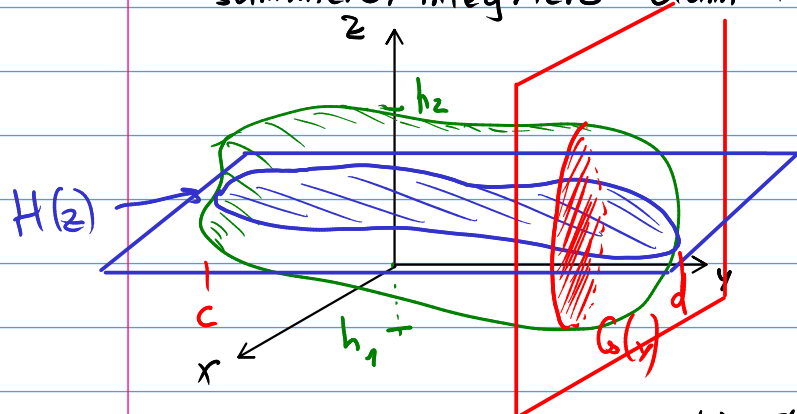
10-11: Übung Lineare Algebra (Hybrid)

11-12: Übung Analysis (Hybrid)

### III.9 Volumenberechnung

Sei  $K$  ein Körper im Raum. Was ist sein Volumen?

Idee: Berechne für jede Höhe  $z$  die Querschnittsfläche  $H(z)$ , summiere/integriere dann  $H(z)$  nach  $z$ .



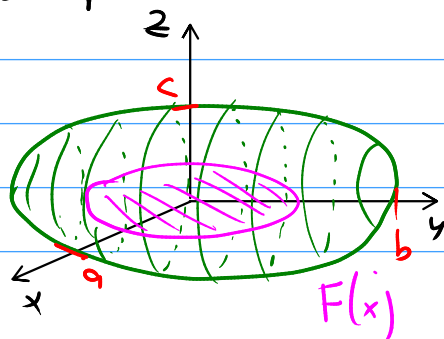
$$V = \int_{h_1}^{h_2} H(z) dz$$

$$= \int_c^d G(y) dy$$

$$= \int_a^b F(x) dx$$

$G(y), F(x)$ : Querschnittsflächen bei  $y$  bzw  $x$ .

Bsp: Ellipsoid mit Halbachsen  $a, b, c > 0$



Oberflächengleichung:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Inneres:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

Integration nach  $x$ : Wie gross ist der Querschnitt  $F(x)$ ?

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad //: \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

Gegeben  $x$ , bilden die  $(y, z)$ , die diese Gleichung erfüllen, eine Ellipse mit Halbachsen  $b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  und  $c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$   
y-Richtung z-Richtung

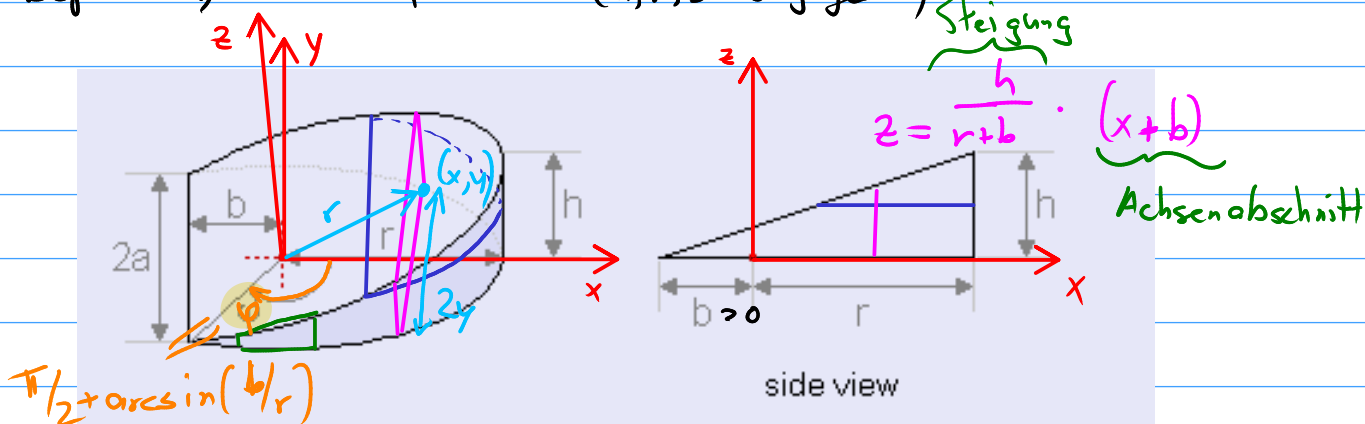
$$\Rightarrow F(x) = \pi \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$= \pi \cdot b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ , Querschnittsfläche für gegebenes  $x$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{V}} &= \int_{-a}^a F(x) dx = \int_{-a}^a \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b c \int_{-a}^a 1 - \frac{x^2}{a^2} dx \\ &= \pi b c \cdot \left[ x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \pi b c \left( a - \frac{a}{3} - (-a) - \frac{a}{3} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi a b c}} \end{aligned}$$

Bsp: Zylinderhut

( $h, r, b > 0$  gegeben)



Integration nach  $x$ : Querschnitte sind Rechtecke, also einfach zu berechnen!

Höhe:  $z = \frac{h}{r+b} \cdot (x+b)$

Breite:  $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow 2y = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$



$$\Rightarrow F(x) = \frac{2h}{r+b} \cdot (x+b) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-b, r]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_{-b}^r \frac{2h}{r+b} (x+b) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2h}{r+b} \left( \underbrace{\int_{-b}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx}_{\text{ungerade} \rightarrow \int_{-b}^b (\quad) dx = 0} + b \int_{-b}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \right) \end{aligned}$$

Substitution, linkes Integral:  $u := r^2 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx$   
 $u$  von  $r^2 - b^2$  bis 0

rechtes Integral:  $r \cdot v = x \Rightarrow r \cdot dv = dx$   
 $v$  von  $-\frac{b}{r}$  bis 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \frac{2h}{r+b} \cdot \left( \int_{r^2-b^2}^0 \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{u} du + b \int_{-b/r}^1 r \sqrt{1-v^2} dv \right) \\ &= \frac{h}{r+b} \cdot \left( \int_0^{r^2-b^2} \sqrt{u} du + 2br^2 \int_{-b/r}^1 \sqrt{1-v^2} dv \right) \\ &= \frac{h}{r+b} \cdot \left( \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{r^2-b^2} + 2br^2 \cdot \left[ \frac{v \cdot \sqrt{1-v^2} + \arcsin(v)}{2} \right]_{-b/r}^1 \right) \\ &= \frac{h}{r+b} \cdot \left( \frac{2 \cdot (r^2-b^2)^{3/2}}{3} + br^2 \left( 0 + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{b}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} + \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) \right) \right) \\ &= \frac{h}{r+b} \cdot \sqrt{r^2-b^2} \cdot \left( \frac{2}{3}(r^2-b^2) + b^2 \right) + \frac{hbr^2}{r+b} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) \right) \\ &= \frac{h}{r+b} \cdot \sqrt{r^2-b^2} \cdot \left( \frac{2r^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right) + \frac{hbr^2}{r+b} \cdot \text{Skizze!} \end{aligned}$$

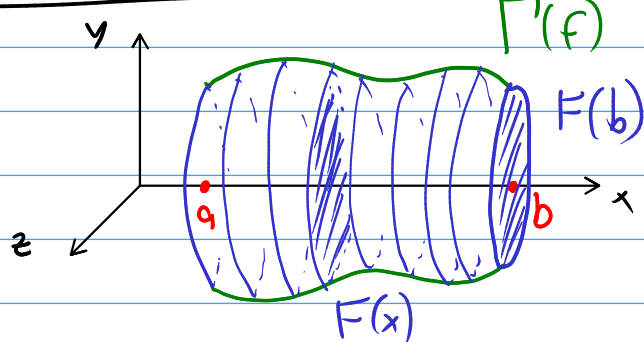
Integrale  $\int_{-a}^a$  bei geraden & ungeraden Funktionen:

$$f(x) \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$f(x) \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

# Rotationsvolumen

(nicht im Skript)



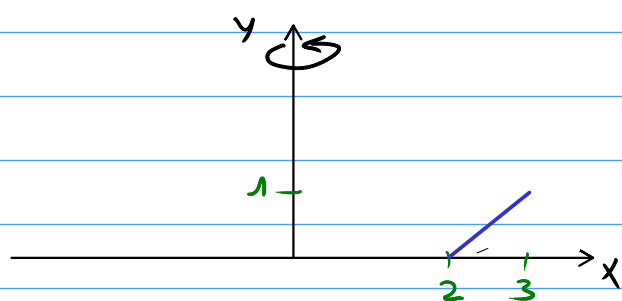
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

Graph  $\Gamma(f)$  werde um die  $x$ -Achse rotiert. Volumen?

Querschnittsfläche  $F(x)$  ist eine Kreisscheibe mit Radius  $f(x)$ .

$$\rightarrow F(x) = \pi \cdot (f(x))^2 \rightarrow \text{Rotationsvolumen } V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Bsp:



Rotation um  $y$ -Achse

~~$$f(x) = x - 2, x \in [2, 3]$$~~

~~$$\Rightarrow V = \pi \int_2^3 (f(x))^2 dx$$~~

Das wäre um  $x$ -Achse!

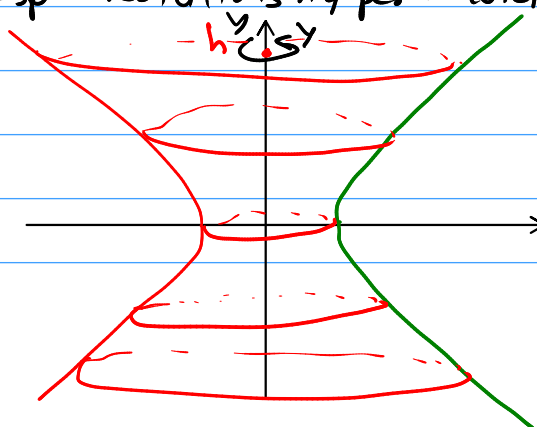
Um  $y$ -Achse:  $f(y) = 2 + y, y \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \underline{V} = \int_0^1 \pi (f(y))^2 dy = \pi \int_0^1 (2+y)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 4 + 4y + y^2 dy = \pi \left[ 4y + 2y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{19\pi}{3}}}$$

Also: Vorsicht beim Aufstellen des Integrals

Bsp: Rotationshyperboloid



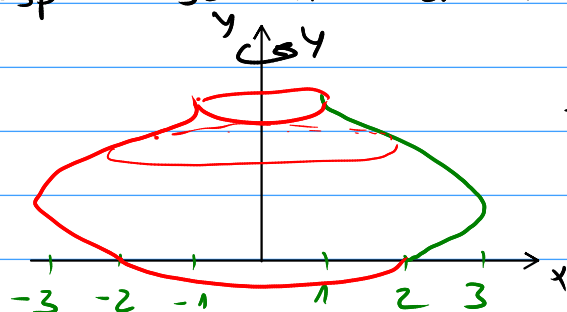
$$x^2 - y^2 = 1, \text{ Rotation um } y\text{-Achse}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 + y^2 = f(y)^2$$

$$\Rightarrow \underline{V} = \int_0^h \pi \cdot (f(y))^2 dy = \pi \int_0^h 1 + y^2 dy$$

$$= \underline{\underline{\pi \cdot \left( h + \frac{h^3}{3} \right)}}$$

Bsp: Vase mit Berandung  $2 + \sin(y)$ , Höhe 0 bis  $\frac{3\pi}{2}$



$$\Rightarrow \underline{V} = \pi \int_0^{3\pi/2} (2 + \sin(y))^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{3\pi/2} (4 + 4\sin y + \sin^2 y) dy$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{12\pi}{2} + 4 \cdot [-\cos y]_0^{3\pi/2} + 3 \int_0^{3\pi/2} \sin^2 y dy \right) = \pi \cdot \left( 4 + \frac{27\pi}{4} \right)$$

$\int_0^{3\pi/2} \sin^2 y dy = \pi/4$

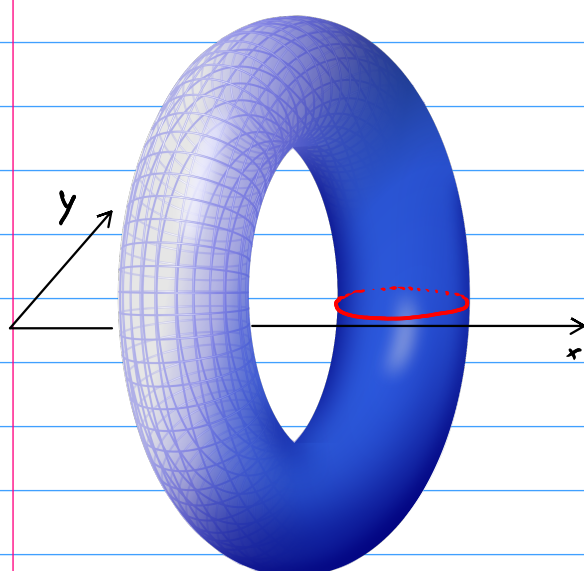
Themen: Oberflächenberechnung von Rotationskörpern, Schwerpunkt

### III.10 Oberflächenberechnung

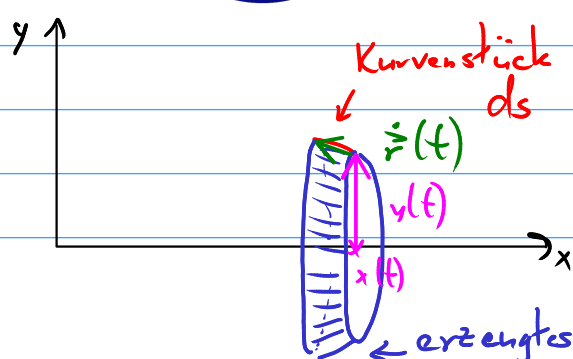
Allgemeiner Fall: Analysis II, Kapiteln V / VI

Hier: Rotationskörper

Bsp: Torus. Wie gross ist die blaue Oberfläche?



Sei  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  eine Parametrisierung einer ebenen Kurve.  
Diese werde um die x-Achse rotiert, um eine Fläche zu bilden.



Ein infinitesimales Bogenstück ergibt also eine Art "Band" mit

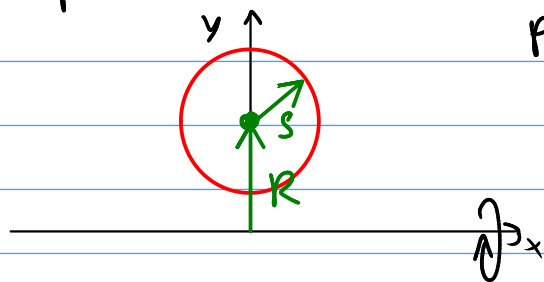
- Bandbreite:  $|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
- Radius:  $y(t) \Rightarrow$  Umfang  $2\pi \cdot y(t)$

→ Das infinitesimale Bogenstück  $ds$  erzeugt ein Rotationsoberflächenstück  $dO = 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

→ Rotationsoberfläche:  $O = \int_{t_A}^{t_B} 2\pi y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

Falls  $y < 0$  wird sonst das Resultat negativ

Bsp: Torus

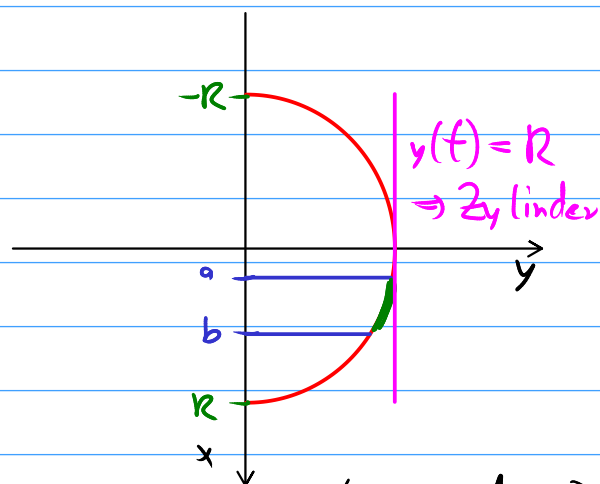
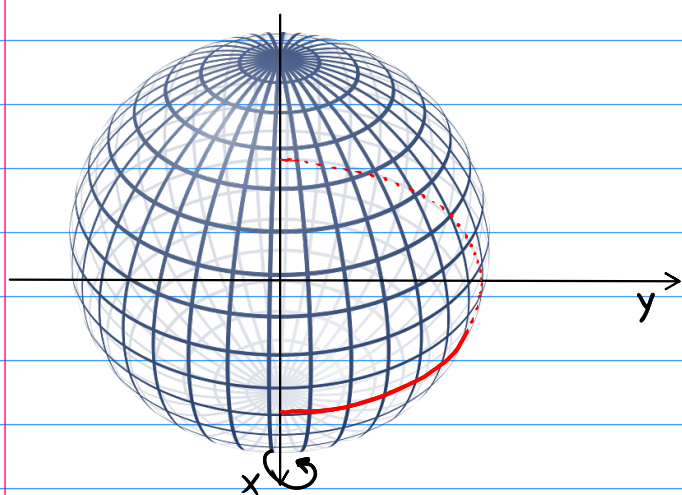


Parametrisierung:  $\vec{r}(t) = (s \cos t, s \sin t + R)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) &= (-s \sin t, s \cos t) \\ \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{O} &= 2\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{(s \sin t + R)}_{=y(t)} \cdot \underbrace{s}_{=\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} dt = 2\pi s \cdot [Rt - s \cos t]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi s (2\pi R - s - 0 + s) = \underline{\underline{4\pi^2 s R}} \end{aligned}$$

Bsp: Kugeloberfläche



$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt{R^2 - t^2}), \quad t \in [a, b] \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t/\sqrt{R^2 - t^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O = 2\pi \cdot \int_a^b \sqrt{R^2 - t^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2 - t^2}} dt$$

$$= 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - \cancel{t^2} + \cancel{t^2}} dt = 2\pi R \cdot (b-a)$$

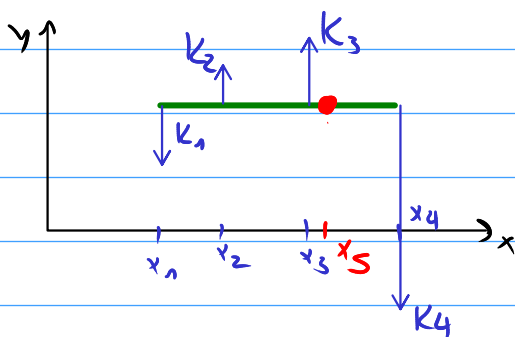
Ganze Kugel:  $b-a = 2R \Rightarrow \underline{\underline{O = 4\pi R^2}}$

Die Formel  $O = 2\pi R \cdot (b-a)$  gilt ebenfalls für den geraden Zylinder mit Höhe  $(b-a)$  und Radius  $R$ !

### III. 11 Schwerpunkt, Flächenmittelpunkt

Schwerpunkt  $\hat{=}$  Kraftmittelpunkt

$\hat{=}$  Punkt, an dem sich alle Kräfte ausbalancieren



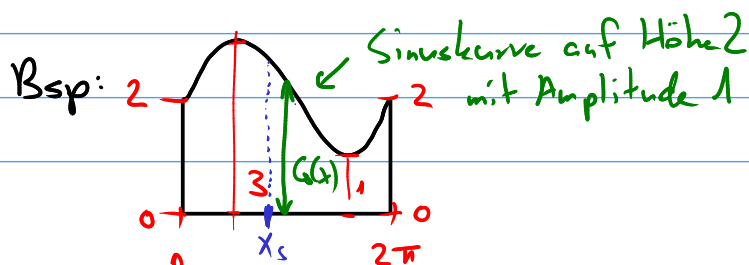
Seien  $K_1, \dots, K_n$  Kräfte, die an den Stellen  $x_1, \dots, x_n$  in  $y$ -Richtung auf einen Balken wirken

Gleichung des Kraftmittelpunkts:  $(x_1 - x_s) \cdot K_1 + \dots + (x_n - x_s) \cdot K_n = 0$   
(Hebelgesetz!)

Auflösen nach  $x_s$ :  $x_s \cdot \underbrace{(K_1 + \dots + K_n)}_{\substack{\text{Summe aller Kräfte, mit Vorzeichen} \\ \checkmark G(x_n)}} = \underbrace{x_1 K_1 + \dots + x_n K_n}_{= x_n \cdot G(x_n)}$

Übergang zur Kraftdichte  $G(x)$ , z.B. Schwerkraft bei  
Kraft  $\propto x$  inhomogener Dichte oder Breite.

$$\Rightarrow x_s \cdot \underbrace{\int_a^b G(x) dx}_{\text{= Totalkraft}} = \int_a^b x \cdot G(x) dx$$



Schwerpunkt in  $x$ -Richtung?  
 $G(x) = 2 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$

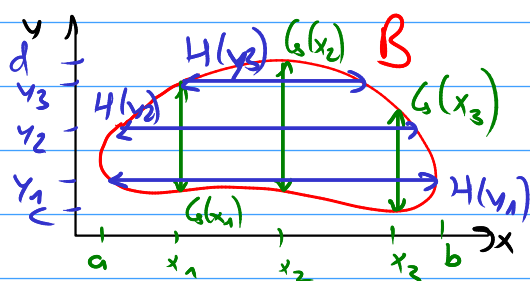
2 Integrale:

$$\begin{aligned} \cdot \int_0^{2\pi} G(x) dx &= \int_0^{2\pi} 2 + \sin x \, dx = 4\pi \\ \cdot \int_0^{2\pi} x G(x) dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{2x}_{\int=4\pi^2} + \underbrace{x \sin x}_{\substack{u' \Rightarrow u = -\cos x \\ v \Rightarrow v' = 1}} dx \\ &= 4\pi^2 + \left[ -x \cos x \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \\ &= 4\pi^2 - 2\pi = 2\pi \cdot (2\pi - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_s \cdot 4\pi = 2\pi \cdot (2\pi - 1) \Rightarrow \underline{\underline{x_s = \pi - 1/2 \approx 2.64}}$$

### Flächenmittelpunkt

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein Bereich mit homogener Dichte 1



Wo muss man den Finger unter B hinhalten, damit diese Fläche nicht wegkippt?

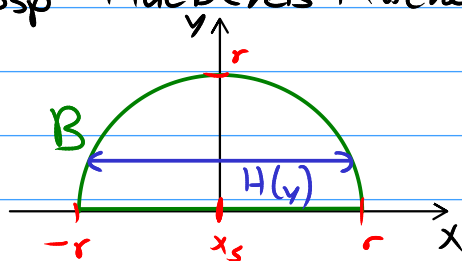
$$G(x) \hat{=} \text{Ausdehnung in } y\text{-Richtung ad } S \, x \Rightarrow x_s \cdot \int_a^b G(x) dx = \int_a^b x \cdot G(x) dx$$

Analog mit vertauschten Koordinaten:

$$H(y) \hat{=} \text{Ausdehnung in } x\text{-Richtung ad } S \, y \Rightarrow y_s \cdot \int_c^d H(y) dy = \int_c^d y \cdot H(y) dy$$

$\Rightarrow$  Flächenmittelpunkt  $(x_s, y_s)$ , Schwerpunkt in 2 Dimensionen.

Bsp: Halbkreisfläche, Radius  $r$ , Dichte homogen 1



Aus Symmetrie:  $x_s = 0$   
 $y_s = ?$

$H(y)$  bestimmen:  $x^2 + y^2 = r^2$  auf dem Rand  
 $\Rightarrow H(y) = 2x = 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}$

$$\Rightarrow y_s \cdot \underbrace{\int_0^r H(y) dy}_{= \text{Totalkraft} = \text{Fläche} = \frac{\pi r^2}{2}} = \int_0^r y \cdot H(y) dy$$

$$\int_0^r 2y \sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{2r^3}{3}$$

$$\Rightarrow y_s \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2r^3}{3} \Rightarrow \underline{\underline{y_s = \frac{4}{3\pi} r \approx 0.424 r}}$$

10.12.2021 Themen: Schwerpunkt im Raum, Massenträgheitsmoment, Flächenträgheitsmoment

Erinnerung:  $x_s \cdot \int_a^b G(x) dx = \int_a^b x \cdot G(x) dx$

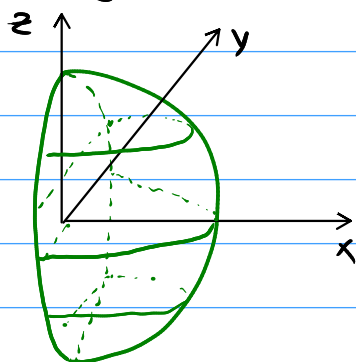
Analog:  $y_s \cdot \int_c^d H(y) dy = \int_c^d y \cdot H(y) dy$

$G(x)$  bzw.  $H(y)$  beschreiben die Masse an einer  $x$ - oder  $y$ -Stelle.

Schwerpunkt im Raum:

- Zusätzliche  $z$ -Koordinate,  $z_s$
- Die Funktionen  $G(x)$  usw. messen Flächeninhalte statt Intervalllängen.

Bsp: Homogene halbe Vollkugel, Radius  $r$

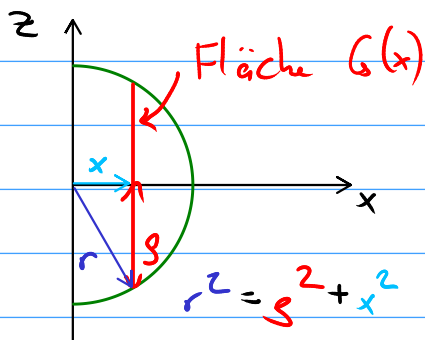


Schwerpunkt?

$y_s = z_s = 0$  aus Rotations-symmetrie um  $x$ -Achse

•  $x_s$  muss berechnet werden:  $x_s \cdot \underbrace{\int_0^r G(x) dx}_{\text{Totale Masse}} = \int_0^r x \cdot G(x) dx$

Was ist  $G(x)$ ?



$G(x)$  ist ein eine Kreisscheibe  
mit Radius  $s = \sqrt{r^2 - x^2}$   
 $\Rightarrow G(x) = \pi s^2 = \pi (r^2 - x^2)$

$\Rightarrow$  •  $\int_0^r G(x) dx = \frac{2\pi}{3} r^3$ , halbe Vollkugelvolumen

•  $\int_0^r x \cdot G(x) dx = \int_0^r \pi r^2 x - \pi x^3 dx = \left[ \frac{\pi r^2 x^2}{2} - \frac{\pi x^4}{4} \right]_0^r$   
 $= \frac{\pi r^4}{4}$

$\Rightarrow x_s \cdot \frac{2\pi}{3} r^3 = \frac{\pi r^4}{4} \Rightarrow \underline{\underline{x_s = \frac{3}{8} \cdot r}}$

Bemerkungen: • Bei inhomogenen Körpern muss in der Definition von  $G(x)$  usw. die Dichte  $\rho(x, y)$  bzw.  $\rho(x, y, z)$  beachtet werden.

• Die Formel für  $x_s$  findet sich auch in der Stochastik wieder, nämlich beim Erwartungswert  $E$ :

$E \cdot (\text{Summe der Wahrscheinlichkeiten})$   
 $= \text{Gewichtete Summe der Auszahlungen}$



# III.12 Trägheitsmoment

Rotation eines starren Systems von  $n$  Massepunkten  $m_1, m_2, \dots, m_n$  an den Stellen  $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$  um eine gemeinsame Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Kinetische Energie dieses Systems?

Für  $m_i$ :  $T_i = \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$  Geschwindigkeit  $m_3$

$m_i$  bekannt,  $v_i = \underbrace{r_i}_{\text{Abstand zur Achse}} \cdot \omega$

Hier, Rotation um  $z$ -Achse:  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

$\Rightarrow T_i = \frac{m_i}{2} \cdot r_i^2 \omega^2 = \frac{m_i}{2} \cdot (x_i^2 + y_i^2) \cdot \omega^2$

$\Rightarrow T = \sum_i T_i = \frac{1}{2} \cdot (m_1(x_1^2 + y_1^2) + \dots + m_n(x_n^2 + y_n^2)) \cdot \omega^2$   
kinetische Energie des Systems bei Rotation um die  $z$ -Achse

Def: Das **Massenträgheitsmoment**  $\Theta_z$  eines Systems um die  $z$ -Achse ist  $\Theta_z = m_1(x_1^2 + y_1^2) + \dots + m_n(x_n^2 + y_n^2)$   
**Großes Theta**

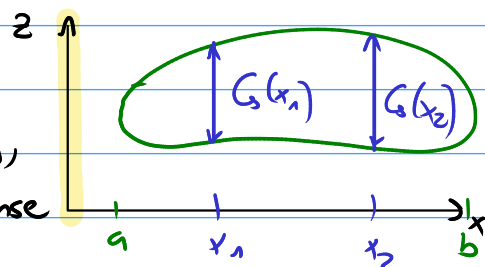
Analog:  $\Theta_x = m_1(y_1^2 + z_1^2) + \dots + m_n(y_n^2 + z_n^2)$ , um  $x$ -Achse  
 $\Theta_y = m_1(x_1^2 + z_1^2) + \dots + m_n(x_n^2 + z_n^2)$ , um  $y$ -Achse

$\Rightarrow$  Kinetische Energie bei Rotation:  $T = \frac{1}{2} \cdot \Theta_z \cdot \omega^2$

Übergang zur Massendichte:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  mit  $x$ -Werten  $\in [a, b]$ ,

Dichte homogen  $\rho$ , Rotation um  $z$ -Achse



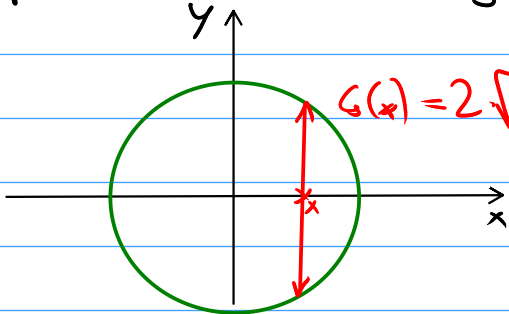
→ Masse im Abstand  $x \hat{=} s \cdot G(x)$

$$\Rightarrow \Theta_z = s \cdot \int_a^b \underbrace{x^2}_{\text{Abstandsquadrat}} \cdot \underbrace{G(x)}_{\text{Volumen in Abstand } x} dx$$

→ Kinetische Energie der Rotation:  $T = \frac{1}{2} \cdot \Theta_z \cdot \omega^2$

Def: Ohne  $s$  (bzw.  $s=1$ , ohne Einheit) erhält man das Flächenträgheitsmoment  $J_x := \Theta_x$  bzw.  $J_y := \Theta_y$

Bsp: Axiales Flächenträgheitsmoment einer Kreisscheibe, Radius  $R$ , bezgl  $y$ -Achse



$$G(x) = 2 \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\Theta_y = \int_{-R}^R x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

gerade!

$$= 4 \cdot \int_0^R \underbrace{x^2}_{\text{gerade!}} \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{\text{gerade!}} dx$$

Substitution:  $x = R \cdot \sin t$ ,  $\underline{dx} = R \cos t \cdot dt$ ,  $t \in [0, \pi/2]$

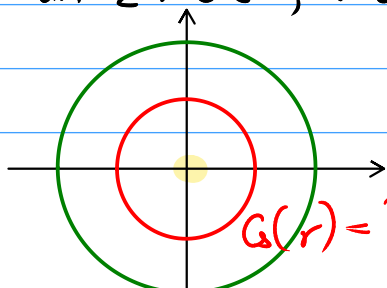
$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta_y}} = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \cdot R \cos t \cdot R \cos t dt$$

$$= 4 \cdot R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t} dt$$

$$= 4 R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t - \sin^4 t dt$$

$$= 4 \cdot R^4 \cdot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \pi R^4}}$$

Bsp: Polares Flächenträgheitsmoment eines Zylinders um  $z$ -Achse, Radius  $R$  (benötigt bei Torsion)

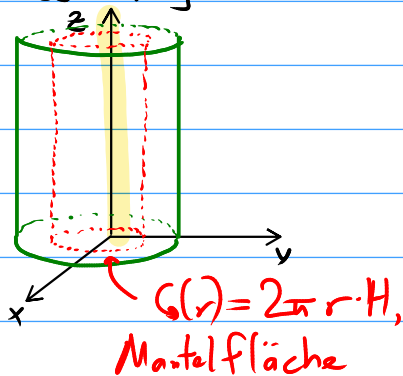


$$\underline{\underline{\Theta_z}} = \int_0^R r^2 \cdot G(r) dr$$

$$G(r) = 2\pi r$$

$$= \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \underline{\underline{\frac{\pi R^4}{2}}}$$

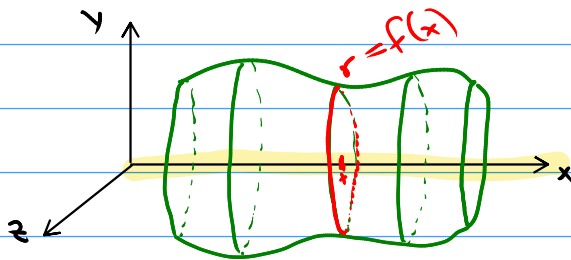
Bsp: Gerader Vollzylinder, Höhe  $H$ , Radius  $R$ , Dichte  $\rho$  homogen,  
Massenträgheitsmoment bzgl. Symmetrieachse



$$\begin{aligned} \Theta_z &= \rho \cdot \int_0^R r^2 \cdot G(r) dr \\ &= \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r H dr = 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} \\ &= m \cdot \frac{R^2}{2} \quad \text{mit } m = \rho R^2 \pi H, \\ &\quad \text{Zylindermasse} \end{aligned}$$

## Rotationskörper

Sei  $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  gegeben. Was ist das Massenträgheitsmoment des Rotationskörpers um die  $x$ -Achse?



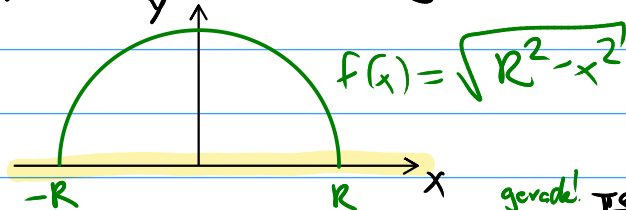
Mit Differentialen:

$$d\Theta_x = \frac{\pi}{2} r^4 \rho dx = \frac{\pi \rho}{2} (f(x))^4 dx$$

pol. Flächen-  
träg. mon.

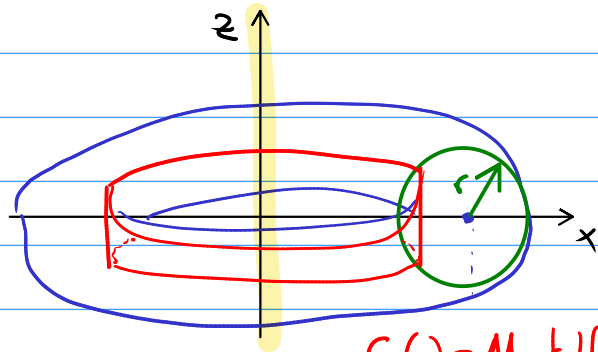
$$\rightarrow \Theta_x = \int d\Theta_x = \frac{\pi \rho}{2} \int_a^b (f(x))^4 dx$$

Bsp: Vollkugel, homogen, Radius  $R$ , Dichte  $\rho$



$$\begin{aligned} \Theta_x &= \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx \\ &\stackrel{\text{gerade!}}{=} \frac{\pi \rho}{2} \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) \\ &= \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \underline{\underline{\frac{2}{5} m R^2}} \end{aligned}$$

Bsp: Volltorus als Rotationskörper



$$\Theta_z = \int_{R-r}^{R+r} x^2 \cdot G(x) dx$$

Verschieben um R

$$G(x) = \text{Mantelfläche} = \underbrace{2\pi x}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{r^2 - (x-R)^2}}_{\text{Höhe}}$$

$$\Rightarrow \Theta_z = \int_{R-r}^{R+r} x^2 \cdot 4\pi x \cdot \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx$$

Substitution:  $x - R = r \sin t \Rightarrow dx = r \cos t dt$ ,  
 $(\Rightarrow x = R + r \sin t) \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \sin t)^3 \cdot r \cos t \cdot r \cos t dt$$

$$= 4\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \sin t)^3 \cdot \cos^2 t dt$$

13.12.2021 Themen: Schluss Trägheitsmoment, Uneigentliche Integrale 1. &amp; 2. Gattung

$$= 4\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 + \cancel{3R^2 r \sin t} + 3Rr^2 \sin^2 t + \cancel{r^3 \sin^3 t}) (1 - \sin^2 t) dt$$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k+1} t dt = 0$        $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t dt$

Es gilt:  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k+1} t dt = 0$ , da  $\sin^{2k+1} t$  ungerade

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t dt$ , da  $\sin^{2k} t$  gerade

$$\Rightarrow \underline{\Theta_z} = 8\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{R^3}_{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}} - R^3 \underbrace{\sin^2 t}_{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}} + 3Rr^2 \underbrace{\sin^2 t}_{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}} - 3Rr^2 \underbrace{\sin^4 t}_{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= 8\pi^2 \epsilon r^2 \left( \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{4} + \frac{3Rr^2}{4} - \frac{9Rr^2}{16} \right) \\
&= 8\pi^2 \epsilon r^2 R \left( \frac{R^2}{4} + \frac{3r^2}{16} \right) = \underbrace{2\pi^2 \epsilon R r^2}_m \cdot \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)
\end{aligned}$$

### III.13 Uneigentliche Integrale

Elektrostatische Kraft zwischen 2 Teilchen mit Ladungen  $q$  und  $Q$  im Abstand  $r > 0$ :

$$F(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

Arbeit dieser Kraft bei Veränderung des Abstands von  $r_1 := r$  zu  $r_2$ :

$$\begin{aligned}
\underline{W} &= \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\
&= \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)
\end{aligned}$$

Wie gross die maximal mögliche Arbeit, wenn  $r_2$  unbekannt ist?  
 $r_2 \rightarrow \infty$  maximiert diesen Ausdruck für die Arbeit

$$\begin{aligned}
W &= \int_R^{\infty} F(r) dr = \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R} - 0 \right), \\
&\text{da } \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{r} = 0.
\end{aligned}$$

Def: Wenn  $[a, \infty) \subset D(f)$ , dann ist

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^{\xi} f(x) dx \quad \text{das uneigentliche Integral 2. Gattung.}$$

Es existiert/konvergiert, wenn der Grenzwert existiert.

$$\text{Bsp: } \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \arctan \xi = \underline{\underline{\pi/2}}$$

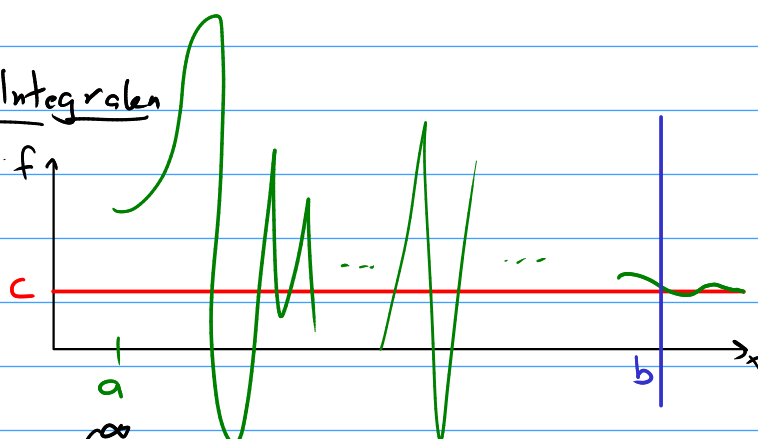
$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (-e^{-\xi} + 1) = \underline{\underline{1}}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (1 - \cos \xi) \text{ konvergiert nicht}$$

### Konvergenz von uneigentlichen Integralen

• Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \neq 0$ ,

konvergiert  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  **nie**.



$$\text{Denn: } \int_a^{\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_b^{\infty} f(x) dx}_{\text{ungefähr } "c \cdot (\infty - b)" \rightarrow \infty}$$

• Wenn  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konvergiert, gilt immer  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,

aber nicht zwingend umgekehrt.

$$\text{Bsp: } \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [\ln x]_1^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln \xi = \underline{\underline{\infty}}, \text{ obwohl } \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

$$\cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = ? \quad \text{Sei } k > 0 \text{ und } k \neq 1$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right]_1^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{\xi^{-k+1}}{k-1} \right),$$

$$\text{ist } \begin{cases} \text{konvergent, wenn } -k+1 < 0 \Leftrightarrow k > 1 \\ \text{divergent, wenn } -k+1 > 0 \Leftrightarrow k < 1 \end{cases}$$

Zusammengefasst:

$$\int_1^{\infty} x^r dx \text{ existiert} \Leftrightarrow r < -1$$

Bsp:  $f(x) = e^{-x^2}$  hat keine elementare Stammfunktion,  
aber:  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  existiert

Beweis: Für  $x \geq 1$  gilt  $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$

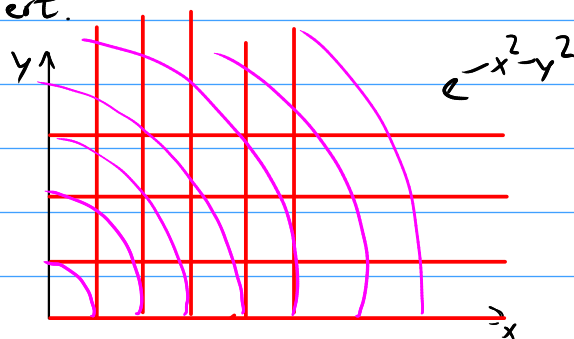
$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{\xi} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{\xi} e^{-x} dx = -e^{-\xi} + \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow F(\xi) := \int_1^{\xi} e^{-x^2} dx$  erfüllt  $F(\xi) \leq 1/e$ , d.h.  
 $F$  ist eine beschränkte Funktion.

Da  $e^{-x^2} > 0$  ist  $F$  ausserdem monoton wachsend

$\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  existiert.

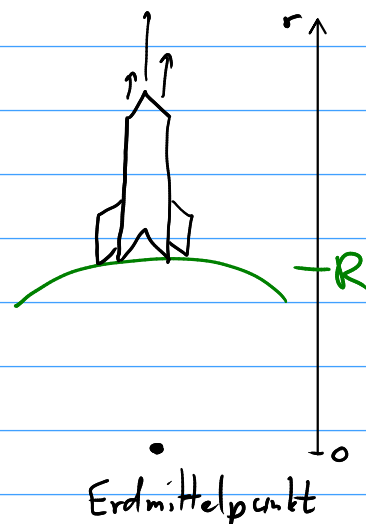
Analysis II: Berechne  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$



Bsp: Fluchtgeschwindigkeit der Erde

Eine Rakete, die auf der Erde startet,  
möchte die Erdgravitation überwinden.

Gravitationskraft:  $K(r) = -k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$   
Raketenmasse  $m$ ,  $M$  ← Erdmasse  
 $k$  ← Gravitationskonstante  
 $r$  ← Abstand zum Erdmittelpunkt



$$\begin{aligned} \text{Arbeit bis } \infty: W &= \int_R^{\infty} |K(r)| dr \\ &= \int_R^{\infty} k \frac{m M}{r^2} dr = \frac{k \cdot m \cdot M}{R} \end{aligned}$$

Wie schnell muss die Rakete fliegen, um mehr kinetische Energie zu haben als diese Gravitationsarbeit?

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = k \cdot m \cdot M / R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2k M}{R}} \approx 11.2 \text{ km/s,}$$

Fluchtgeschwindigkeit der Erde

Umgang mit Polen / Definitionslücken

Wenn  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$  kann man

definieren  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \int_{\xi}^b f(x) dx,$

das **uneigentliche Integral 1. Gattung**

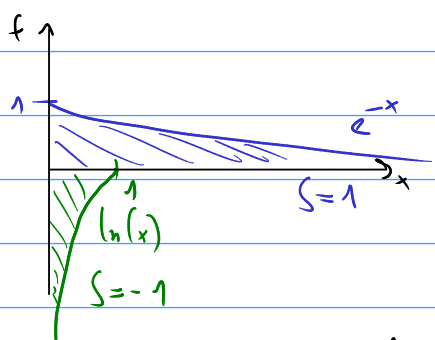
Bsp:  $\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} [x \cdot (\ln(x) - 1)]_{\xi}^1$

$$= -1 - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \cdot (\ln(\xi) - 1) = -1 - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \cdot \ln \xi$$

Bernoulli-Hopital:  $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \cdot \ln \xi = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\xi)}{1/\xi}$

$$\stackrel{B-H}{=} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{1/\xi}{-1/\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} -\xi = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x) dx = \underline{\underline{-1.}}$$



Flächen sind geometrisch  
gleich bis auf Rotation  
 $\Rightarrow \int \int = \int \int$

Bsp: Sei  $k \neq 1$ .  $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_{\xi}^1$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-k} - \frac{\xi^{1-k}}{1-k} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & \text{falls } k \in (0, 1) \\ \text{divergent,} & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^r dx = \begin{cases} \frac{1}{1+r}, & \text{wenn } r > -1 \\ \text{divergent,} & \text{wenn } r < -1 \end{cases}$$