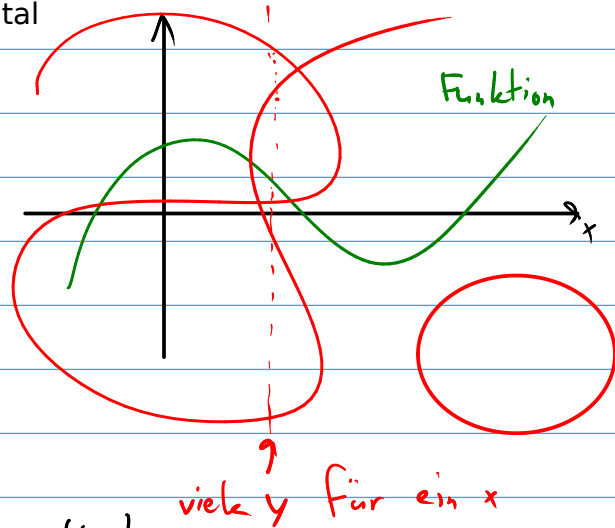
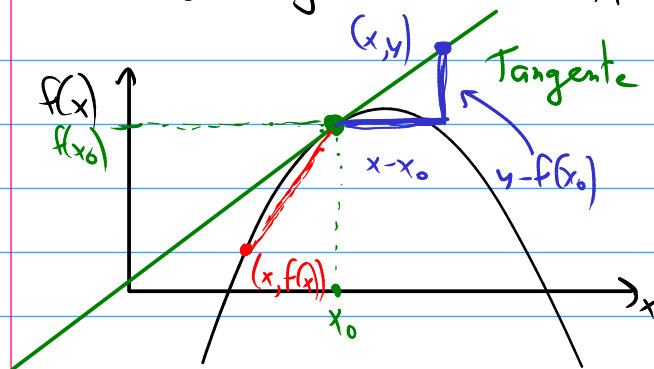


Ziele für dieses Kapitel

- Funktionen analysieren
 - Extrema und Wendepunkte
 - Approximation durch Linearisierung
 - Mittelwertsatz & Regel von Bernoulli-Hôpital
 - Wachstumsverhalten
- Ebene Kurven



II.1 Der Begriff des Differentialquotienten

Tangente an $\Gamma(f)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$

Gleichung dieser Tangente?

Allgemeine Geradengleichung durch $(x_0, f(x_0))$:Steigung, unabhängig von x, y

$$\underbrace{y - f(x_0)}_{\text{vertikaler Abstand}} = \underbrace{m}_{\text{Steigung}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{horizontaler Abstand (des Punktes } (x, y) \text{ von } (x_0, f(x_0)))}$$

Wie bestimmt man m ?Nehme einen zweiten Punkt $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$.Steigung zwischen $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ der Differenzenquotient}$$

Grenzwertprozess: Wenn $x \rightarrow x_0$, wird die Sekante zwischen $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ zur Tangente an $(x_0, f(x_0))$ (wenn f genügend "nett" ist)

Def: $\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, wenn der Grenzwert existiert,

ist der **Differentialquotient** von f adS x_0 .

'Äquivalent mit $\Delta x := x - x_0$: $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Def: Wenn der Differentialquotient adS x_0 existiert, ist f adS x_0 **differenzierbar (diff'bar)**. Wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D(f)$ diff'bar ist, ist f selbst **diff'bar**.

Wenn f diff'bar ist, ist die **Ableitung** von f die Funktion: $f': D(f) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x) := \frac{df}{dx}(x)$$

Wenn f nicht diff'bar ist, wird $D(f)$ oft implizit eingeschränkt und man spricht immer noch von der Ableitung.

Zusammenhang mit Stetigkeit

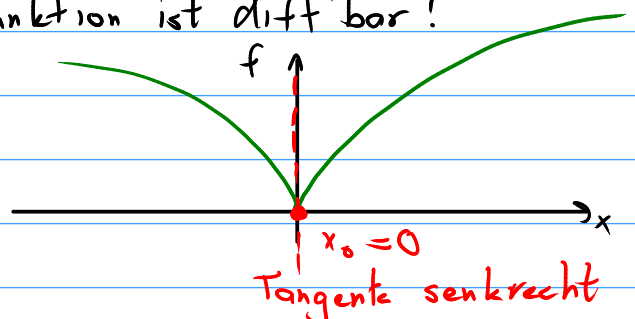
$$\begin{aligned} \bullet f \text{ diff'bar adS } x_0 &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0), \text{ d.h. } f \text{ ist stetig adS } x_0$$

Umkehrschluss: f nicht stetig adS $x_0 \Rightarrow f$ nicht diff'bar adS x_0

• Nicht jede stetige Funktion ist diff'bar!

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{|x|} \end{aligned}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\overset{0}{x_0 + \Delta x}) - f(\overset{0}{x_0})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty$$

(ohne Betrag da $\Delta x \geq 0$)

$\Rightarrow f$ ist nicht diff'bar adS $x_0 = 0$, obwohl f dort stetig ist.

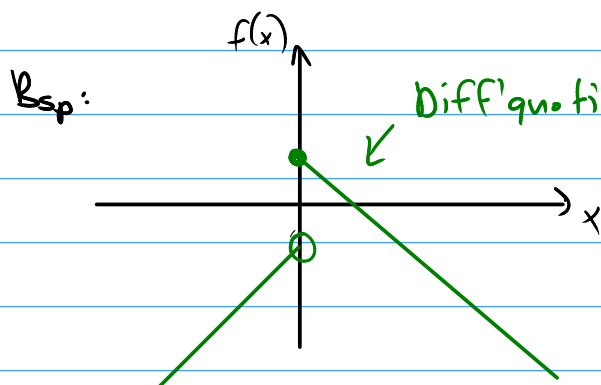
Bsp: $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x} \cdot \cancel{\Delta x} + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x \end{aligned}$$

Anstrengend! Deshalb: Rechenregeln

Wenn f und g adS x diff'bar sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (C \cdot f(x))' &= C \cdot f'(x) \quad \text{für } C \in \mathbb{R} \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{wenn } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$



Diff'quotient bei $x_0 = 0$ existiert bei $\Delta x \rightarrow 0^+$

Man kann hier den Rechtsdiff'quotienten einführen und damit rechnen.

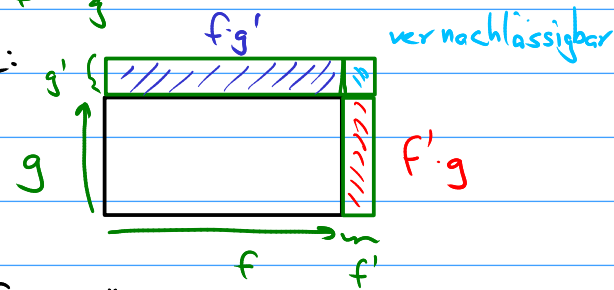
(In dieser Vorlesung benötigen wir sie nicht.)

Bsp: Was ist $(1/x)'$? 4. Regel, $f(x) = 1$, $g(x) = x$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\cdot (x^3)' = (\underbrace{x}_f \cdot \underbrace{x^2}_g)' = \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{x^2}_g + \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{(2x)}_{g'} = 3x^2$$

Intuition für Multiplikationsregel:



Allgemein: $(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$\cdot (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x}$$

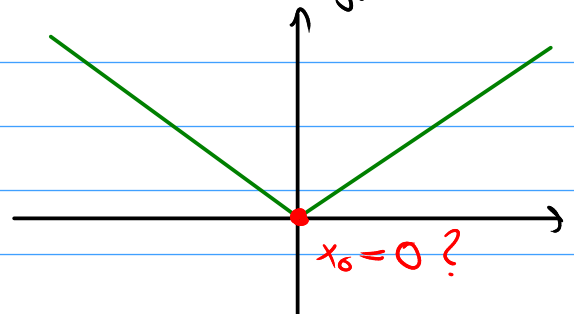
$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x \\ \cos' x &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

(Zwei Darstellungen der gleichen Funktion)

$$\cdot f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

\Rightarrow Für $x < 0$ ist $f'(x) = -1$
Für $x > 0$ ist $f'(x) = 1$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$\neq \Rightarrow$ Lim existiert nicht
 \Rightarrow divergent

$\Rightarrow |x|$ ist adS 0 nicht diff'bar

Kettenregel

Seien f, g diff'bare Funktionen mit $W(g) \subset D(f)$

\rightarrow Verkettung, Verknüpfung $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
kleiner Kreis

Bsp: $f(x) \hat{=}$ Höhe an der Position x
 $g(t) \hat{=}$ Ort zum Zeitpunkt t
 $\Rightarrow (f \circ g)(t) \hat{=}$ Höhe zum Zeitpunkt t

Satz (Kettenregel): $(f \circ g)'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Höhe/Distanz}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Distanz/Zeit}} = \text{Höhe/Zeit}$

Beweis: Gesucht ist $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = (*)$

Definiere $d := g(x+\Delta x) - g(x) \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} d = 0$

$$(*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+d) - f(g(x))}{d} \cdot \frac{d}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(g(x)+d) - f(g(x))}{d}}_{\substack{\text{Grenzwert mit } \Delta x \rightarrow 0 \\ \text{ist Diffquotient in } d \text{ und} \\ f \text{ an der Stelle } g(x)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\substack{\text{Grenzwert } \Delta x \rightarrow 0 \rightarrow g'(x)}}$$

$$= \underline{f'(g(x))} \cdot g'(x)$$

Bsp: $(\cos^3(x))' = \underbrace{3 \cdot \cos^2 x}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)}$

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = \cos x$$

$$\cdot (\cot(x^2))' = \underbrace{f(x) = \cot(x)}_{f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \underbrace{g(x) = x^2}_{g'(x) = 2x} = -\frac{2x}{\sin^2(x^2)}$$

$$g(x) = x^2$$

$f(x) = x^m$, $g(x)$ beliebig, diff'bar

$$\cdot (f \circ g)(x) = (g(x))^m \Rightarrow ((g(x))^m)' = m \cdot (g(x))^{m-1} \cdot g'(x)$$

$$\cdot (g \circ f)(x) = g(x^m) \Rightarrow (g(x^m))' = g'(x^m) \cdot m \cdot x^{m-1}$$

$$\begin{aligned} \cdot (f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) \\ \Rightarrow (f \circ g \circ h)'(x) &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \end{aligned}$$

27.10.2021

Heute: Ableitung der Umkehrfunktion, lineare Ersatzfunktion, Approximation, Differentiale

Noch offen: Was ist $\arcsin' x$?

Ableitung der Inverse

Sei f bijektiv mit Inverse f^{-1} , d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = x \parallel \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (f \circ f^{-1})(x) = \underbrace{f'(f^{-1}(x))}_{\substack{\text{äußere Ableitung} \\ \text{innere Fkt. eingesetzt}}} \cdot \underbrace{(f^{-1})'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}, \text{ Ableitung der Inverse}$$

Bsp: $\arccos'(x) = \frac{-\sin(\arccos(x))}{1}$
 $\stackrel{= f^{-1}}{\Rightarrow} f = \cos \Rightarrow f' = -\sin$

Klappt, aber noch keine "schöne" Form

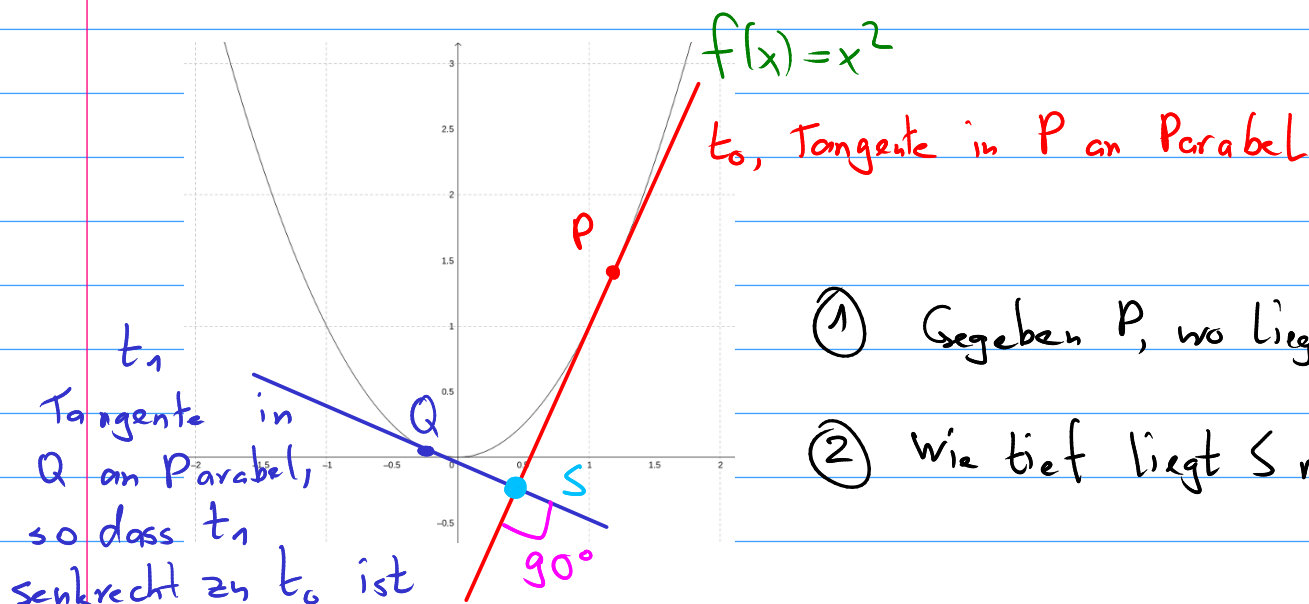
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{für} \\ \text{passende} \\ x \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\arccos'(x) = - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

$f(x) = e^x$
 $f'(x) = e^x$

Eine geometrische Anwendung



① Gegeben P, wo liegt Q?

② Wie tief liegt S maximal?

Schritt 1: Tangente t_0 bestimmen

$$y - y_0 = m_0 (x - x_0)$$

$$P = (x_0, y_0)$$

x_0^2 Steigung in P $\hat{=} f'(x_0) = 2x_0$

$$\Rightarrow \underline{t_0}: y = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2 = \underline{\underline{2x_0 \cdot x - x_0^2}}$$

Schritt 2: Tangente t_1 bestimmen

$$t_1 \text{ ist senkrecht zu } t_0 \Rightarrow \text{Steigung } m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2x_0}$$

$$\Rightarrow t_1: y - y_1 = -\frac{1}{2x_0} \cdot (x - x_1) = m_1 (x - x_1) = f'(x_1) (x - x_1) = 2x_1 (x - x_1)$$

$$Q = (x_1, y_1)$$

Parabel

$$\Rightarrow -\frac{1}{2x_0} = 2x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4x_0}$$

$$\Rightarrow y_1 = x_1^2 = \frac{1}{16x_0^2}$$

$$\Rightarrow t_1: y - \frac{1}{16x_0^2} = -\frac{1}{2x_0} \cdot \left(x + \frac{1}{4x_0}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{x}{2x_0} - \frac{1}{16x_0^2}}}$$

Schritt 3: $S = t_0 \wedge t_1$

Vermutung aus Geogebra: S liegt immer gleich hoch, ca bei $-1/4$

$$\begin{aligned} y &= t_0 = 2x_0 \cdot x - x_0^2 \\ y &= t_1 = -\frac{x}{2x_0} - \frac{1}{16x_0^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= t_0 \\ y &= t_1 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleichsetzen,} \\ \text{nach } x \text{ auflösen} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x_0 \cdot x + \frac{x}{2x_0} = +x_0^2 - \frac{1}{16x_0^2}$$

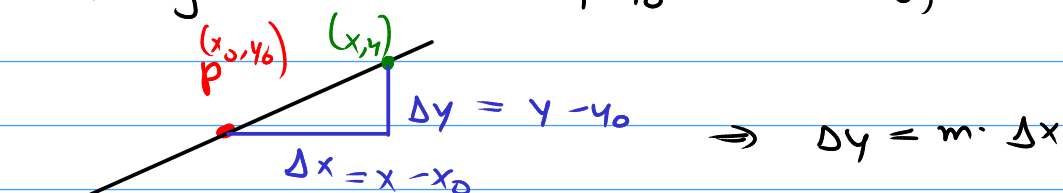
$$\Rightarrow 2x \cdot \left(x_0 + \frac{1}{4x_0} \right) = x_0^2 - \frac{1}{16x_0^2} = \left(x_0 - \frac{1}{4x_0} \right) \left(x_0 + \frac{1}{4x_0} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_0 - \frac{1}{4x_0}}{2} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0}, \quad x\text{-Koordinate von } S$$

$$\begin{aligned} y \text{ mit } t_0 \text{ ausrechnen: } y &= 2x_0 \cdot x - x_0^2 \\ &= 2x_0 \cdot \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0} \right) - x_0^2 = x_0^2 - \frac{1}{4} - x_0^2 = \underline{\underline{-1/4}} \end{aligned}$$

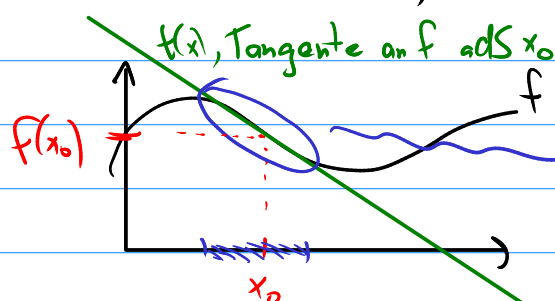
$$\Rightarrow S = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0}, -1/4 \right), \quad \text{Höhe unabhängig von } x_0.$$

Warum Tangenten in Form $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$?



\Rightarrow Quasi ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in (x_0, y_0)

II. 2 Linearisieren, Fehlerrechnung



Tangente und Funktion

sehr ähnlich \rightarrow Bereich guter

Approximation von $f(x)$ durch $t(x)$.

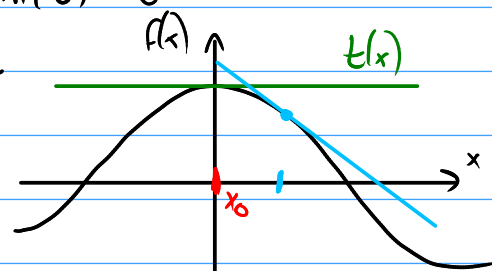
Def: Die **lineare Ersatzfunktion** von f adS x_0 ist

$$t(x) := \underbrace{f(x_0)}_{\text{Stützpunkt}} + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{horizontaler Abstand zu } x_0}$$

Bsp: $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) = \cos(0) = 1, \quad f'(x_0) = -\sin(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = 1 + 0 \cdot (x - 0) = \underline{1}$$



Mit $x_0 = \pi/4$

$$f(x_0) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x_0) = -\sin(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - \frac{\pi}{4})$$

Bsp: $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

$$\bullet f(x_0) = \ln(1) = 0$$

$$\bullet f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\} \Rightarrow t(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) = \underline{x - 1}$$

Qualität der Approximation

Fehler durch Benutzen von $t(x)$ statt $f(x)$: $\varphi(x) := f(x) - t(x)$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{= \Delta x}$$

Wie gross ist φ um $x \approx x_0$?

$$\bullet \varphi(x_0) = 0.$$

• Setze $\Delta x := x - x_0$, betrachte Δx klein und vergleiche

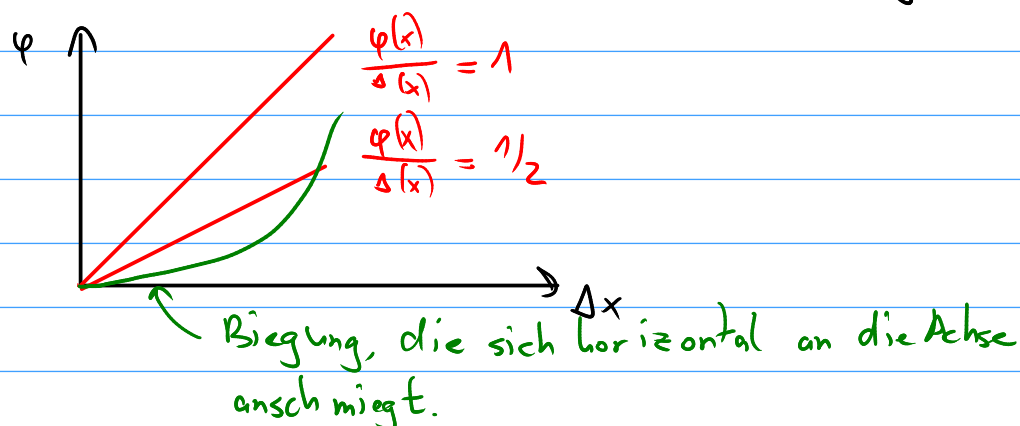
mit $\varphi(x)$:
$$\frac{\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} - \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Differenzialquotient}}$$

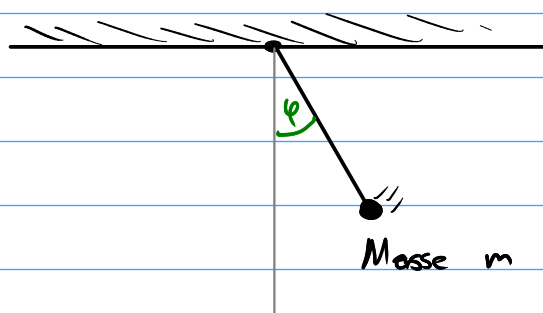
Differenzenquotient Differenzialquotient

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\Delta x} = f'(x_0) - f'(x_0) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ geht schneller gegen 0 als Δx , die Approximation ist relativ betrachtet für kleine Δx sehr gut.



Bsp aus Physik: Pendel



Horizontale Kraft bei Winkel $\varphi(t)$

$$K = m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot a(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) = a(t), \text{ aber } s(t)$$

wird so kompliziert, dass die Gleichung nicht lösbar ist.

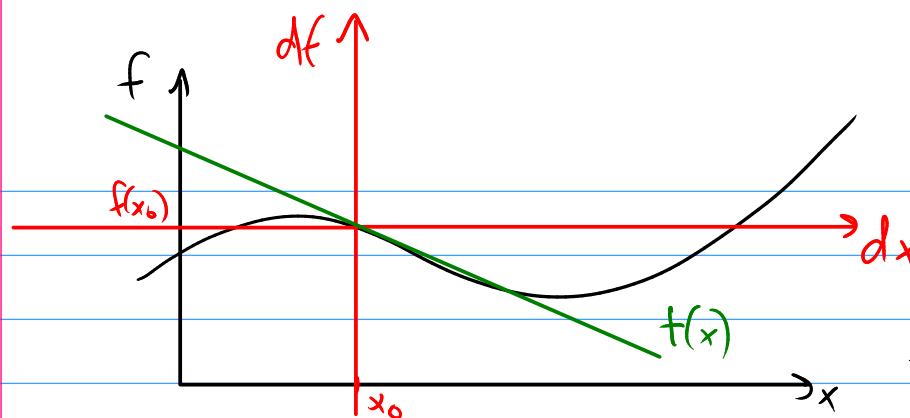
Aber: $\sin(\varphi)$ kann um $\varphi = 0$ durch $t(\varphi) = \varphi$ linear approximiert werden. Damit wird $K = m \cdot g \cdot \varphi(t)$, damit lässt sich die Gleichung lösen.

\Rightarrow Lösung ist approximativ, aber für kleine φ ist sie sehr gut.

Differentiale

Verschiebe Koordinatensystem so, dass $(x_0, f(x_0))$ der neue Nullpunkt ist.

\Rightarrow Lineare Ersatzfunktion ist dann eine Gerade durch den Nullpunkt, d.h. proportional.



Neue Koordinaten:
 dx, df

$t(x)$ in neuen Koordinaten:
 $df: dx \mapsto f'(x_0) \cdot dx$

Differential, die
lineare Ersatzfunktion in
neuen Koordinaten

Gute Approximation im alten KS:
"Wenn dx klein ist, ist $t(x)$
nahe bei $f(x)$ "

Im neuen System: "Wenn dx klein ist, ist df nahe bei df "
(mit $df = f(x) - f(x_0)$).

Themen: Absolute & relative Fehler, lokale Extrema, Satz von Rolle

Erinnerung: Lineare Ersatzfunktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Bsp: $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, $x_0 = 0$.

- $f(x_0) = 1^\alpha = 1$
- $f'(x_0) = \alpha \cdot (1+0)^{\alpha-1} = \alpha$

$$\Rightarrow t(x) = 1 + \alpha \cdot (x - 0) = 1 + \alpha x.$$

Für kleine x ($= dx$) gilt also $f(x) \approx t(x) = 1 + \alpha x$

- $\alpha = 1/2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$
- $\alpha = -1/2 \Rightarrow f(x) = 1/\sqrt{1+x} \approx 1 - x/2$
- $\alpha = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

Im Alltag:

"B ist um 2% grösser als A": $B = A \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)$

$$\Rightarrow A = B \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{100}}$$

"A ist um 2% kleiner als B": $A = B \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)$

\Rightarrow Ist für kleine Abweichungen praktisch die gleiche Aussage.

Repetition Differential: $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi/6$

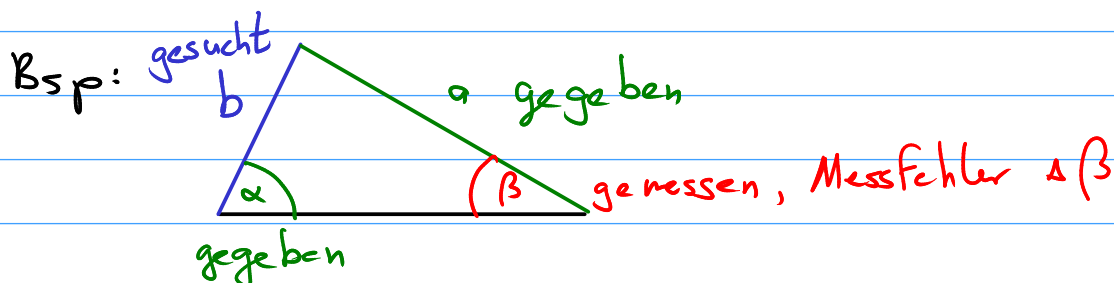
- $f(x_0) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f'(x_0) = -\sin(\pi/6) = -1/2$

$\Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - \pi/6}{2}$, die lineare Ersatzfunktion

$\Rightarrow df = -\frac{dx}{2}$, der Rest ist im neuen Koordinatensystem verschwunden

$\Rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{1}{2} = f'(x_0)$ (Verschiebung um $(x_0, f(x_0))$)

Fehlerrechnung



Wie beeinflusst der Messfehler $\Delta\beta$ die berechnete Länge b ?

Sinussatz: $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$

Setze $f(\beta) := b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$

Approximation durch Lin. Ersatzfkt

$$\Rightarrow \Delta f = f(\beta + \Delta \beta) - f(\beta) \approx df = f'(\beta) d\beta \quad d\beta = \Delta \beta$$

$$= \frac{a}{\sin \alpha} \cdot (\sin(\beta + \Delta \beta) - \sin(\beta)) = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos \beta \cdot \Delta \beta$$

• Absoluter Fehler: $\Delta f \approx \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos \beta \cdot \Delta \beta$

Wann ist dieser Ausdruck klein?

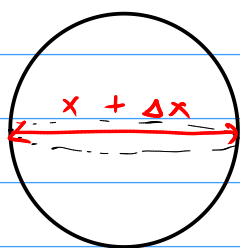
- $\Delta \beta$ ist ein proportionaler Faktor
- Wenn $\cos \beta$ sehr klein ist, ist Δf klein, d.h. um $\beta \approx \frac{\pi}{2}$.
- Fehler wird grösser, wenn β sehr klein ist.

• Relativer Fehler: $\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f} = \frac{(\cancel{a/\sin \alpha}) \cdot \cos \beta \cdot d\beta}{(\cancel{a/\sin \alpha}) \cdot \sin \beta}$

$$= \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \Delta \beta = \cot \beta \cdot \Delta \beta, \text{ wiederum klein um } \beta \approx \frac{\pi}{2}.$$

Der absolute Fehler ändert sich mit a und α , der relative Fehler aber nicht!

Bsp: Abschätzung von Kugeloberfläche und -Volumen anhand des gemessenen Durchmessers



Durchmesser x
Messfehler Δx

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$O = 4\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Absolute Fehler: $dV = \underbrace{\frac{4\pi}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}_{=V'(x)} \cdot dx = \frac{\pi}{2} x^2 dx$

$$dO = 4\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot dx = 2\pi x dx$$

Relative Fehler: $\frac{dV}{V} = 3 \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{\text{relativer Messfehler}}, \quad \frac{dO}{O} = 2 \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{\text{relativer Messfehler}}$

Ziel: Erkennen & Finden von Maxima und Minima

[illegible]

an Rand
von $D(f)$

Def: \exists lokale Maximal- oder Minimalstelle

Exkurs: Fermat, vor der Entdeckung der Ableitung (um 1640)

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 - a = b^3 - b, \text{ in Gedanken ist } a \neq b \text{ und } a = b^n$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) - (a-b) = 0 \quad || : (a-b)$$

Setze $a=b \Rightarrow \underbrace{3a^2 - 1}_{f'(a)} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Satz: f diff' bar, ξ lok. Extremalstelle $\Rightarrow f'(\xi) = 0$.

Beweis per Ausschlussverfahren: $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, da f diff' bar

• Angenommen $f'(\xi) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0$

\Rightarrow Für alle x genügend nahe bei ξ gilt $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0$

$\Rightarrow f(x) - f(\xi)$ und $x - \xi$ haben das gleiche Vorzeichen

\Rightarrow • Für $x < \xi$ ist $x - \xi < 0 \Rightarrow f(x) - f(\xi) < 0$

• Für $x > \xi$ ist $x - \xi > 0 \Rightarrow f(x) - f(\xi) > 0$

\Rightarrow Weder lokale Maximal- noch Minimalstelle, da um ξ kleinere und grössere Werte existieren.

\Rightarrow Widerspruch, Annahme $f'(\xi) > 0$ kann nicht gelten.

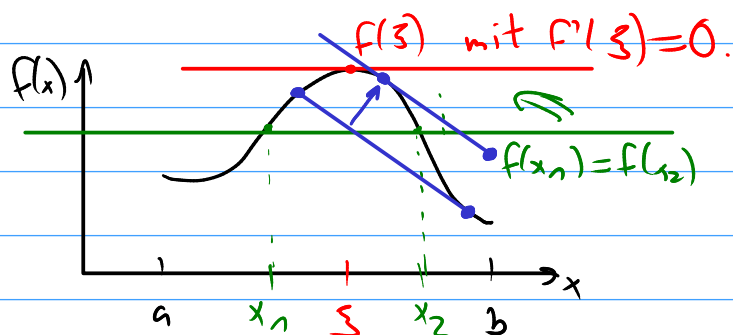
• Analog: $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$ Keine Extremalstelle

• Übrig bleibt einzig: $f'(\xi) = 0$. □

Satz von Rolle: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, diff' bar,

$a < x_1 < x_2 < b$ mit $f(x_1) = f(x_2)$

\Rightarrow Es gibt ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = 0$



Satz von Rolle: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, diff'bar,
 $a < x_1 < x_2 < b$ mit $f(x_1) = f(x_2)$
 \Rightarrow Es gibt ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis: • f konstant $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \checkmark$
 • f nicht konstant $\Rightarrow f$ nimmt zwischen x_1 und x_2 andere Werte an
 \Rightarrow Es gibt ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum zwischen x_1 und x_2 , also eine lokale Extremalstelle ξ .
 $\Rightarrow f'(\xi) = 0.$ \square

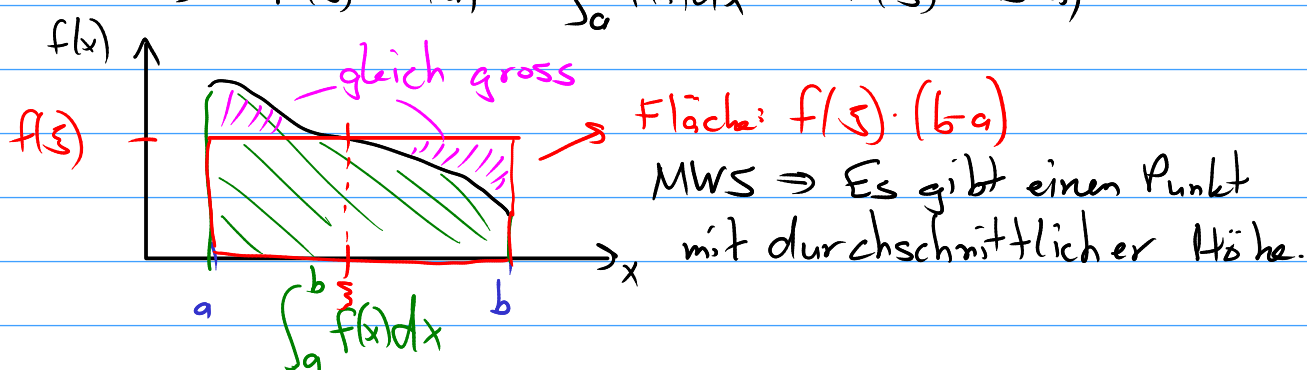
Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

f diff'bar auf $[a, b]$
 \Rightarrow Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 bzw. $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$

Interpretation: Es gibt einen Punkt mit durchschnittlicher Steigung.

Anwendung bei Integralen: Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$



Beweis: Wähle ein diff'bares g mit:

$$\bullet g(a) = g(b)$$

$$\bullet g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Rolle \Rightarrow Es gibt ξ mit $g'(\xi) = 0$)

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

da $g'(\xi) = 0$.

⇒ Wenn wir so ein g gefunden haben, folgt aus dem Satz von Rolle der Mittelwertsatz.

Konstruktion von g :

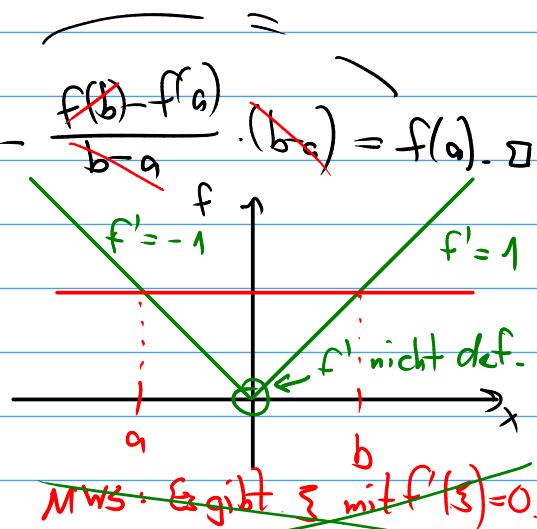
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \checkmark$$

• Einsetzen: $x=a \Rightarrow g(a) = f(a)$

$x=b \Rightarrow g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a) \quad \square$

Vorsicht: Der Mittelwertsatz (MWS) kann falsch sein, wenn f an einer Stelle nicht diff'bar ist. Bsp: $f(x) = |x|$



Folgerung 1: Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) = D(f)$ gilt, dann ist f monoton wachsend.

Falls sogar $f'(x) > 0$ überall gilt, ist f strikt monoton wachsend.

Analog mit " \leq " bzw. " $<$ " für (strikt) monoton fallend.

Beweis: Für $x_2 > x_1$, beide $\in (a, b)$, gibt es ein ξ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1). \quad \square$$

Vorsicht: f kann diff'bar und strikt monoton wachsend sein, und trotzdem ein x mit $f'(x) = 0$ haben: $f(x) = x^3$ bei $x = 0$.

Folgerung 2: Regel von Bernoulli-Hôpital

Seien f, g diff'bar $[a, b]$ mit $f(a) = g(a) = 0$.

Falls $g'(x) \neq 0$ auf $(a, b]$, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analoge Aussage gilt für $x \rightarrow b^-$, $x \rightarrow x_0$,
 $x \rightarrow \pm \infty$

Beweis: Sei $y \in (a, b)$. Hilfsfunktion $h(x) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x)$

- $h(a) = f(a) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(a) = 0$.

- $h(y) = 0$

h ist diff'bar \Rightarrow Satz von Rolle: Es gibt ein $\xi \in (a, y)$ mit $h'(\xi) = 0$

Außerdem: $h'(\xi) = f'(\xi)g(y) - f(y) \cdot g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y)}{g(y)}$

Grenzwert: $y \rightarrow a^+ \Rightarrow \xi \rightarrow a^+$, da $\xi \in (a, y)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f(y)}{g(y)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square$$

Symbole ersetzen \rightarrow Ausdruck ändert Wert nicht.

Beispiele: • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{(BH)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x)} \stackrel{(BH)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{1/x} = \underline{\underline{e}}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 - \sin(x^2)}{\ln(1+x^2)} \stackrel{(BH)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x \cos(x^2)}{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1+x^2)}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{(1 - 2 \cos(x^2))}{2} = \underline{\underline{-1/2}}$

Erweiterung ohne Beweis: Bernoulli-Hôpital gilt auch für " $\frac{\infty}{\infty}$ ", also $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm \infty$ statt $f(a) = g(a) = 0$.

II.4 Extremalaufgaben

Def: $x_0 \in D(f)$ ist eine **globale Maximalstelle** von f , wenn für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x_0) \geq f(x)$.

Analog: **Globale Minimalstelle** wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x .

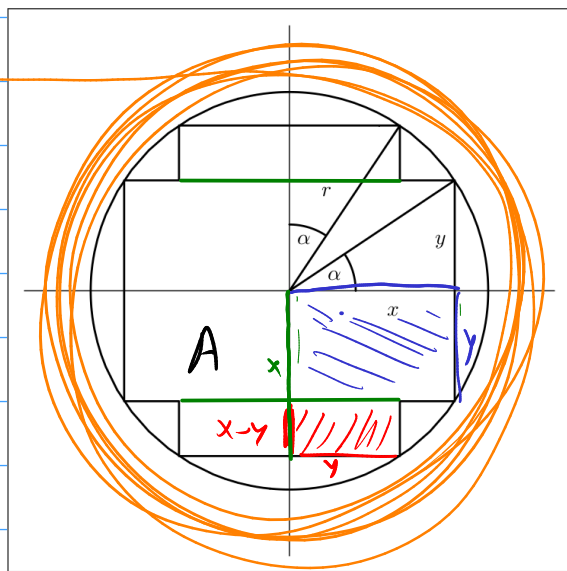
Globale Extremalstelle wenn eins von beiden ist.

$f(x_0)$ ist dann das/ein **globales Maximum/Minimum/Extremum**.

Wo können diese Stellen sein?

- An Stellen x mit $f'(x) = 0$
- An Stellen x wo f nicht diff'bar ist
- Am Rand des Definitionsbereichs

Bsp: Anfüllen eines Zylinders mit einem Kreuzeis



Radius: r

Gesucht: x, y, α , so dass die Fläche A maximal wird.

$$A = 4 \cdot xy + 4y(x-y) = 4y(2x-y)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 4r \sin \alpha \cdot (2r \cos \alpha - r \sin \alpha) = 4r^2 (2 \cos \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha) = 4r^2 (\sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha)$$

Globales Maximum?

$$\begin{aligned} \cdot A'(\alpha) &= 4r^2 (2 \cdot \cos(2\alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha) \stackrel{!}{=} 0 \\ &= 4r^2 (2 \cdot \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow 2 &\stackrel{!}{=} \tan(2\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\arctan(2)}{2} \approx 31.7^\circ \\ &\Rightarrow A(\alpha) \approx 2.47 \cdot r^2 \end{aligned}$$

• $A(\alpha)$ ist überall diff'bar $\Rightarrow \checkmark$

• Ränder: $A(0) = 0, A(\pi/4) = 2r^2$

$\Rightarrow A(0), A(\pi/4)$

\Rightarrow globales Maximum

II.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Ziel:

- \exp und \ln besser verstehen
- Eigenschaften einer Funktion anhand Definition durch eine (Differential-) Gleichung

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}$. Wenn $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diff' bar sind und $f' = A \cdot f$, $g' = A \cdot g$ gelten, dann gibt es ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = C \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgerung: Alle Lösungen der DGL $f' = A \cdot f$ sind konstante Vielfache voneinander. Es reicht, eine Lösung zu kennen, um alle Lösungen zu bestimmen.

Beweis Satz: Setze $h(x) := f(x)/g(x)$ wo $g(x) \neq 0$.

Ziel: $h(x)$ ist konstant.

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{A \cdot f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot A \cdot g(x)}{(g(x))^2} = 0.$$

$\Rightarrow h(x)$ ist konstant, es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = C$ für alle x
 $\Rightarrow f(x) = C \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \square

Wenn man weiter $f(0) = 1$ fordert, muss also $f(x) = e^{A \cdot x}$ die einzige diff' bare Lösung von $f' = A \cdot f$ sein.

(Bsp: $f(x) = e^{x+1}$ erfüllt die DGL für $A=1$)

\Rightarrow Es gibt ein C mit $e^{x+1} = C \cdot e^x$, nämlich $C = e^1$)

Folgerung: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Beweis: Sei $f(x) = e^x$ und $g(x) := f(a+x) = e^{a+x}$

$$\Rightarrow \underline{g'(x)} = \underbrace{f'(a+x)}_{=f} \cdot \underbrace{(a+x)'}_{=1} = f(a+x) = \underline{g(x)}$$

$\Rightarrow f$ und g erfüllen den Satz mit $A=1$

⇒ Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = C \cdot f(x)$ für alle x .
Was ist C ?

$$\underline{f(a)} = g(0) = C \cdot \underline{f(0)} = \underline{C}$$

$$\underline{f(a+b)} = g(b) = C \cdot f(b) = f(a) \cdot f(b) \quad \leftarrow \underline{e^a \cdot e^b} \quad \square$$

Definition von e , rechnerischer Ausdruck für e^x

$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) = e^1 = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

n Summanden
n Faktoren

Lineare Ersatzfunktion bei $x_0 := 0$: $t(x) = 1 + x$.

⇒ $e^x \geq t(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und " $=$ " nur bei $x=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{n}\right) > t\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} \\ \exp\left(-\frac{1}{n}\right) > t\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \frac{1}{e} = \left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{cases} \quad // \left(\quad\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=: a_n} < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \left(\frac{n-1+1}{n-1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1+1}$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}}_{\Rightarrow = a_{n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow a_n < e < a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)}_{\rightarrow 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2.718, \text{ Euler'sche Zahl.}$$

$\exp(x)$ rechnerisch: Schreibe $f(x) := \exp(x) = e^x$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_n x^n + \dots$$

$$= b_0 + 2b_1 x + 3b_2 x^2 + \dots + (n+1)b_n x^n + \dots$$

Es gilt $f' = f$

Gleiche Funktion \Rightarrow Gleiche Koeffizienten, also:

$$e^0 = 1 = b_0$$

$x^0:$	$b_0 = b_1$	$\Rightarrow b_1 = b_0 = 1$
$x^1:$	$b_1 = 2b_2$	$\Rightarrow b_2 = b_1/2 = 1/2$
$x^2:$	$b_2 = 3b_3$	$\Rightarrow b_3 = b_2/3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$
$x^3:$	$b_3 = 4b_4$	$\Rightarrow b_4 = b_3/4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$
\vdots		
$x^n:$	$b_n = (n+1) \cdot b_{n+1}$	$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$
\vdots		

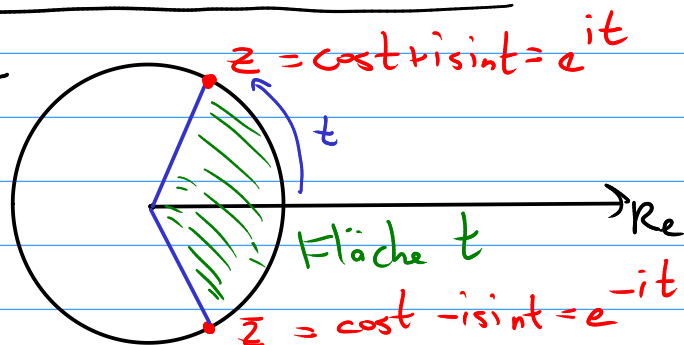
$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{Konvention: } 0! = 1)$$

$$\Rightarrow e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ Reihendefinition von } e^x$$

Hyperbolische Funktionen

Einheits-
kreis



Relationen:

$$\cdot x^2 + y^2 = 1$$

$$\cdot z \cdot \bar{z} = 1$$

Basiert auf $j^2 = -1$.

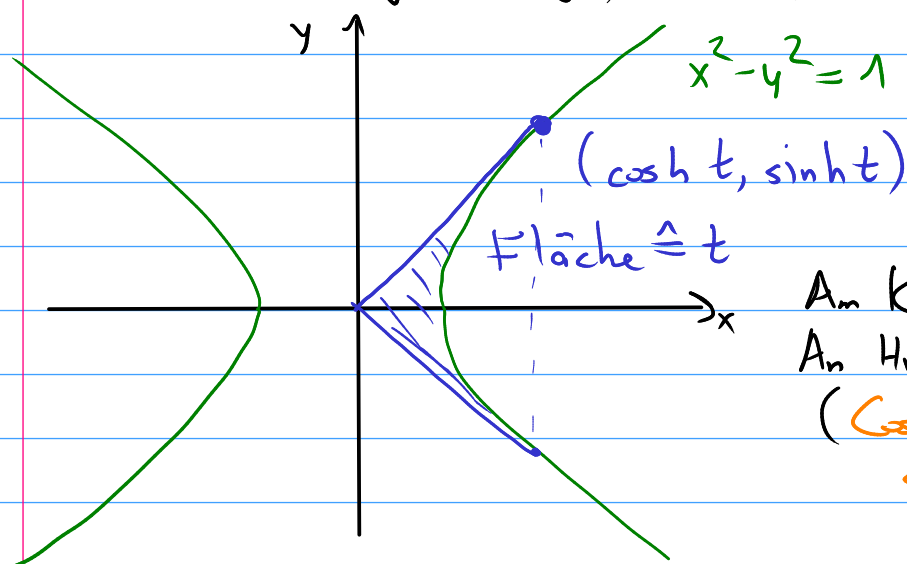
Sei j eine abstrakte Zahl mit $j^2 = 1$, $j \notin \mathbb{R}$.

$z = a + jb$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist **anormal komplexe Zahl**

$$\Rightarrow \bar{z} = a - jb$$

Was bedeutet $z \cdot \bar{z} = 1$ in diesem Kontext?

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 - j^2 b^2 = \underline{\underline{a^2 - b^2 = 1}}$$



Am Kreis: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
 Am Hyperbel: $e^{jx} = \cosh x + j \sinh x$
 (**Cosinus Hyperbolicus,**
Sinus Hyperbolicus)

$$\Rightarrow (\cosh(-t), \sinh(-t)) = (\cosh(t), -\sinh(t))$$

Formeln: $\cdot \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\cdot \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Vergleich:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ableitungen: $\cdot \cosh'(t) = \sinh(t)$

$$\cdot \sinh'(t) = \cosh(t)$$

• $\cosh(t) > 0$, da $e^t, e^{-t} > 0$

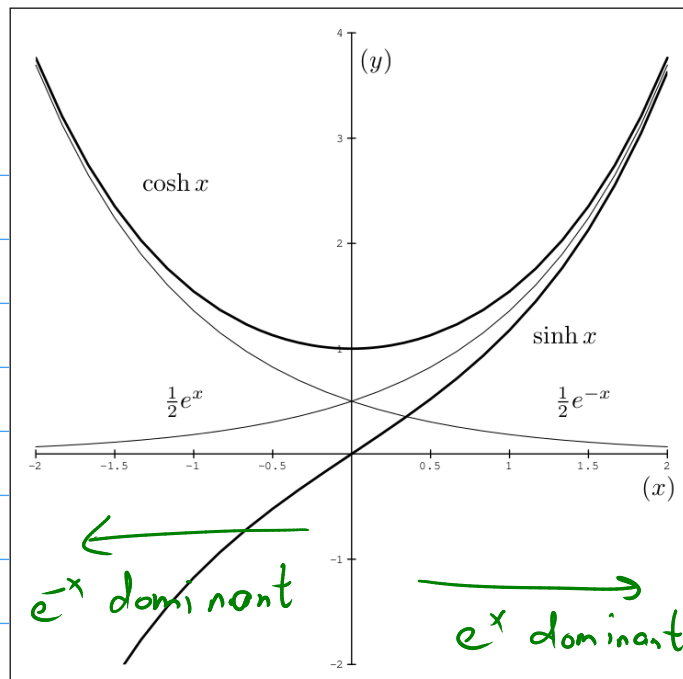
$\Rightarrow \sinh'(t) = \cosh(t) > 0$

$\Rightarrow \sinh$ strikt monoton wachsend

$\Rightarrow \sinh$ ist injektiv

Umkehrfunktion?

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$



Setze $z := e^x \Rightarrow y = \frac{z - 1/z}{2} \quad || \cdot 2z \quad 1 - 2yz$

$\Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0$, quadratische GL in z ,
 y bekannt.

$\Rightarrow e^x = z_{1/2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$

$\sqrt{y^2 + 1} > y$, d.h. $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$,
 aber $z = e^x > 0 \Rightarrow$ "-" ist keine brauchbare

$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad || \ln(\text{Lösung})$

$\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) =: \text{Arsinh}(y), \text{Area sinus Hyperbolicus.}$

Analog: $\text{Arcosh}, \text{Area cosinus Hyperbolicus}$

Themen: Logarithmen, Größenordnungen und Wachstum von Funktionen

Logarithmen

Da $(e^x)' = e^x > 0 \Rightarrow e^x$ ist strikt monoton wachsend
 $\Rightarrow e^x$ ist injektiv mit Umkehrfunktion $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ für $x \in (0, \infty)$

- $\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \Rightarrow \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
 $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
 $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a), \quad r \in \mathbb{R}$

$a^x = e^{x \ln a}$ erfüllt die DGL $f' = \ln(a) \cdot f$ aus dem Satz \Rightarrow Theorie sollte auch für a^x , $a > 1$, funktionieren.

$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln(a) \cdot a^x > 0$,
also ist a^x strikt monoton wachsend und damit injektiv.
 $W(a^x) = (0, \infty) \Rightarrow$ Es gibt also eine Umkehrfunktion

$$\log_9 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \mapsto \log_a(x)$, der **Logarithmus zur Basis a**
Konvention: Wenn a fehlt, ist $a=e$ gemeint, $\log(x) = \ln(x)$
(für diese Vorlesung)

$$\bullet a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$\left. \begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \\ a^{\log_a x} &= e^{\log_a(x) \cdot \ln(a)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln(x) = \log_a(x) \cdot \ln(a) \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

→ Statt mit a^x und \log_a lässt sich immer mit $e^{x \cdot \ln(a)}$ und $\frac{\ln x}{\ln a}$ arbeiten.

$$\cdot \frac{d}{dx} a^x = \ln(a) \cdot a^x, \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

II.6 Grössenordnungen von Funktionen

$$\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x$$

Welche der drei Funktionen wächst am schnellsten?

Kapitel I: Asymptoten als Mass? $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x)$

$$\text{Bsp: } f(x) = x, \quad g(x) = 0.999 \cdot x \Rightarrow f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0.001 \cdot x = \infty$$

↪ kein gutes Mass, um ähnliches Wachstum zu beschreiben.

Nächste Idee: Betrachte $\frac{f(x)}{g(x)}$

• Wenn $f, g \rightarrow \infty$ und f asymptotisch zu g ist, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x) + g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(x) - g(x)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{g(x)}_{\rightarrow \infty}} + 1$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

• Wenn $f(x) = C \cdot g(x)$, $C \in \mathbb{R}$, ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\underline{C}}$.

$$\text{Bsp: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{3x^2} = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Def: Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt, ist f von kleinerer

Ordnung / wächst langsamer als g wenn $x \rightarrow \infty$.

Notation: $f(x) = o(g(x))$ wenn $x \rightarrow \infty$, Landau-o

$$\Rightarrow \ln(x) = o(x^3), \quad x^3 = o(e^x) \text{ wenn } x \rightarrow \infty$$

Bsp: • $\sin(x) = o(x)$ wenn $x \rightarrow \infty$, denn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

• $f(x) = o(1)$ wenn $x \rightarrow \infty$ bedeutet dies $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1} = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

• Für $r < s$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{x^s} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{r-s} = 0$ < 0

$$\Rightarrow x^r = o(x^s) \text{ wenn } x \rightarrow \infty \text{ wenn } r < s.$$

Satz: Für alle $r \in \mathbb{R}$ ist $x^r = o(e^x)$ wenn $x \rightarrow \infty$

Beweis: • Wenn $r \leq 0$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r \leq 1$

Da $e^x \rightarrow \infty$, ist hier sicher $x^r = o(e^x)$.

• Wenn $r > 0$, sei $n = "r \text{ aufgerundet}"$, also die kleinste ganze Zahl $n \geq r$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{e^x} \stackrel{B-H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r \cdot x^{r-1}}{e^x} = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \leq 1 \\ \text{weiter mit B-H, falls } r > 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{B-H}{=} \dots \stackrel{B-H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-n+1) x^{r-n}}{e^x} = 0$$

$\Rightarrow x^r = o(e^x) \quad \square$

Satz: Für $r > 0$ ist $\ln(x) = o(x^r)$ wenn $x \rightarrow \infty$

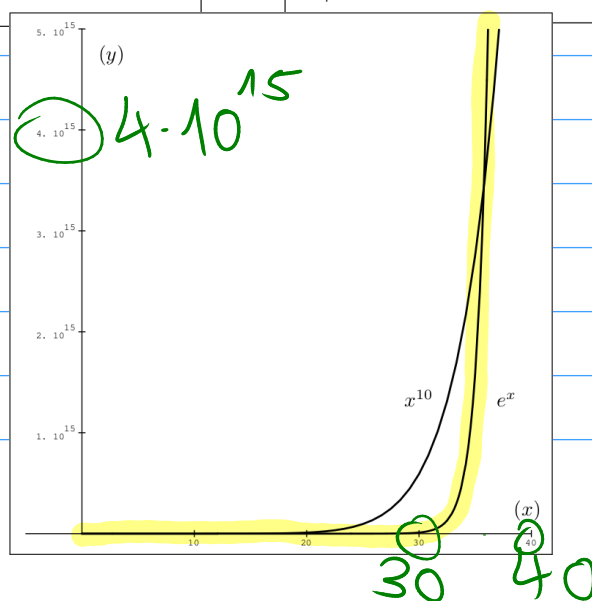
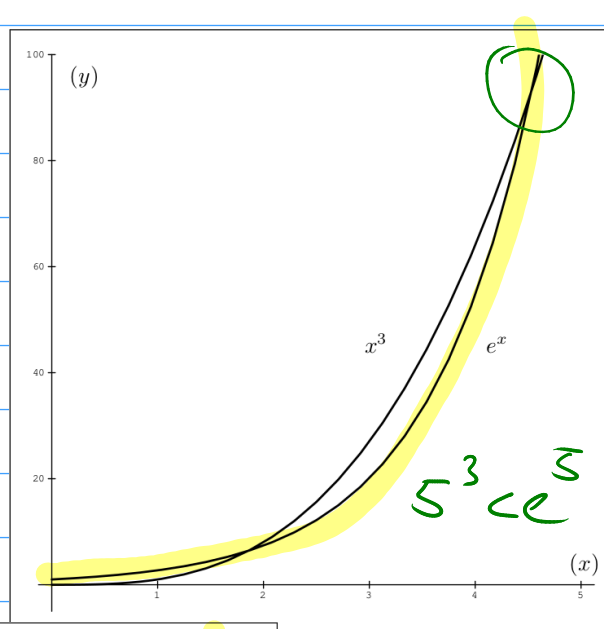
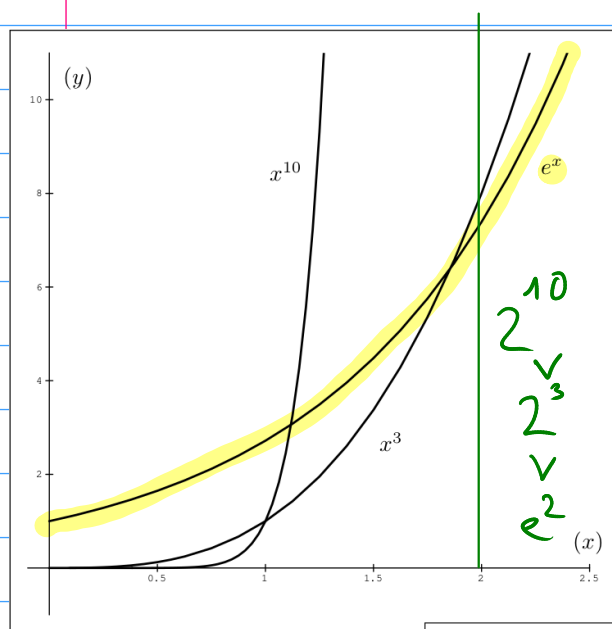
Beweis: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} \stackrel{B-4}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{r x^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-r}}{r} = 0.$ \square

Satz: Für $r > 0$ ist $e^{-x} = o(x^{-r})$ wenn $x \rightarrow \infty$
(e^{-x} geht schneller gegen 0 als x^{-r} .)

Beweis: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0.$ \square

Fazit:

- Exponentialfunktionen wachsen schneller als für $x \rightarrow \infty$ alle Potenzfunktionen
- Potenzfunktionen wachsen schneller als Logarithmen.



Verhalten von Funktionen bei Polen & Definitionslücken

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Falls $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ist $f(x) = o(g(x))$ wenn $x \rightarrow a^+$.

Satz: Für $r > 0$ gilt $\ln(x) = o(-x^{-r})$ wenn $x \rightarrow 0^+$

Beweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-x^{-r}} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{+r \cdot x^{-r-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r}{r} = 0, \quad \text{da } r > 0.$

Bsp: $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)$ wenn $x \rightarrow 0^+$, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1/(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

• $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$ bei $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/(1+x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty \quad \Rightarrow f(x) \neq o(g(x)) \text{ wenn } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \cdot (1+x) = 0, \text{ d.h. } g(x) = o(f(x)) \text{ wenn } x \rightarrow 0^+.$$

Landau-O, Anwendung in Informatik

Sei $f(n)$ die maximale Anzahl Rechenschritte, die ein Algorithmus benötigt, um die Eingabe mit n Einträgen zu bearbeiten.

Bsp: Sortiere die Liste (a_1, a_2, \dots, a_n) mit $a_i \in \mathbb{R}$ aufsteigend

Quick Sort: Benötigt in der Regel $\approx n \cdot \log n$ Rechenschritte

Def: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \leq A$ ist für ein $A \in \mathbb{R}$ oder $\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right|$ beschränkt oszilliert, dann ist $f(n) = O(g(n))$, Landau-O ("Oh", nicht "null")

Eigenschaften: $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

• Wenn $g(x) = a \cdot f(x) + b$ und $f(x) \rightarrow \infty$, $a \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{a \cdot f(x) + b} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$ und gleichzeitig $g(x) = O(f(x))$

• Faustregel: "o" ist "<" (es gilt z.B. $a < b$ & $b < c \Rightarrow a < c$)
 $f = o(g), g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$
 "O" ist " \leq " (es kann $a \leq b$ und $b \leq a$ gelten, wenn $a = b$)

II.7 Die zweite und höhere Ableitungen

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$$f \text{ diff'bar} \Rightarrow \text{Es gibt } f': D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f' \text{ diff'bar} \Rightarrow \text{Es gibt eine zweite Ableitung von } f,$$

$$f'': D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (f'(x))' = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

f ist zweifach diff'bar

Bsp: • $s(t)$ Ort zum Zeitpunkt t

$$\Rightarrow v(t) = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt} s(t), \text{ Geschwindigkeit}$$

zeitliche Ableitung

$$\Rightarrow a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t), \text{ Beschleunigung}$$

• $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$\Rightarrow f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

n -te Ableitung von f (nicht die Potenz!)

f ist n -fach diff'bar

• $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x, n \geq 1$

$$\Rightarrow f(x) \text{ ist also unendlich oft diff'bar}$$

bzw. glatt.

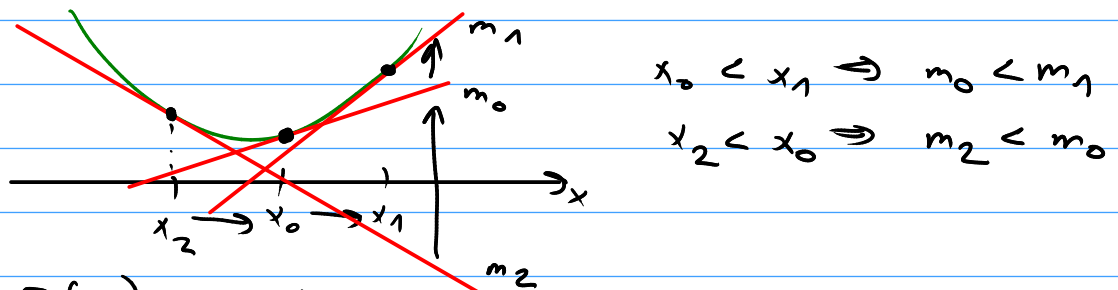
(x^n ist ebenfalls glatt.)

Weitere Begriffe für Funktionen

Bekannt: $f' > 0 \Rightarrow f$ strikt monoton wachsend $\Rightarrow f$ injektiv

Def: Wenn $f'' > 0$ für alle $x \in D(f)$, ist f **konvex**
 Wenn $f'' < 0$ für alle $x \in D(f)$, ist f **konkav**.

Anschaung: $f''(x) = (f'(x))' > 0$
 ↑
 Tangentensteigung wächst mit x



$\Rightarrow \Gamma(f)$ beschreibt eine Linkskurve, wenn der Graph von links nach rechts durchlaufen wird (mit wachsendem x).

f konkav $\Rightarrow \Gamma(f)$ beschreibt eine Rechtskurve mit wachsendem x .

Bsp: $f(x) := e^{-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = -e^{-x} < 0$$

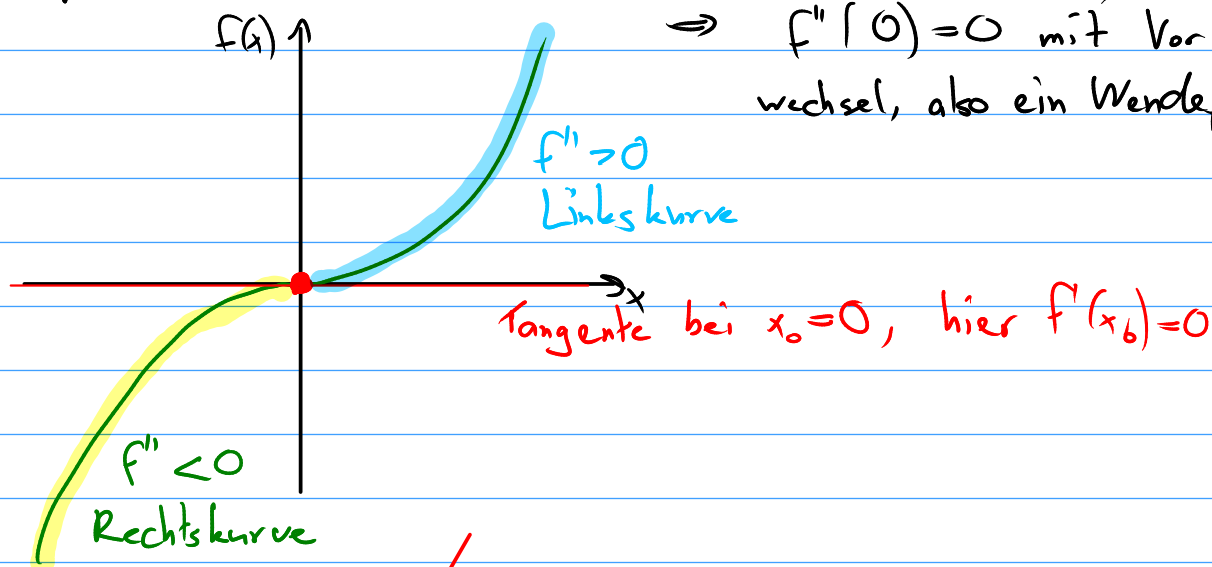
$\Rightarrow f$ strikt monoton fallend



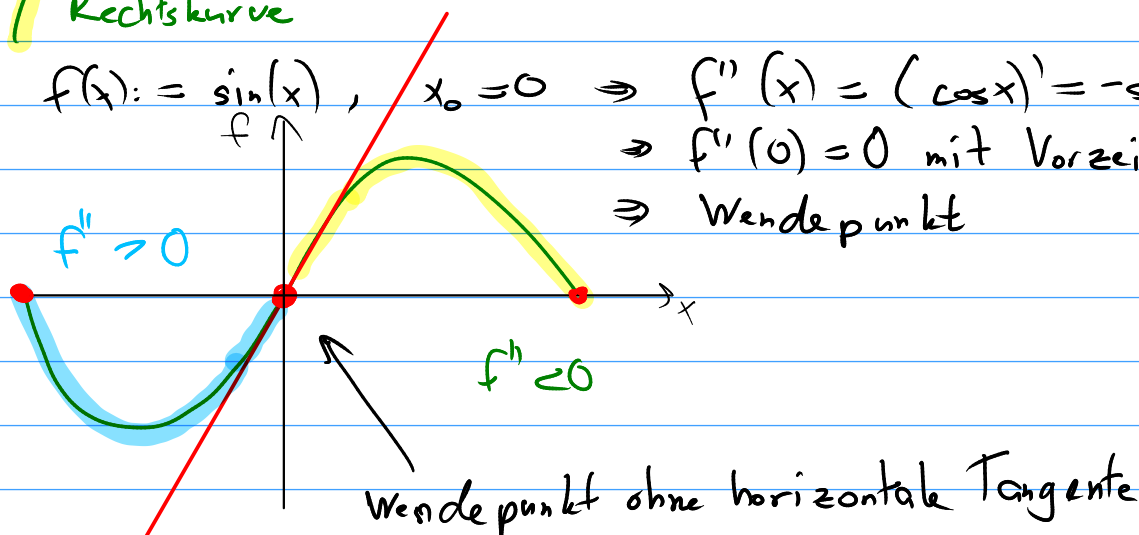
$\Rightarrow f''(x) = +e^{-x} > 0$, f ist konvex,
 aber gleichzeitig gilt $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ und f ist
 strikt monoton fallend.

Def: Wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' adS x_0 das Vorzeichen wechselt, dann ist x_0 ein **Wendepunkt** von f .
 \Rightarrow Krümmungsrichtung von $\Gamma(f)$ ändert sich in x_0 .
 $\Rightarrow x_0$ ist insbesondere **keine** lokale Extremalstelle, auch falls $f'(x_0) = 0$.

Bsp: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0 \Rightarrow f''(x) = (3x^2)' = 6x$
 $\Rightarrow f''(0) = 0$ mit Vorzeichenwechsel, also ein Wendepunkt.



$f(x) := \sin(x)$, $x_0 = 0 \Rightarrow f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$
 $\Rightarrow f''(0) = 0$ mit Vorzeichenwechsel
 \Rightarrow Wendepunkt



Satz: f n -fach diff'bar, $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$
 und $f^{(n)}(x) \neq 0$ für ein $x \in D(f)$ und

n gerade $\Rightarrow x$ ist eine lokale Extremalstelle

n ungerade $\Rightarrow x$ ist ein Wendepunkt

Bsp: $f(x) = x^n$, $x_0 = 0$, n gerade \rightarrow globale Minimalstelle
 n ungerade \rightarrow Wendepunkt
 jeweils bei $x_0 = 0$.

Denn: $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$
 und $f^{(n)}(0) = n! \neq 0$.

• $f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$

• $f(-1) = 0$, $f(x) > 0$ auf $(-1, \infty)$
 $f(x) < 0$ auf $(-\infty, -1)$

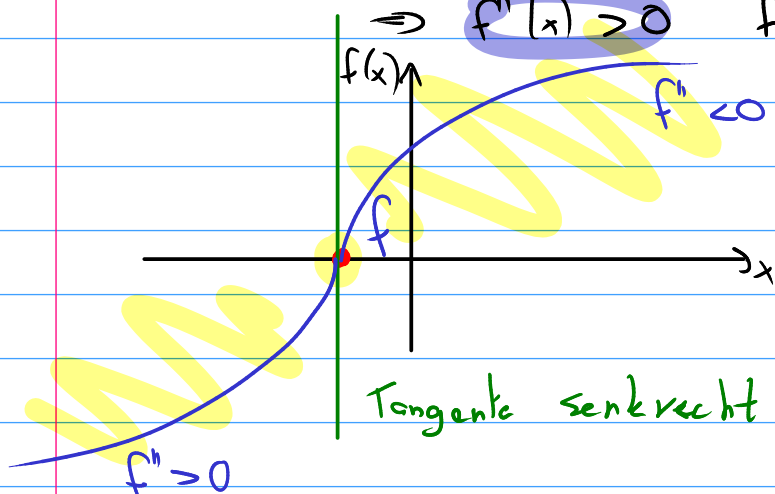
• $f'(x) = \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x+1}^2}$, $x \neq -1$

\Rightarrow f ist nicht diff'bar, da f' nicht für alle $x \in D(f)$ existiert

Aber: $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \infty$, Tangente ist "unendlich steil", also senkrecht.

• $f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (x+1)^{-5/3}$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ für $x < -1$, $f''(x) < 0$ für $x > -1$



Beispiele aus Anwendungen

i) $f(x) = e^{-x^2/2}$,

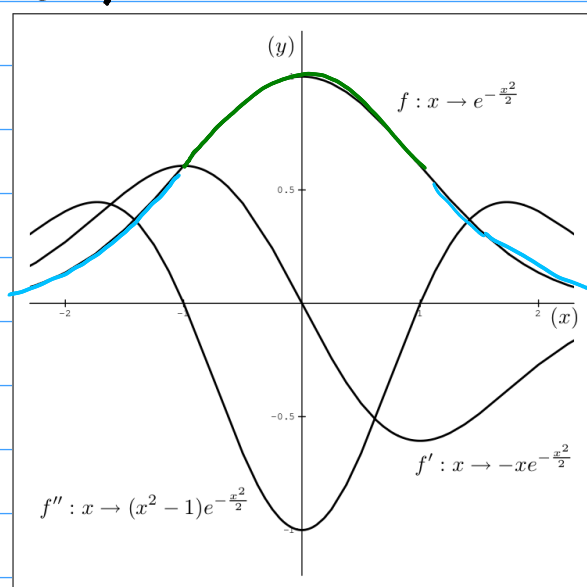
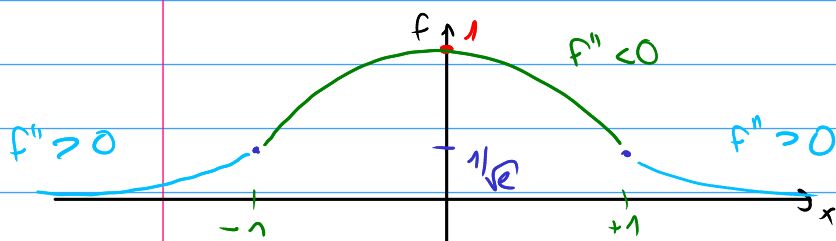
• Gauss'sche Fehlerkurve, Glockenkurve

- $D(f) = \mathbb{R}$, f ist gerade,
 $-\frac{x^2}{2} \leq 0$ für alle $x \Rightarrow W(f) = (0, 1]$
 Keine Nullstellen, aber $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

- $f'(x) = (-x) \cdot e^{-x^2/2} \Rightarrow$ Potentielle Extremalstelle
 bei $x = 0$. Da $f(0) = 1$ und $f(x) \leq 1$ für alle x ,
 ist $x = 0$ die globale Maximalstelle.

$f'(x) < 0$ für $x > 0 \Rightarrow$ Für $x > 0$ ist f strikt mon. fallend
 $f'(x) > 0$ für $x < 0 \Rightarrow$ Für $x < 0$ ist f strikt mon. wachsend.

- $f''(x) = -e^{-x^2/2} + (-x) \cdot (-x) \cdot e^{-x^2/2} = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2}$
 $\Rightarrow f''(\pm 1) = 0$, sonst keine Nullstellen
 $f''(0) < 0$, $f''(\pm 2) > 0$
 \Rightarrow Vorzeichenwechsel von f'' bei $x = \pm 1$,
 also zwei Wendepunkte.



Clicher: $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2(1 - \ln(x))}{x^2}$

\Rightarrow Wendepunkt bei $1 - \ln(x) = 0$
 $\Rightarrow \underline{x = e}$

ii) Newton'sche Mechanik: $F = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s}(t)$

Federkraft

$$F(t) = -k \cdot s(t)$$

\uparrow
Federkonstante, > 0

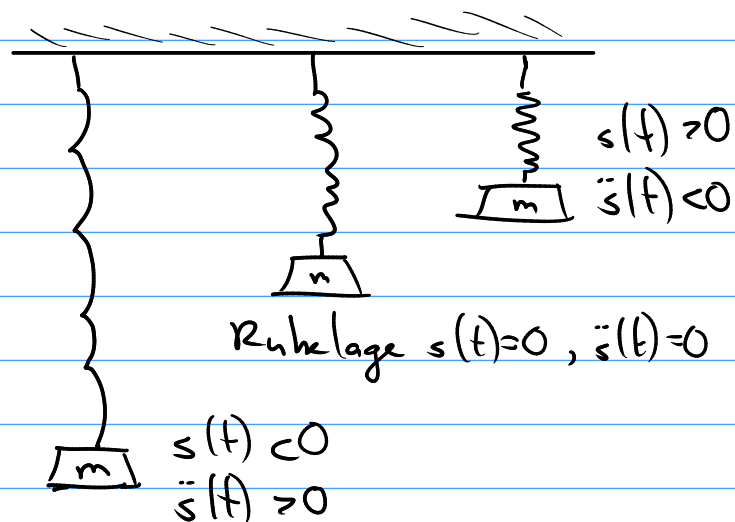
$$= m \cdot \ddot{s}(t)$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{s} + k \cdot s = 0$$

$$\text{Setze } \omega^2 := k/m$$

$$\Rightarrow \ddot{s} + \omega^2 \cdot s = 0,$$

DGL der harmonischen Schwingung



Kapitel VI \Rightarrow Lösungen haben die Form

$$(*) \quad s(t) = B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot \sin(\omega t), \quad B, C \in \mathbb{R}$$

Durch Einsetzen auch eine Lösung:

$$(**) \quad s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$$

DGL-Theorie: Jede Lösung hat die Form $(*)$! Widerspruch?
Behauptung: $(*)$ und $(**)$ sind für passende A, B, C, φ die gleiche Funktion.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (**) \quad s(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) \\ &= \underbrace{A \cdot \cos \varphi}_{=: B} \cdot \cos(\omega t) - \underbrace{A \cdot \sin \varphi}_{=: C} \cdot \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \text{für } (*) \end{aligned}$$

• (*) $s(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$

Setze $\tan \varphi = -C/B$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

und $A = \sqrt{B^2 + C^2}$

$$= B \cdot \sqrt{1 + C^2/B^2} = B \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$$

$$= B \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = B / \cos \varphi \quad || \cdot \sin \varphi$$

$$\Rightarrow A \cdot \sin \varphi = B \cdot \tan \varphi = B \cdot \left(-\frac{C}{B}\right) = -C$$

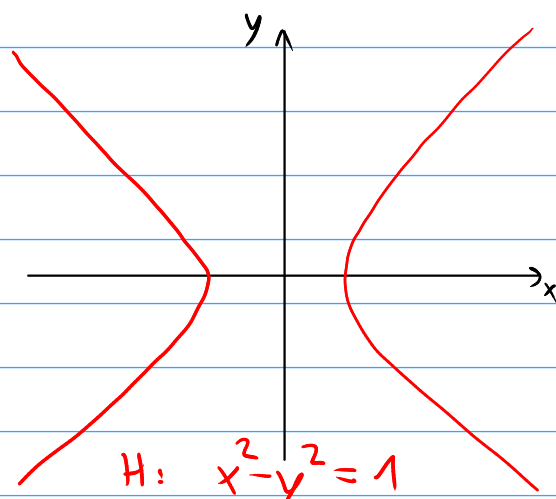
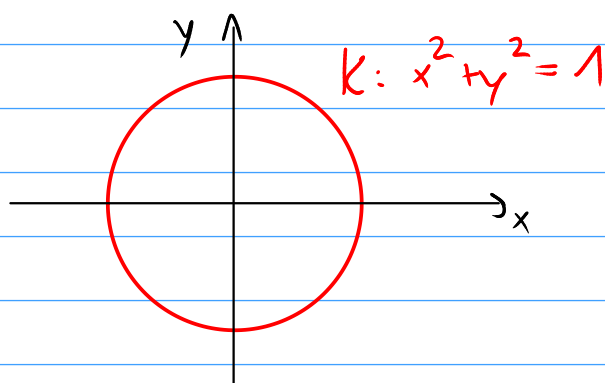
$$\Rightarrow B = A \cdot \cos \varphi, \quad C = -A \cdot \sin \varphi$$

(*) $\Rightarrow s(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$

$$= A \cos(\omega t) \cos \varphi - A \sin(\omega t) \sin \varphi = A \cos(\omega t + \varphi)$$

\Rightarrow Form (**)

II.8 Ebene Kurven



"Definition": Eine **ebene Kurve** ist eine "ein-dimensionale" Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 .

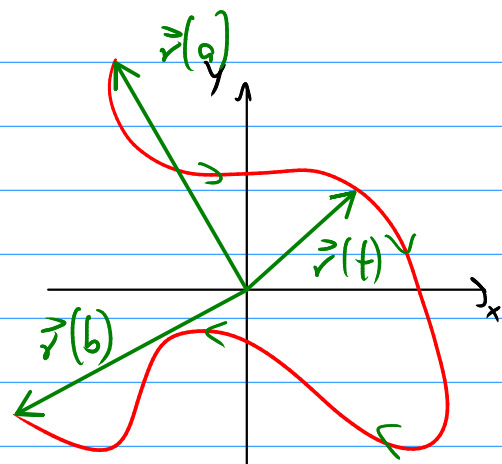
Definitionsmöglichkeiten für ebene Kurven:

I Parameterdarstellung:

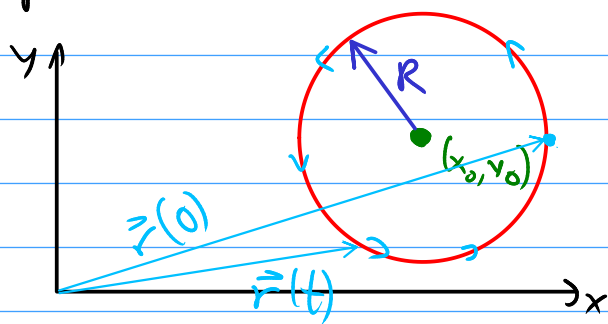
$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\Rightarrow K := \{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a, b] \}$$



Bsp: Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(x_0, y_0) =: \vec{r}_0$



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cos t \\ y_0 + R \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \vec{r}_0 + R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Physikalische Interpretation: $t \hat{=}$ Zeit

$\Rightarrow \vec{r}(t) \hat{=}$ Ort, wachsendes t beschreibt Bewegung

\Rightarrow Geschwindigkeit, Beschleunigung, Fliehkräfte berechenbar.

Andere Beschreibung für diesen Kreis:

Alle Punkte $(x, y) =: \vec{r}$, für die gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = R$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

II Implizite Darstellung

Beschreibung von K als Nullstellen einer Funktion $F(x, y)$:

Kreis von vorhin: $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$

$$\Rightarrow K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0 \},$$

implizite Darstellung von K .

Notation: $K: F(x, y) = 0$

Üblicherweise stellt man F nicht explizit auf und begnügt sich mit " $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ ".

F finden von $\vec{r}(t)$: Eliminiere t .

$$\text{Bsp: } x(t) = x_0 + R \cos t \Rightarrow$$

$$y(t) = y_0 + R \sin t \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{x - x_0}{R} \\ \sin t &= \frac{y - y_0}{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R} \right)^2 \quad || \cdot R^2$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\text{Bsp: } \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \sqrt[3]{y} = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt[3]{y}, \quad t \text{ eliminiert}$$

$$\begin{aligned} \text{Umschreiben als Polynom in } x, y: & \quad ()^6 \\ \Rightarrow & \quad x^3 = y^2 \\ \Rightarrow K: & \quad \underline{\underline{x^3 - y^2 = 0}} \end{aligned}$$

$$\text{Test durch Einsetzen: } (x(t))^3 - (y(t))^2 = t^6 - t^6 = 0 \quad \checkmark$$

III Explizite Darstellung:

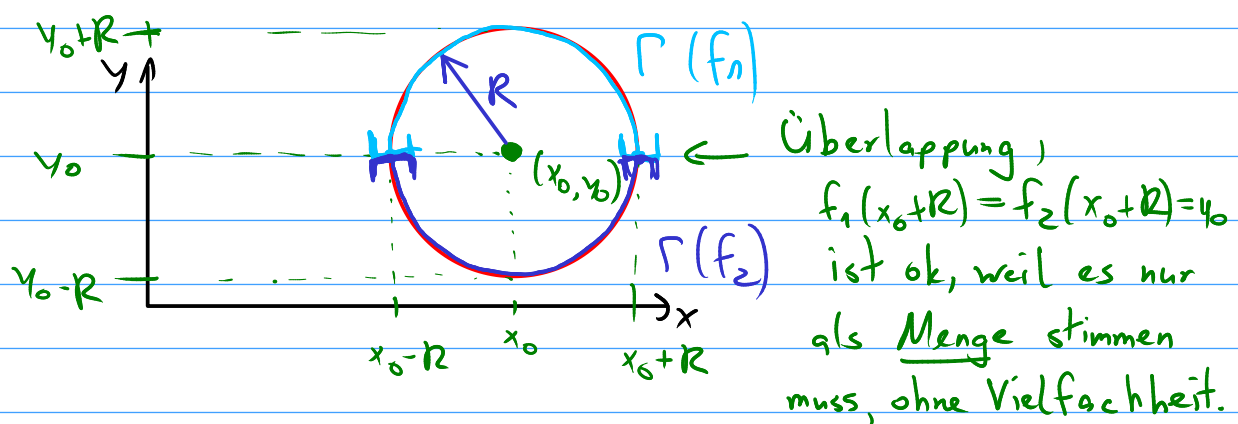
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Rightarrow y(x) = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

2 mögliche Vorzeichen \Rightarrow Definiere 2 Funktionen:

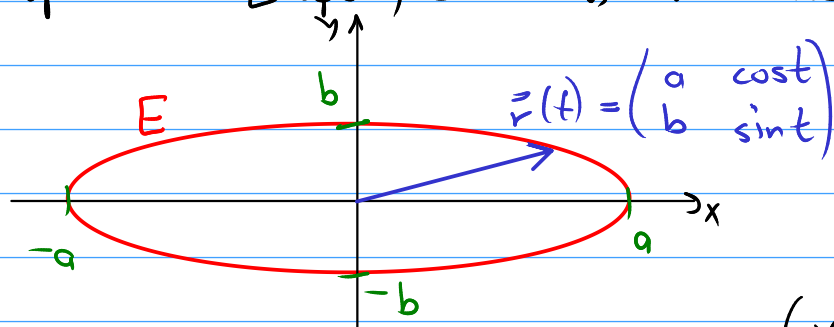
$$f_1(x) = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad D(f_1) = [x_0 - R, x_0 + R]$$

$$f_2(x) = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad D(f_2) = [x_0 - R, x_0 + R]$$

$\Rightarrow K = \Gamma(f_1) \cup \Gamma(f_2)$, explizite Darstellung



Beispiele: • Ellipse, zentriert, mit Halbachsenabschnitten $a, b > 0$



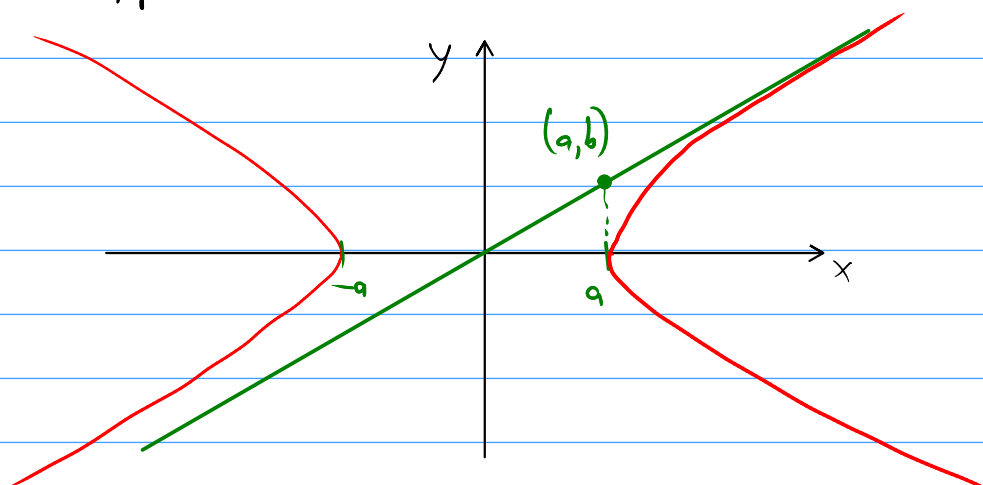
I Parameterdarstellung: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$

II Implizit: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

III Explizit: $f_1(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, f_2(x) = -f_1(x)$

$$D(f_1) = D(f_2) = [-a, a]$$

- Hyperbel mit x-Achsenabschnitt a und Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$



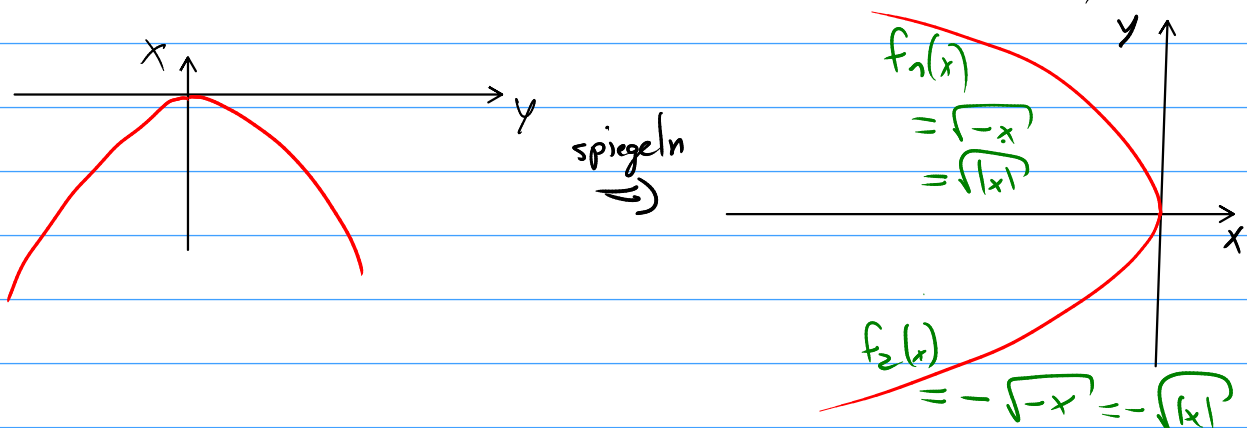
$$\text{I: } \vec{r}_{1,2}(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{II: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{III: } f_1(x) = b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad f_2(x) = -f_1(x)$$

$$D(f_1) = D(f_2) = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

- K: $x + y^2 = 0 \Rightarrow x = -y^2$. Betrachte als $x(y)$



\Rightarrow Benötigen 2 Funktionen zur expliziten Darstellung.

Übergänge $\text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III} \rightarrow \text{I}$

• $\text{I} \rightarrow \text{II}$: Eliminiere t

- $\text{II} \rightarrow \text{III}$: Gleichung auflösen nach y , aufteilen in mehrere Fkt.
- $\text{III} \rightarrow \text{I}$: Für einzelne Abschnitte: $\vec{r}(t) = (t, f(t))$,
evtl. t mit etwas Nützlicherem ersetzen.

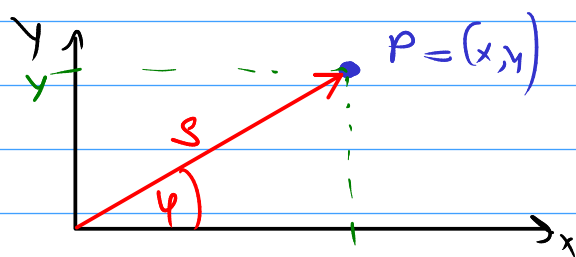
Bemerkungen: • Zu I: Verschiedene Parametrisierungen können die gleiche Kurve darstellen:

$$K = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 2]\} = \{(x(2t), y(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1]\}$$

(doppelte Durchlaufgeschwindigkeit)

- Die Übergänge sind nicht immer leicht zu finden und nicht immer eindeutig.

Polarkoordinaten



$$x = s \cos \varphi$$

$$y = s \sin \varphi$$

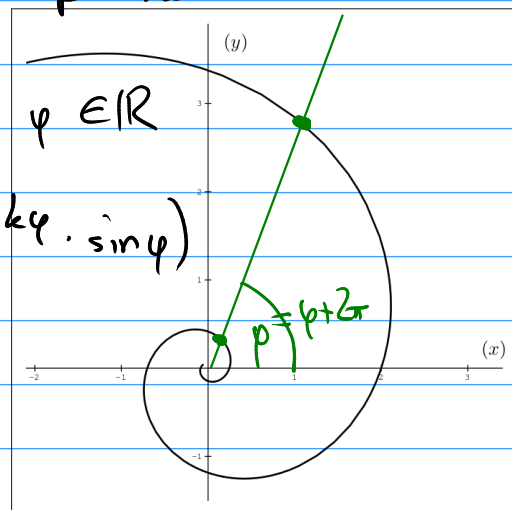
Wähle φ als Parameter für $s = s(\varphi)$
 \Rightarrow Parameterdarstellung $\vec{r}(\varphi) = (s(\varphi) \cdot \cos \varphi, s(\varphi) \cdot \sin \varphi)$
 $D(\vec{r})$ irgend ein Intervall

Themen: Bernoullispirale, Zykloide, Tangenten, Krümmung

Bsp: Bernoullispirale, logarithmische Spirale

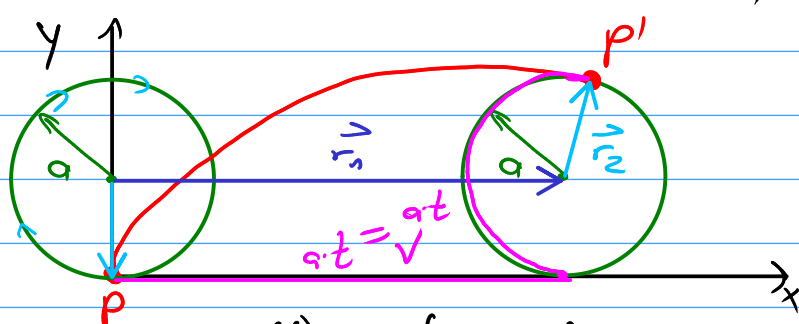
$$s(\varphi) = C \cdot e^{k \cdot \varphi}, \quad C, k > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\varphi) = (C \cdot e^{k\varphi} \cdot \cos \varphi, C \cdot e^{k\varphi} \cdot \sin \varphi)$$



Bsp: Zykloide

Bewegung eines Punkts auf dem Rand des rollenden Rads,
Radius a , Start bei $(0,0)$



2 Bewegungen:

- Radmittelpunkt, nach rechts
- P dreht um Radmittelpunkt

$$\vec{r}_1(t) = (at, a)$$

$$\vec{r}_2(t) = a \cdot (-\sin t, -\cos t)$$

Überprüfen: Ist der Weg am Boden gleich dem abgerollten
Radumfang? \checkmark

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} at - a \sin t \\ a - a \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parameterdarstellung der **Zykloide**

Varianten der Zykloide: • P nicht auf dem Rand, sondern
in Abstand b zum Kreismittelpunkt:

$$\vec{r}(t) = (at, a) + (-b \sin t, -b \cos t)$$

• $b > a$: **Verlängerte Zykloide**

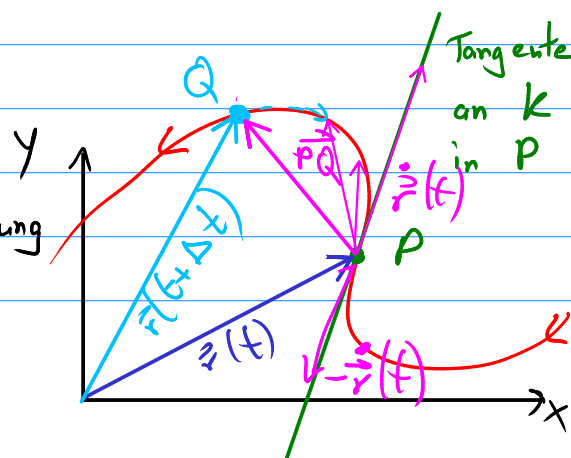
• $b < a$: **Verkürzte Zykloide**

• Rad bewegt sich innerhalb oder außerhalb eines Kreises:
Epi- und Hypozykloide

Tangenten

Sei K gegeben in Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$



Betrachte \vec{PQ} , wenn Q gegen P wandert (also: $\Delta t \rightarrow 0$)

$$\vec{PQ} = \underbrace{\vec{r}(t + \Delta t)}_{= \vec{OQ}} - \underbrace{\vec{r}(t)}_{= \vec{OP}}$$

Grenzwert $Q \rightarrow P$ bedeutet $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{PQ} = \vec{0}$.

Aber: Länge von \vec{PQ} ist nicht interessant, sondern die Richtung.

Betrachte stattdessen $\vec{PQ} / \Delta t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Ableitung } \dot{\vec{r}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{PQ}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t) \right) \end{aligned}$$

Bemerkung: $\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt tangential in Richtung wachsendes t
 $-\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt tangential in Richtung fallendes t .

$$\Rightarrow \text{Tangentensteigung: } \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

\Rightarrow Parameterdarstellung der Tangente an K im Punkt P :

$$\vec{OP} = \vec{r}(t), \quad t \text{ fix} \Rightarrow T: \vec{R}(s) = \vec{r}(t) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t), \quad s \in \mathbb{R} \\ \vec{R}(0) = \vec{r}(t) = \vec{OP}$$

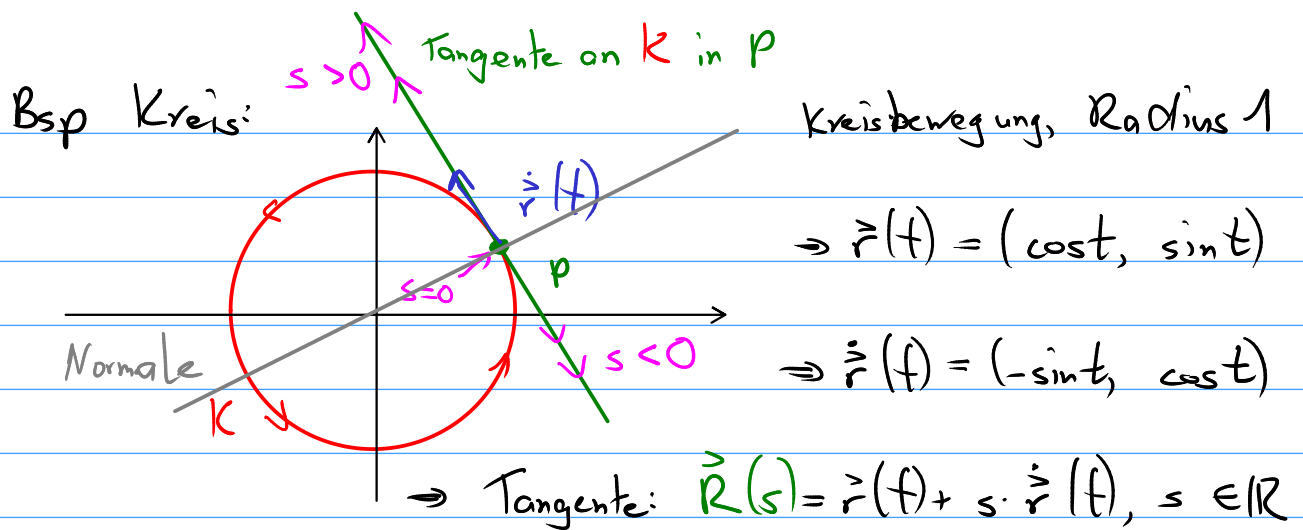
Bsp: Zykloide: $\vec{r}(t) = (at - as \sin t, a - a \cos t)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (a - a \cos t, a \sin t)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}(2\pi) = (0, 0), \text{ Ableitung stationär}$$

\Rightarrow Singulärer Punkt der Kurve

D.h.: Der Punkt P bewegt sich kurz nicht, K kann einen "Knick" haben, obwohl $\vec{r}(t)$ diff'bar ist.

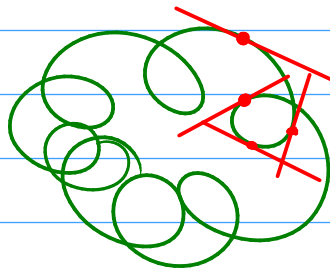


Normale steht senkrecht auf der Tangente, Schnittpunkt ist P

$$\Rightarrow \vec{S}(s) = \vec{r}(t) + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}}_{=:\vec{n}(t)} = \vec{r}(t) + s \cdot \vec{n}(t), s \in \mathbb{R}$$

Krümmung

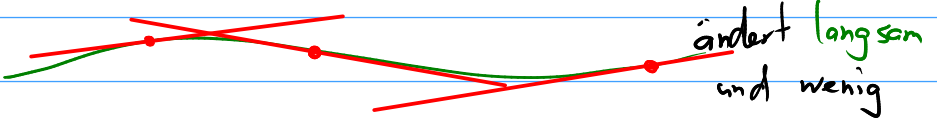
Grosse Krümmung:



Tangentensteigung:

ändert **schnell** und stark

Kleine Krümmung:



ändert **langsam** und wenig

Keine Krümmung:



immer gleich

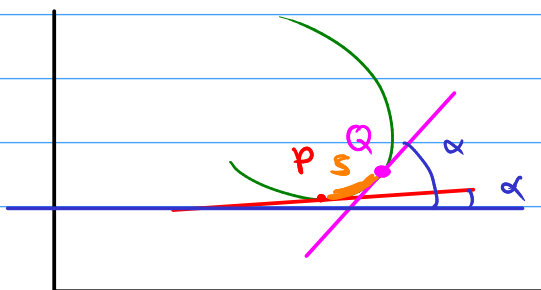
\Rightarrow Krümmung: Änderung des Steigungswinkels der Tangente
Bogenlänge

!!

$$k(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}}$$

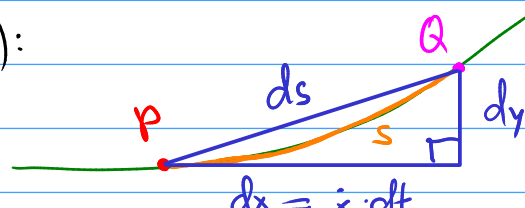
↑ unabhängig von Parametrisierung

Wie berechnet man α und \dot{s} ?



$$\begin{aligned} \bullet \tan(\alpha(t)) &= \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \Rightarrow \alpha(t) = \begin{cases} \arctan(\dot{y}/\dot{x}), & \text{falls } |\alpha| < \pi/2 \\ \arctan(\dot{y}/\dot{x}) + \pi, & \text{sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow \dot{\alpha}(t) &= \underbrace{\frac{1}{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2}}_{\substack{\text{äussere Abl.} \\ \arctan}} \cdot \underbrace{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2}}_{\substack{\text{innere Abl.} \\ \dot{y}/\dot{x}}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \end{aligned}$$

• $\dot{s}(t)$:



Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{s}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \text{Krümmung bei P mit } \vec{OP} = \vec{r}(t)$$

- Eigenschaften:
- $k(t) > 0 \Leftrightarrow \alpha$ wächst mit s (da $\dot{s} > 0$)
 \Leftrightarrow Linkskurve, wenn t wächst
 - $k(t) < 0 \Leftrightarrow \alpha$ fällt \Leftrightarrow Rechtskurve
 - $k(t) = 0$ mit Vorzeichenwechsel \Leftrightarrow Wendepunkt
 - $|k(t)|$ gross \Leftrightarrow enge Kurve
 - $|k(t)|$ klein \Leftrightarrow weite Kurve

Bsp: $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = (-\sin t, 2 \cdot \cos(2t))$$

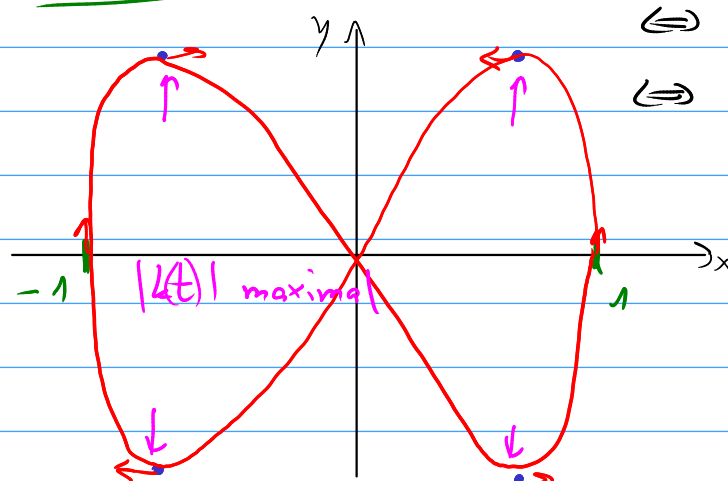
• Horizontale Tangenten: $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos(2t) = 0$
 $\Leftrightarrow t \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1 \right)$$

• Vertikale Tangenten: $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow -\sin t = 0$

$$\Leftrightarrow t \in \{0, \pi, 2\pi\}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = (\pm 1, 0)$$



Zwiebelkurve

17.11.2021 Themen: Krümmungskreis, Evolute, Beispiele

$$\text{Krümmung } k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Bsp: Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin t \\ \dot{y} &= b \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a \cos t \\ \ddot{y} &= -b \sin t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{(+b \sin t) \cdot (-a \sin t) + b \cos t \cdot (-a \cos t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$= \frac{ab \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)}{(\quad)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$t = 0, \text{ Startpunkt rechts: } k(0) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}}$$

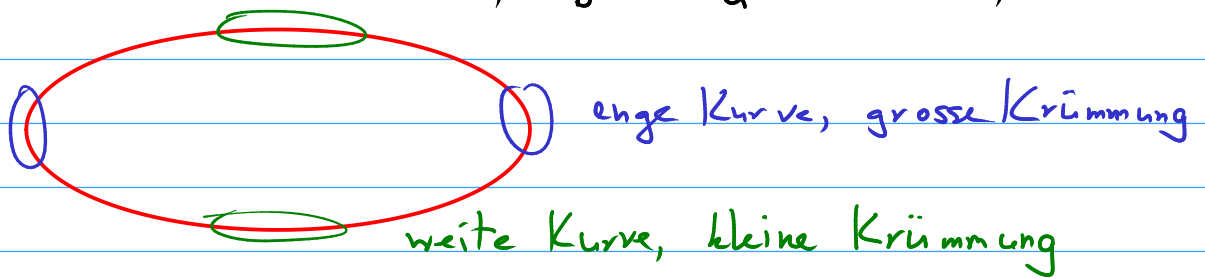
$$\begin{aligned} \text{Vorsicht: } (b^2)^{3/2} &= b^{2 \cdot 3/2} = b^3 \text{ für } b \geq 0 \\ \text{aber } ((-1)^2)^{3/2} &= (1)^{3/2} = 1 \\ &= (-1)^3 = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} > 0$$

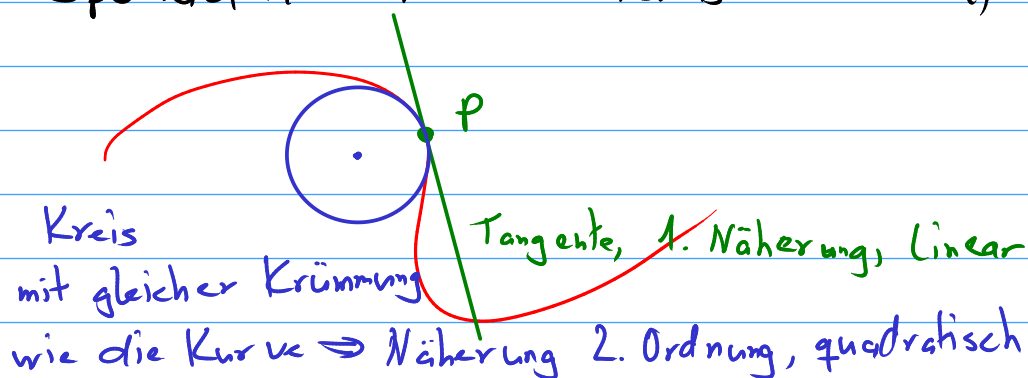
$$t = \pi/2, \text{ oberster Punkt: } k(\pi/2) = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}$$

$$\text{Annahme } a > b > 0 \Rightarrow a^3 > b^3 \quad \parallel : a^2 b^2$$

$$\Rightarrow k(0) = \frac{a}{b^2} > \frac{b}{a^2} = k(\pi/2)$$



Spezialfall: $a = b \Rightarrow$ Kreis! $\Rightarrow k(t) = \frac{1}{a}$ konst. ant.

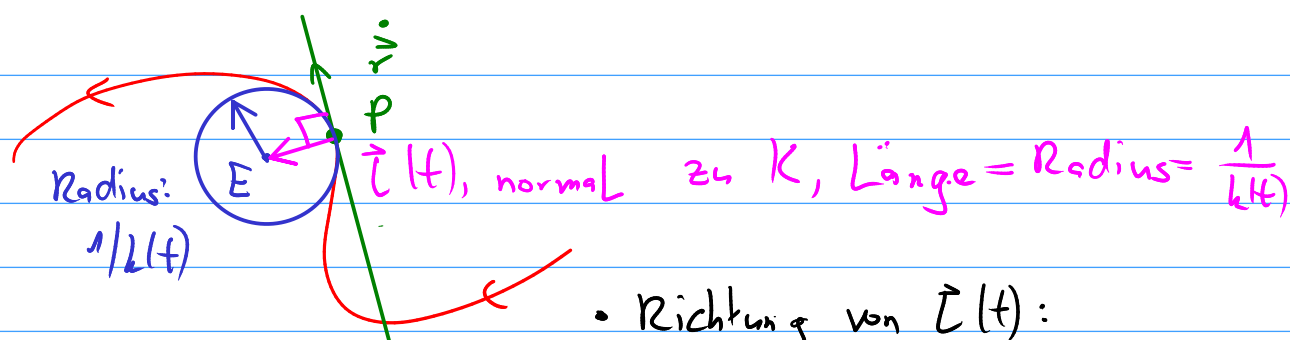


Def: Dieser Kreis ist der **Krümmungskreis / Schmiegkreis**.
 Radius = $1/k(t)$, wenn $k(t)$ die Krümmung ist.

Also: Grosser Radius \Leftrightarrow kleine Krümmung und umgekehrt.

Evolute

Gesucht: Abbildung $t \mapsto$ Mittelpunkt des Krümmungskreises



- Richtung von $\vec{l}(t)$:
 $\vec{m}(t)$, Normaleinheitsvektor,
d.h. $|\vec{m}(t)| = 1$, $\vec{m} \perp \dot{\vec{r}}$

$$\Rightarrow \vec{m}(t) = \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

- Länge von $\vec{l}(t)$: $|\vec{l}(t)| = \frac{1}{k(t)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{PE} = \vec{l}(t) &= \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} \\ &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}} \cdot \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = (-\dot{y}, \dot{x}) \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Parametrisierung der Evolute: } \vec{E}(t) &= \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} \\ &= \vec{r}(t) + \frac{\vec{m}(t)}{k(t)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}, \end{aligned}$$

die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte

Bsp: Zykloide: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at - a \sin t \\ a - a \cos t \end{pmatrix}$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= a - a \cos t = \dot{y} \\ \dot{y} &= a \sin t \end{aligned} &\Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{y} = a \sin t \\ \ddot{y} &= a \cos t \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{a \cos t \cdot (a - a \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t}{((a - a \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t)^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2}{a^3} \cdot \frac{\overset{=-1}{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}}{\underbrace{(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}^{3/2} = \frac{1}{a} \frac{\cos t - 1}{(2 - 2\cos t)^{3/2}}$$
$$= -\frac{1}{2^{3/2} \cdot a} \cdot \frac{1 - \cos t}{(1 - \cos t)^{3/2}} = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}},$$

da $1 - \cos t \geq 0$.

• $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = -\infty$, d.h. Evolute und Zykloide fallen bei $t=0$ zusammen.

$$\cdot \frac{\vec{n}(t)}{k(t)} = \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} = \cancel{+2a} \sqrt{\cancel{2(1 - \cos t)}} \cdot \frac{(+a \sin t, -a + a \cos t)}{\sqrt{\cancel{2a^2(1 - \cos t)}}}$$

$$= 2a (\sin t, \cos t - 1) \quad \left(= (0,0) \text{ für } t=0, \text{ wie gewünscht.} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{\vec{n}(t)}{k(t)} = \begin{pmatrix} at - a \sin t \\ a - a \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \sin t \\ 2a \cos t - 2a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} at + a \sin t \\ -a + a \cos t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} at \\ -a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vorwärtsbewegung} \\ \text{auf Höhe } -a}} + \underbrace{a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\text{Kreisbewegung}}$$

⇒ Das ist eine verschobene Zykloide.

Eigenschaften der Evolute: • lokale Extrema in $k(t)$
⇒ E hat eine Spitze
• Normalen von K sind Tangenten von E

Bsp: Bernoullispirale: $s(\varphi) = C \cdot e^{k\varphi}$, fixe Parameter C, k ,
in Polarkoordinaten

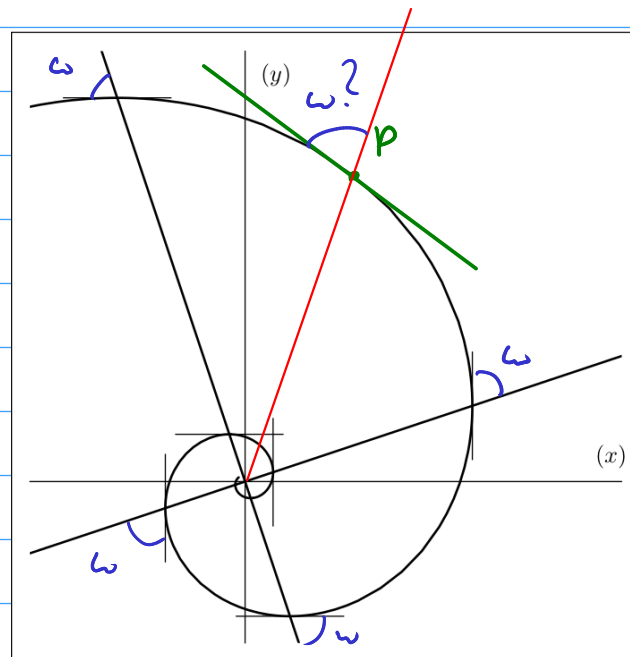
$$\Rightarrow \vec{r}(\varphi) = C \cdot e^{k\varphi} \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi)$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(\varphi) = (C \cdot k \cdot e^{k\varphi} \cdot \cos \varphi + C \cdot e^{k\varphi} \cdot (-\sin \varphi), \\ C \cdot k \cdot e^{k\varphi} \cdot \sin \varphi + C \cdot e^{k\varphi} \cdot \cos \varphi)$$

$$= C \cdot e^{k\varphi} \cdot (k \cdot \cos \varphi - \sin \varphi, k \cdot \sin \varphi + \cos \varphi)$$

• Horizontale Tangenten: $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow k \cdot \sin \varphi + \cos \varphi = 0$
 $\Leftrightarrow \tan \varphi = -1/k$

• Vertikale Tangenten: $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow k \cdot \cos \varphi - \sin \varphi = 0$
 $\Leftrightarrow \tan \varphi = k$

⇒ Diese Punkte tauchen abwechselnd im Abstand $\pi/2$ auf.



Vermutung: ω , der Winkel zwischen Tangente und Ortsvektor, ist konst. ant.

$$\cos \omega = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{|\vec{r}| \cdot |\dot{\vec{r}}|} = \frac{(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot (k \cos \varphi - \sin \varphi, k \sin \varphi + \cos \varphi)}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + (k \sin \varphi + \cos \varphi)^2}}$$

$$= \dots = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{für alle } \varphi, \quad \text{d.h. } \omega \text{ ist konstant}$$

• Die Evolute der Bernoullispirale ist wiederum eine Bernoullispirale, nur gedreht.