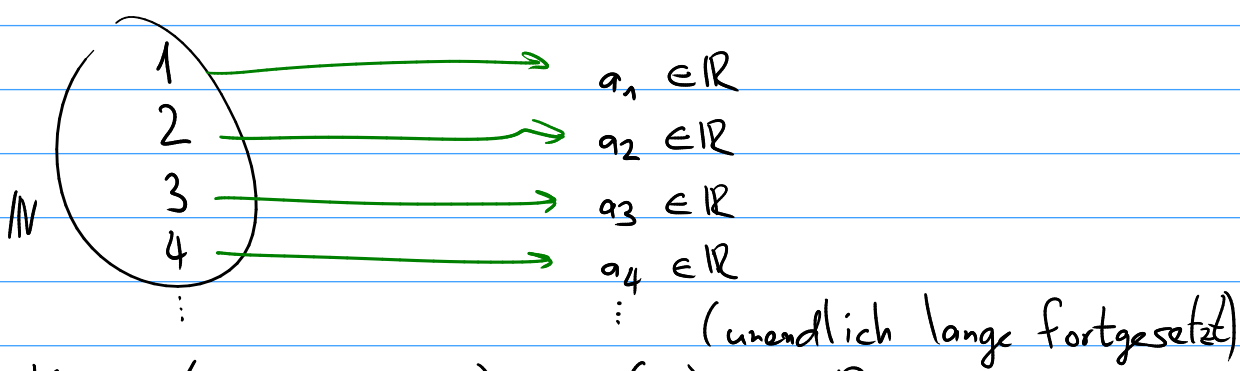


I Funktionen

I.1 Folgen, Konvergenz

Definition: Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in die reellen Zahlen \mathbb{R} .



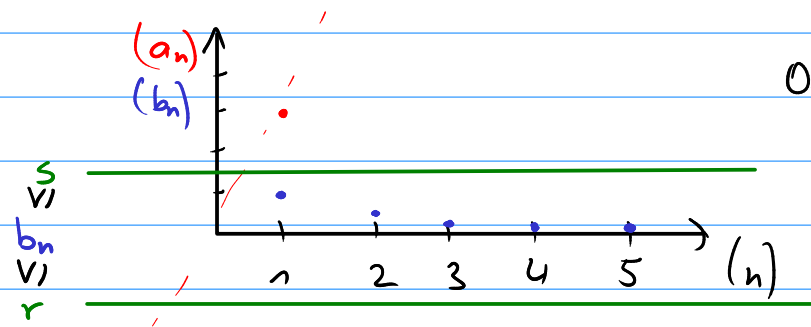
Notation: $(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_n \subset \mathbb{R}$
↑ Variable, Index
↑ Teilmenge

Beispiele:

$a_n := -2 + 5n, \quad n \geq 1$
 $\Rightarrow a_1 = -2 + 5 \cdot 1 = 3$
 $a_2 = -2 + 5 \cdot 2 = 8$
 $a_3 = -2 + 5 \cdot 3 = 13$
 \vdots
18
23

wird grösser wenn n wächst

$b_n := 1/n, \quad n \geq 1$
 $\Rightarrow b_1 = 1, \quad b_2 = 1/2, \quad b_3 = 1/3, \dots$



Optisch klar:

$a_n \rightarrow \infty$
 $b_n \rightarrow 0$

$$c_n := 1 \stackrel{b_1}{=} 1, \quad c_{n+1} := \frac{1}{\frac{1}{c_n} + 1}$$

Was ist c_{1000} ? Wähle $n = 999$

$$\Rightarrow c_{1000} = \frac{1}{\frac{1}{c_{999}} + 1} = ???$$

Fange bei c_2 an: Mit $n = 1$ ist

$$c_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{c_n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{1} + 1} = \frac{1}{2} = b_2$$

$$c_3 = c_{2+1} = \frac{1}{\frac{1}{c_2} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{1/2} + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = b_3$$

$$c_4 = c_{3+1} = \frac{1}{\frac{1}{c_3} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{1/3} + 1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = b_4$$

Vermutung: $c_n = b_n = 1/n$

Wenn $c_n = 1/n$ für ein bestimmtes n gilt,
dann ist $c_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{c_n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{1/n} + 1} = \frac{1}{n+1} = b_{n+1}$

Da $c_1 = b_1 = 1 = 1/1$, ist $b_2 = c_2$, $b_3 = c_3, \dots$
 $b_n = c_n, \dots$ für alle $n \geq 1$.

Def(inition): $(c_n)_n$ ist **rekursiv**, wenn das Glied c_n von den vorherigen Gliedern c_{n-1}, c_{n-2}, \dots abhängt.

B(ei)sp(iel): Sei $x > 0$ eine reelle Zahl.

Definiere $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{x}{a_n} \right)$

Für $x = 1$ ist $a_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

\Rightarrow Die Folge ist für $x = 1$ **konstant**,

d.h. $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge ist rekursiv, da man zur Berechnung von a_{n+1} bereits a_n kennen muss.

Wir werden später zeigen: $a_n \rightarrow \sqrt{x}$.

Def: Eine Folge (a_n) ist **beschränkt**, wenn es $r, s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $r \leq a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
D.h.: Das Bild ist in einem endlich breiten, waagerechten Streifen enthalten.

Bsp: • (b_n) mit $b_n = 1/n$ ist beschränkt.

- (a_n) mit $a_n = -2 + 5^n$ ist nicht beschränkt bzw. **unbeschränkt**.
(Es gilt zwar $0 \leq a_n$ für alle n , aber es gibt kein $s \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq s$ für alle n , da a_n beliebig gross wird.)

Def: Eine Folge (a_n) ist **(strikt) monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Analog: **(strikt) monoton fallend** mit $a_n \geq a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$.

- (a_n) mit $a_n = -2 + 5^n$ ist strikt monoton wachsend
- (a_n) mit $a_n = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ist konstant, d.h. $a_n = 1$ für alle n .
 \Rightarrow monoton wachsend und monoton fallend, aber jeweils nicht strikt.

24.09.2021 Themen: Nullfolge, Konvergenz, Grenzwert, geometrische Folge, Reihe, geometrische Reihe

Def: (a_n) ist eine **Nullfolge**, falls es zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Glieder a_{m+k} , $k \in \mathbb{N}$, gilt: $|a_{m+k}| < \varepsilon$.

\Rightarrow Die Folgenglieder a_n werden im Betrag beliebig klein und dann auch nicht wieder gross.

Bsp: • $a_n := 1/n$ ist eine Nullfolge, denn: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > 1/\varepsilon$

→ Wähle $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$.

⇒ $|a_{m+k}| < \varepsilon$ für alle $k \geq 0$.

⇒ (a_n) konvergiert gegen 0.

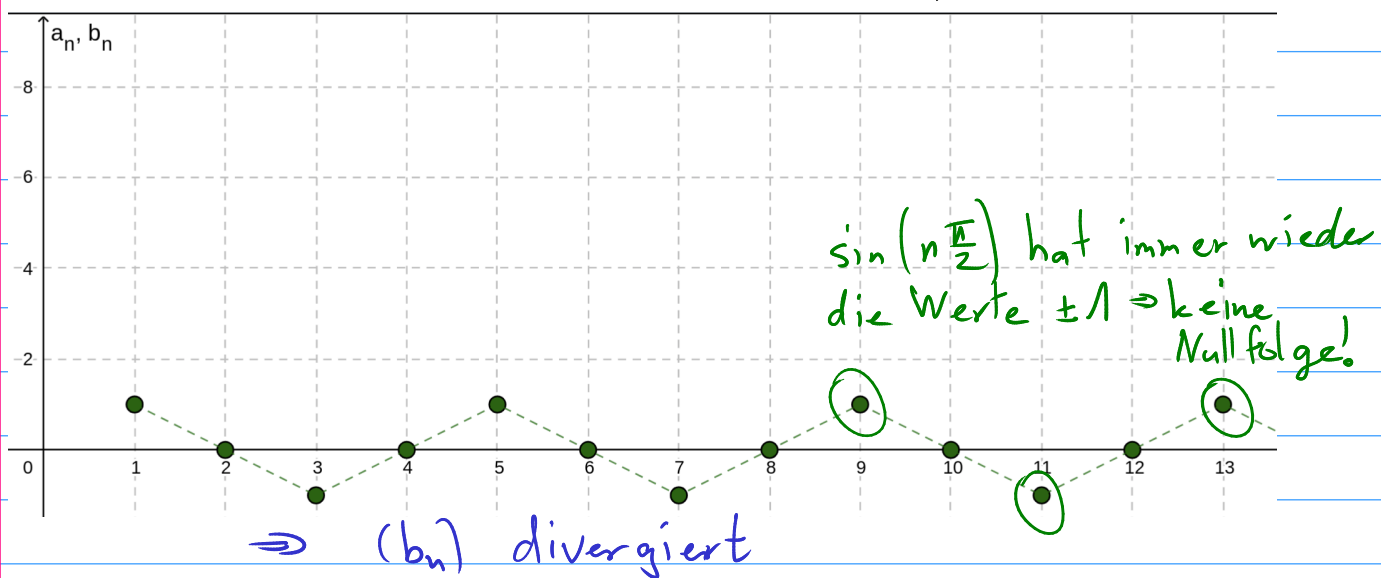
• $b_n := \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, d.h.

$$b_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

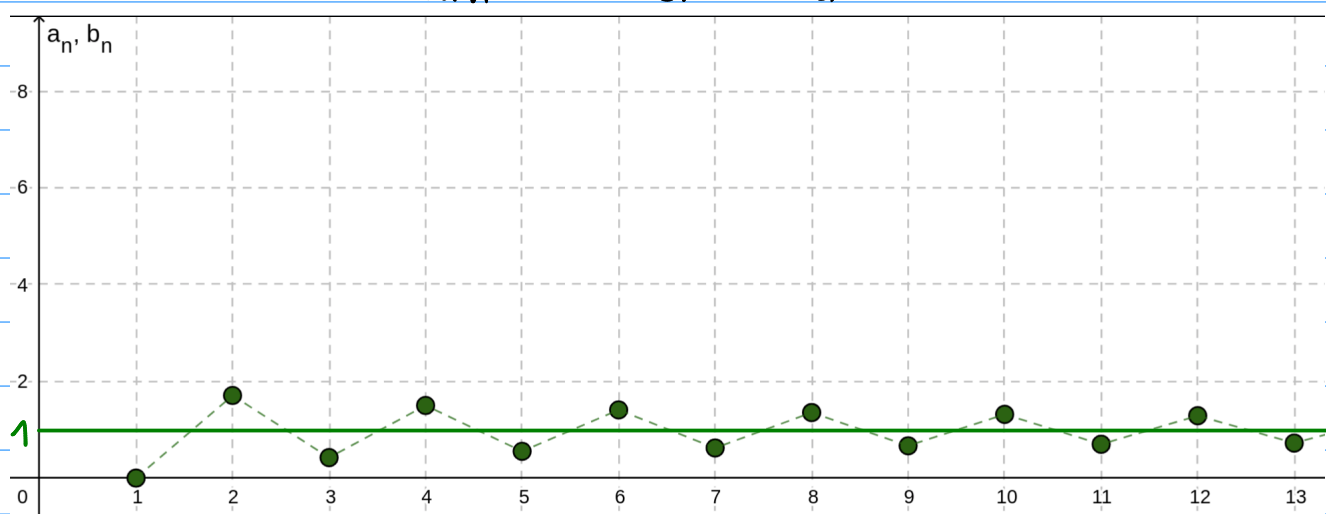
$$b_2 = \sin(\pi) = 0$$

$$b_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$b_4 = \sin(2\pi) = 0$$



• $c_n := 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist keine Nullfolge, aber die Werte nähern sich 1 an.



Aber: $(c_n - 1)$ als Folge ist eine Nullfolge!
 ⇒ (c_n) konvergiert gegen 1.

Def: Die Folge (a_n) **konvergiert** gegen den **Grenzwert** bzw. **Limes** a , falls die Folge $b_n := a_n - a$ eine Nullfolge ist.

Anders ausgedrückt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein m , s.d. für alle $k \geq 0$ gilt: $|a_{m+k} - a| < \varepsilon$.

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder auch $a_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} a$ optional

Sprechweise: " (a_n) konvergiert gegen a ."

Falls (a_n) nicht konvergiert, ist (a_n) **divergent** bzw. (a_n) **divergiert**.

Eigenschaften:

- Konvergente Folgen sind beschränkt.
- Unbeschränkte Folgen sind divergent.
- Eine Folge hat genau 0 oder 1 Grenzwert, nie 2 oder mehr.

Satz: Ist eine Folge monoton wachsend oder fallend und dazu beschränkt, dann ist sie konvergent.

Bsp: $a_{n+1} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

wobei $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (und $1! = 1$, $0! = 1$)

• $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$, d.h. (a_n) ist monoton wachsend.
($\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$)

• $n! = \underbrace{n}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\geq 2} \cdot \dots \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{\geq 2} \cdot 1 \geq 2^{n-1} \cdot 1$

$\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$

$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} =: c_n$
 (c_n) ist eine Folge. Wenn (c_n) beschränkt ist
 und $0 \leq a_n \leq c_n$ gilt, ist auch (a_n) beschränkt.

$$\begin{aligned}
 \frac{c_n}{2} &= c_n - \frac{c_n}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots + 0 - \frac{1}{2^n} \\
 &= 3/2 - \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$\Rightarrow 0 \leq c_n < 3$ für alle $n \geq 1$, d.h. (c_n) ist beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt.

Satz $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent.

Es gilt tatsächlich: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e = 2.718\dots$, Eulersche Zahl

Bsp: $b_{n+1} := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$\cdot b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow b_n < b_{n+1}$ für alle n
 $\Rightarrow (b_n)$ ist strikt monoton wachsend
 $\Rightarrow (b_n)$ ist monoton wachsend.

$$\begin{aligned}
 \cdot b_{2n} - b_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Wähle $n = 2^m$.

$$b_1 = 1, \quad b_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad b_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{17}{6}$$

$\xrightarrow{\text{Index} \cdot 2} \quad \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 2$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow b_8 &= b_{2^3} \geq b_{2^2} + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} \\
 b_{16} &= b_{2 \cdot 8} \geq b_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\
 \vdots \\
 b_{2^m} &\geq b_{2^{m-1}} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Die b_{2m} werden beliebig gross
 $\Rightarrow (b_n)$ unbeschränkt, d.h. (b_n) divergiert.

Rechenregeln für Grenzwerte: Seien $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ konvergente Folgen und $b \neq 0$. Dann gilt:

$$a_n + b_n \rightarrow a + b$$

$$a_n - b_n \rightarrow a - b$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$a_n / b_n \rightarrow a / b$$

Bsp: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n} \cdot \frac{2n+7}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 7/n}{1 - 1/n} \xrightarrow{2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1} 2$
 Rechenregeln $\frac{2}{1} = 2$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 + 3n^2 + 2}{-2n^4 + 5n^3 - n} \cdot \frac{1/n^4}{1/n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 3/n^2 + 2/n^4}{-2 + 5/n - 1/n^3} = -\frac{7}{2}$

Def: Eine Folge (a_n) mit $a_0 \neq 0$, $a_{n+1} = q \cdot a_n$ für ein festes $q \in \mathbb{R}$ und alle n heisst **geometrisch**. ↗ Strich zur Unterscheidung von q

Explizite Form: $a_n = q^n \cdot a_0$

Für $|q| < 1$ ist (a_n) eine Nullfolge, da $|q^n| \rightarrow 0$

Def: Gegeben eine Folge (a_n) , sei

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n =: \sum_{k=0}^n a_k,$$

die Summe von $k=0$ bis n von a_k

(s_n) ist eine Folge, genannt die **Reihe** zur Folge (a_n)

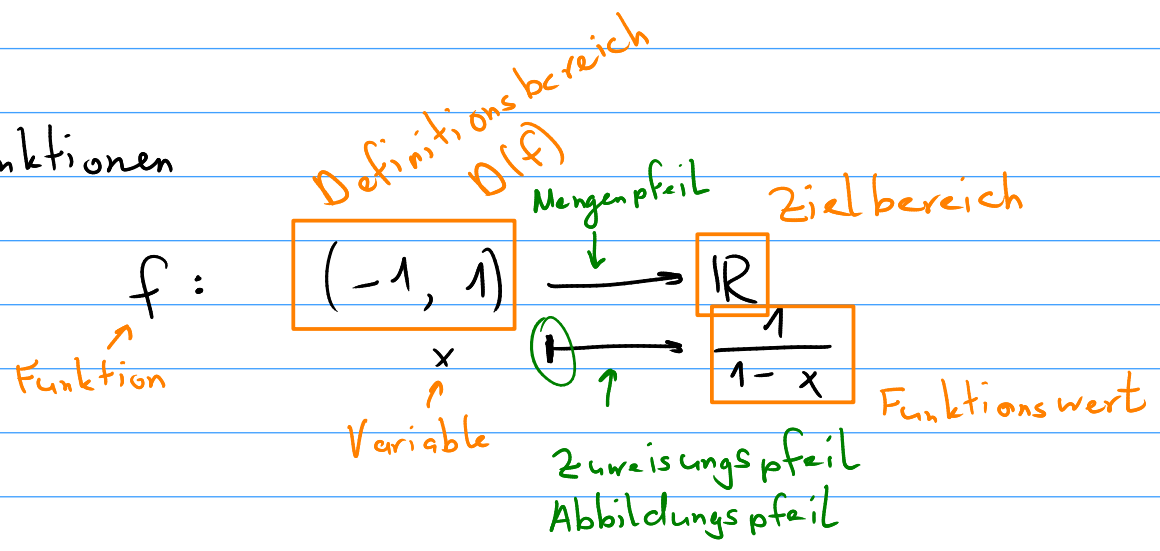
Bsp: $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$ (Konvention: $0! = 1$)
 $\Rightarrow s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
 (s_n) konvergiert gemäss voriger Rechnung

• Für ein fixes $x \neq 0$ und $b_n := x^n$ ist

$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$ die **geometrische Reihe**.

(s_n) konvergiert gegen $\frac{1}{1-x}$ wenn $|x| < 1$
und divergiert wenn $|x| \geq 1$.

I.2 Funktionen



Manchmal in aller Kürze: $f(x) := \frac{1}{1-x}$
 $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$

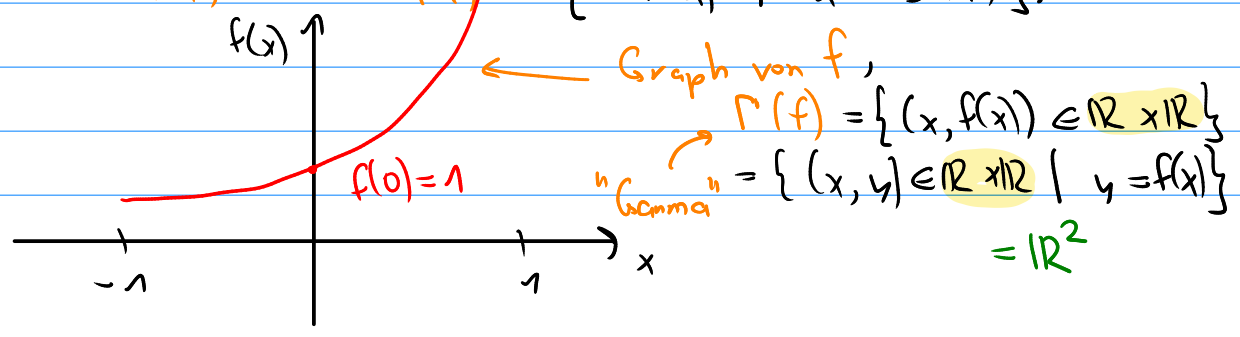
Wenn nichts anderes angegeben ist, ist mit $D(f)$ der **maximal mögliche** Definitionsbereich gemeint.

Hier: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Für $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ist also
immer $x \in (-1, 1) \Rightarrow 1-x \in (0, 2) \Rightarrow \frac{1}{1-x} \in (\frac{1}{2}, \infty)$

Falls $y \in (\frac{1}{2}, \infty)$, gibt es ein $x \in (-1, 1)$ mit $y = \frac{1}{1-x} = f(x)$
 $\Rightarrow (\frac{1}{2}, \infty)$ ist der **Wertebereich** / das **Bild** von f .

$W(f) := \text{Im}(f) := \{ f(x) \mid x \in D(f) \}$.



$A \times B$ ist das **kartesische Produkt** der Mengen A, B :
 $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A, b \in B$

Definition der Intervalle für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Bsp: $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$ $\Rightarrow D(f) = [-1, \infty)$
 $W(f) = [0, \infty)$

Wie können Funktionen definiert werden?

(i) Wertetabelle

x	x_1	x_2	\dots	x_n	$D(f)$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$	$W(f)$

Sinnvoll, wenn $D(f)$ endlich ist und es keine schöne Formel für f gibt.

(a_n) Folge \Rightarrow unendliche Tabelle
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

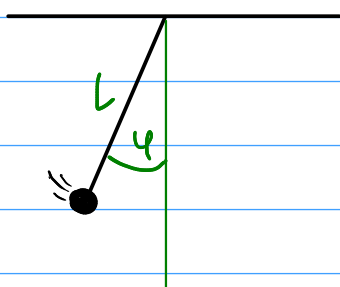
n	1	2	3	\dots
$f(n)$	a_1	a_2	a_3	\dots

(ii) Formel, **explizite**

Direkte Rechenvorschrift, z. B. $f(x) := \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$
 Vorsicht: Kann trotzdem kompliziert sein: $f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(iii) Lösung einer Gleichung, **implizit**

Bsp: Differentialgleichung des mathematischen Pendels



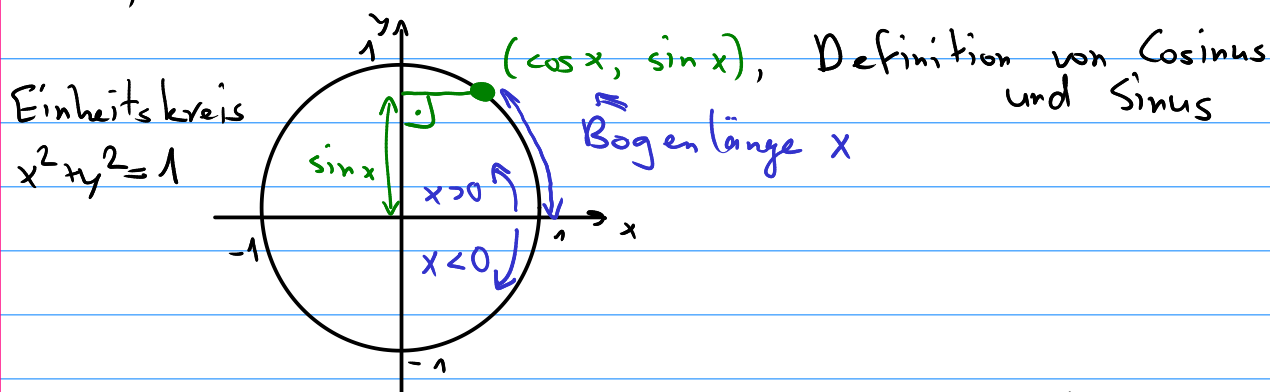
Wie verändert sich φ mit der Zeit t ?

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{L} \cdot \sin(\varphi(t)) = 0$$

\nwarrow Erdbeschleunigung
 \nwarrow Pendellänge

Diese Gleichung lässt sich nicht elementar lösen, aber sie definiert $\varphi(t)$!

(iv) Geometrische Definition



- Eigenschaften:
- Umfang $= 2\pi \Rightarrow \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
 $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
 - $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ da $(\cos(x), \sin(x))$ auf Kreis.
 - $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
 - $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
 - $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$
 - $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$
 - Spezielle Werte: Bogenlänge 0 $\Rightarrow (1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$
 Bogenlänge $\frac{\pi}{2} \Rightarrow (0, 1) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$

Bsp für Funktionen mit anderem Zielbereich \mathbb{R}

- $f: t \mapsto \vec{a} + t \cdot \vec{n}$, wobei $\vec{a}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren sind
 \Rightarrow Bild ist eine Gerade im Raum
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $g: t \mapsto (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t), \quad a, b > 0$
 \Rightarrow Zielbereich \mathbb{R}^2

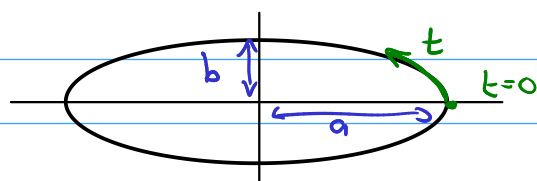
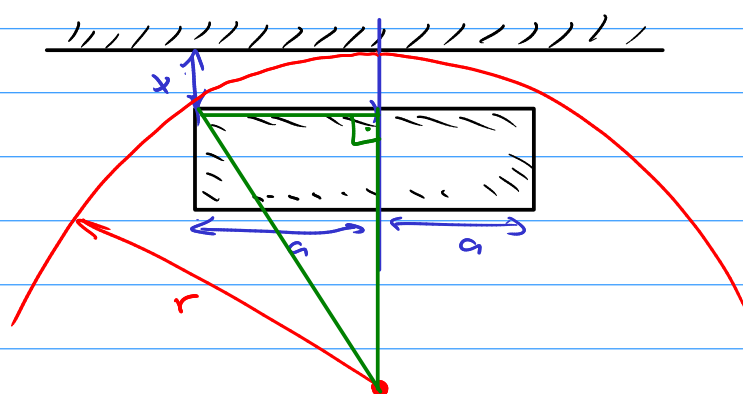


Bild ist eine Ellipse mit Halbachsen a, b

- Bsp im Skript Roboterarm

- Planung eines Gleises



Wie gross muss der Kurvenradius r mindestens sein, dass ein Gleis in Abstand x zwischen Gebäuden der Länge $2a$ Platz hat?

Pythagoras: $r^2 = a^2 + (r-x)^2$

$\Rightarrow r = \frac{a^2 + x^2}{2x} =: r(a, x)$, Funktion in zwei Variablen

$D(r) = \underset{a}{(0, \infty)} \times \underset{x}{(0, \infty)}$

Themen: Eigenschaften von Funktionen, elementare Funktionen, Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit, Definitionslücken & stetige Fortsetzung

Eigenschaften von Funktionen:

- Wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$ gilt und $D(f)$ symmetrisch ist bzgl. 0, ist f **gerade**.

Bsp: $\cos x, x^2, x^4, |x|$.

- Wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$ gilt, ist f **ungerade**.

Bsp: $\sin x, x, x^3$

- Wenn aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt, ist f **monoton wachsend**. Wenn gar $f(x_1) < f(x_2)$ immer gilt, dann ist f **strikt monoton wachsend**.
 - Analog für $f(x_1) \geq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f **(strikt) monoton fallend**.
- Bsp: x und x^3 sind strikt monoton wachsend.

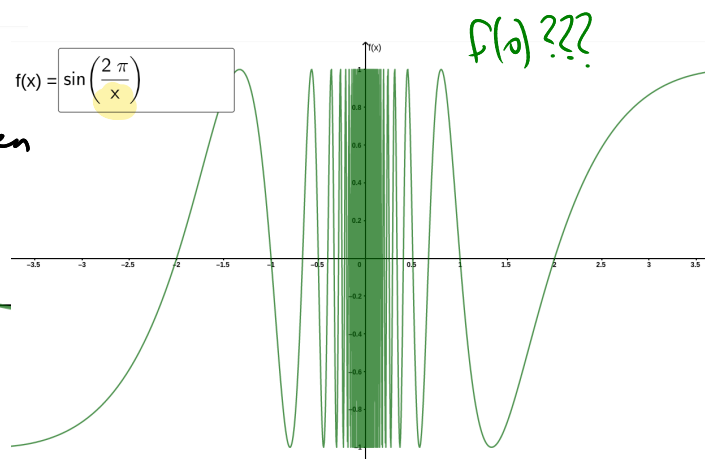
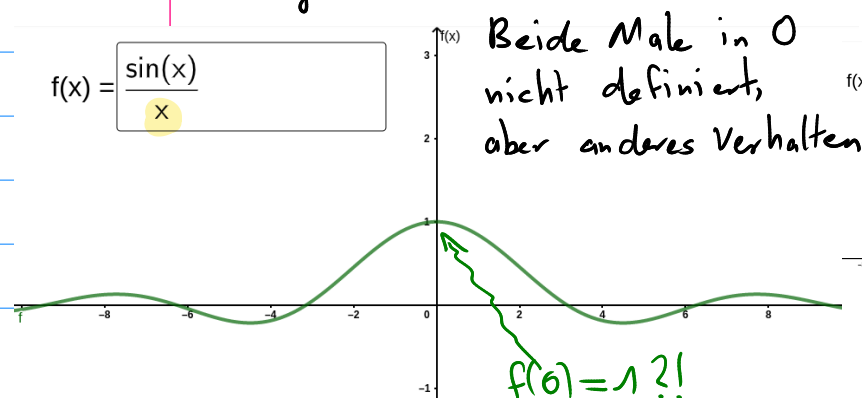
Grundlegende Funktionen:

- (i) **Potenzfunktionen**: $f(x) = x^r$ für ein $r \in \mathbb{R}$.
- (ii) **Polynome**: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ mit $a_n \neq 0$,
Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
 n , die höchste auftretende Potenz, ist der **Grad** des Polynoms.
- (iii) **Rationale Funktionen**: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit $p(x), q(x)$ Polynome
- (iv) **Trigonometrische Funktionen**: $\sin x, \cos x, \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$,
 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\arcsin x, \arccos x$, usw.
- (v) **Exponentialfunktionen**: $f(x) = a^x$ für ein $a > 1$.
- (vi) **Logarithmen**: $f(x) = \log_a x$, Umkehrfunktion zu a^x ,
d.h. $x = \log_a(a^x) = a^{\log_a x}$, falls $a > 1, x > 0$
Spezialfall: $a = e$, Eulersche Zahl: Schreibe **$\ln(x) = \log_e x$**
 $= \log x$

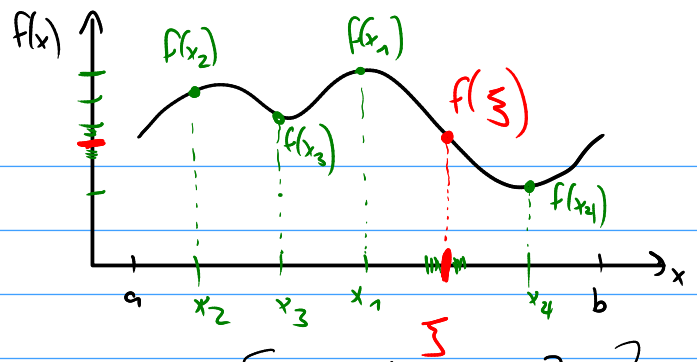
Kombinationen dieser Funktionen durch $+$, \cdot , $-$, $:$, Verkettung nennt man **elementare Funktionen**.

1.3 Grenzwerte von Funktionen & Stetigkeit

Frage: Was kann bei Definitionslücken passieren?

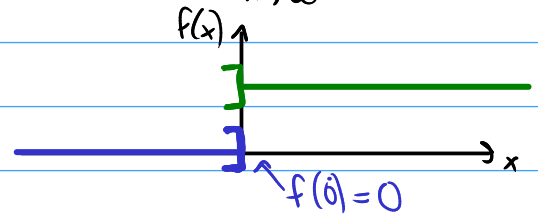


- $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
- (x_n) Folge in (a, b)
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \in [a, b]$
↖ "xi"



Frage: Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi) \quad \left[= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \right] ?$

Bsp: • $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$



Sei $x_n := \frac{1}{n}, n \geq 1$

$\Rightarrow x_n \in D(f) = \mathbb{R}$, wir können einsetzen.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 =: \xi$. Aber: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.
↖ "1/n > 0" ↖ "f(1/n)"

$\Rightarrow 0 = f(\xi) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$.

f springt bei $x = 0$ von 0 auf 1.

• $g(x) = \begin{cases} \sin(2\pi/x), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

• $x_n := 1/n \Rightarrow x_n \rightarrow 0 =: \xi, \quad g(0) = 0$
 • $g(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \rightarrow 0$

• $x_n := 4/n \Rightarrow x_n \rightarrow 0 =: \xi, \quad g(\xi) = g(0) = 0$
 • $g(x_n) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ je nach n
 \Rightarrow Die Folge $(g(x_n))_n$ divergiert.

Fazit: Um einen "Sprung" bei $\xi \in (a, b)$ zu bemerken, muss man alle Folgen $x_n \rightarrow \xi$ auf $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$ überprüfen.

Def: • $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $\xi \in (a, b)$, wenn für jede Folge (x_n) in (a, b) mit Grenzwert ξ gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi) \quad (= f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n))$

- f selbst ist stetig, wenn f an jeder Stelle $\xi \in (a, b)$ stetig ist.

Bsp: • Alle grundlegenden Funktionen aus I.2 sind stetig

• $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist adS 0 **nicht** stetig.
"an der Stelle"

f springt "von rechts", aber nicht "von links".

Def: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ hat den **linken Grenzwert** c an der Stelle ξ , wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \leq \xi$ für alle n und $x_n \rightarrow \xi$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$

Vorsicht: c muss nicht $f(\xi)$ sein und ξ muss nicht in $D(f)$ sein!

Bsp: $f(x) := 0$ mit $D(f) = (-\infty, 0)$

\Rightarrow Dieses f hat adS $\xi = 0$ den linken Grenzwert 0.

Notation: $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = c$

↖ "−" als "von links kommend"

Analog: **Rechter Grenzwert** für $x_n \geq \xi$, $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = c$.

Satz: f ist genau dann stetig adS $\xi \in D(f)$, wenn gilt:
 $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$.

"genau dann wenn" gilt jeweils in beide Richtungen.

Bsp: • $f(x) := 2^{-1/x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Außerhalb von 0 ist f sicher stetig. Was passiert 0?

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$, da $-1/x > 0$ und $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, da $-1/x < 0$ und $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

Beachte: $0 \notin D(f)$, aber $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x)$ ist berechenbar.

1.15

>>> Ab morgen (MATL) bzw. Mittwoch (MAVT): StudyCenter

Rechenregeln: Sei $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \xi^+} g(x) = b$ ($b \neq 0$ wo nötig)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi^+} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = a/b$$

Alle Regeln gelten analog für $x \rightarrow \xi^-$ statt ξ^+ .

Bsp: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} = 1 \cdot 1 = \underline{1}$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\rightarrow 1/2} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\text{Substituiere } y := x^3}$$

$\Rightarrow \text{Wenn } x \rightarrow 0 \text{ ist auch } x^3 = y \rightarrow 0$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \right) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = \underline{0} \cdot \underline{1} = \underline{0}$$

$$\cdot f(x) := \frac{|x|}{x}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

\Rightarrow nicht gleich, nicht stetig fortsetzbar.

$f(x) := 1/x^2$ hat eine Definitionslücke bei $x=0$, die nicht stetig fortgesetzt werden kann, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

1.4 Zwischenwertsatz

"Eine stetige Funktion macht keine Sprünge." Oder präziser:

Zwischenwertsatz: Sei $f: x \mapsto f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Sei weiter m ein beliebiger Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = m$.

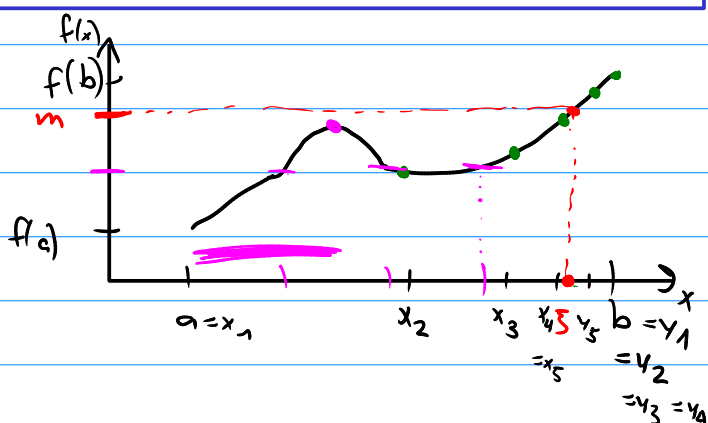
Beweis für $f(a) \leq m \leq f(b)$:

Wir konstruieren Folgen

$$x_n \rightarrow \xi^-, \quad y_n \rightarrow \xi^+$$

Definiere $x_1 := a$, $y_1 := b$

Betrachte $f\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right)$.



Falls $f\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right) \geq m$ setze $x_2 := x_1$ und $y_2 := \frac{x_1 + y_1}{2}$
sonst ($< m$) setze $x_2 := \frac{x_1 + y_1}{2}$ und $y_2 := y_1$

Setze dies unendlich lange fort: Für alle $i \geq 2$

Falls $f\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) \geq m$, setze $x_{i+1} := x_i$ und $y_{i+1} := \frac{x_i + y_i}{2}$
sonst setze $x_{i+1} := \frac{x_i + y_i}{2}$ und $y_{i+1} := y_i$

$\Rightarrow (x_n)$ ist monoton wachsend, (y_n) ist monoton fallend.

Beide Folgen sind durch $a \leq x_n, y_n \leq b$ beschränkt.

\Rightarrow Beide Folgen konvergieren. Sei $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$

$$y - x = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} = \dots$$

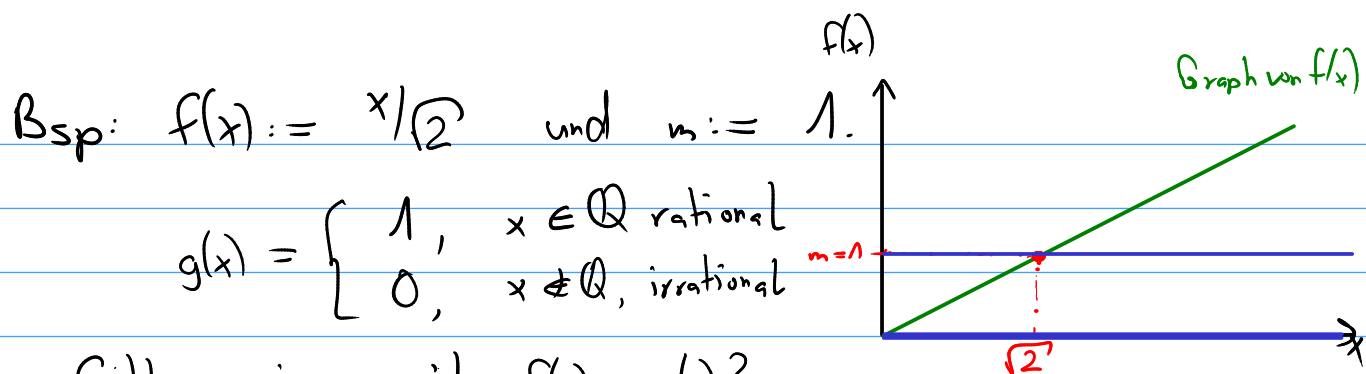
$$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0 \Rightarrow \underline{x = y}$$

Außerdem $f(x_n) \leq m \leq f(y_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$

f ist stetig, d.h. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$

Das heißt: $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ erfüllt $f(\xi) = m$.

□
"Q.E.D."
Beweis ✓



Gibt es ein x mit $f(x) = g(x)$?
 $\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

Sollte visuell bei $x = \sqrt{2}$ passieren, aber: $f(\sqrt{2}) = 1, \neq$
 $g(\sqrt{2}) = 0, \neq$

D.h. es gibt kein solches ξ . Zwischenwertsatz gilt hier nicht, da $g(x)$ nicht stetig ist.

Bsp: Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x = x^2$?

Ja, denn: $g(x) := \cos x$, $h(x) := x^2$

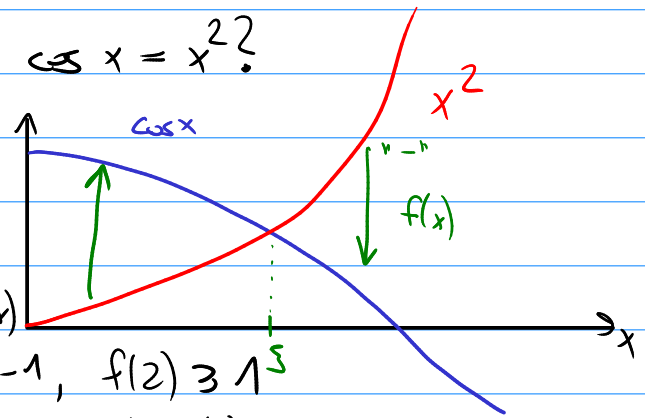
Setze $f(x) := h(x) - g(x) = x^2 - \cos x$

$\Rightarrow f$ stetig, und $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = h(x)$

Zwischenwertsatz: $m = 0$, $f(0) = -1$, $f(2) \geq 1$

\Rightarrow Im Intervall $[0, 2]$ gibt es ein ξ mit $f(\xi) = 0 \Rightarrow \cos \xi = \xi^2$

Berechnung am Computer: $\xi \approx 0.824...$



I.5 Koordinatentransformationen

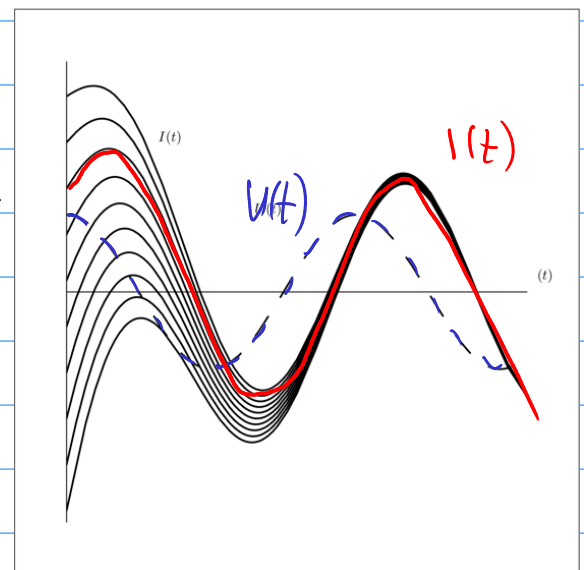
Mögliche Transformationen einer Funktion $f(x)$:

(1) $f_1(x) := f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$

Verschieben um a entlang x -Achse

(2) $f_2(x) := f(x) + b$, $b \in \mathbb{R}$

Verschieben um b entlang y -Achse



(3) $f_3(x) := f(c \cdot x)$, $c \neq 0$, Strecken/Stauchen
um Faktor c entlang x -Achse, mit Spiegelung wenn $c < 0$

(4) $f_4(x) := d \cdot f(x)$, $d \neq 0$, Strecken/Stauchen
um Faktor d entlang y -Achse, mit Spiegelung wenn $d < 0$

(5) $f_5(x) := 1/f(x)$, Invertieren entlang y -Achse,
vertauscht Nullstellen und Polstellen

(6) $f_6(x) := f(1/x)$, Invertieren entlang x -Achse

Bsp: $f(x) := \frac{4}{(x-6)(x+1)} = 4 \cdot \frac{1}{(x-6)(x+1)} = f_4(f_5(\underbrace{(x-6)(x+1)}_{=g(x)}))$
mit $d=4$,

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \tan(2x - \pi/2) + 2 = f_2(f_4(f_1(f_3(\tan x))))$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $d=1/3 \quad c=2 \quad a=\pi/2 \quad b=2$

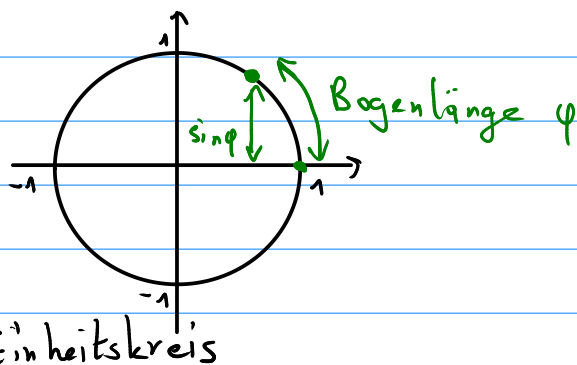
$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, Lösung der harmonischen Schwingung
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
Amplitude Kreisfrequenz Phasenverschiebung

Mit exponentieller Dämpfung: $(1 + e^{-\alpha t}) \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

06.10.2021 Heute: Umkehrfunktionen, injektiv/surjektiv/bijektiv, Arcus Sinus

Moodle: Zwei Foren geöffnet, eins für inhaltliche Fragen, eins für administrativ-technische

I.6 Die inverse Funktion

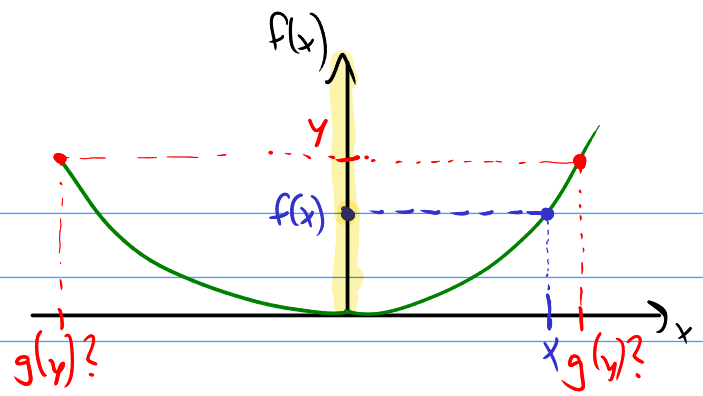


Sinus: Bogenlänge \mapsto Koordinate

Gesucht: Koordinate \mapsto Bogenlänge

Wir benötigen also eine Umkehrfunktion

Bsp: $f(x) := x^2$
 Gesucht: $g(y)$, s.d.
 $g(y)^2 = y$



Problem: In diesem Fall gibt es **zwei** Möglichkeiten für die Umkehrung, aber eine Funktion g kann nur **einen** Wert annehmen.

Mögliche Lösung: Immer nur positive Werte nehmen

⇒ $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,
 $x \mapsto x^2$ $y \mapsto \sqrt{y}$
 dann ist g die **Umkehrfunktion** von f .

Wir haben dies ermöglicht durch Einschränkung von $D(f)$ und $W(f)$.

Def: f ist **injektiv**, wenn aus $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
 Gleichbedeutend:
 • Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
 • Jede horizontale Gerade schneidet den Graph $\Gamma(f)$ höchstens ein Mal.

Bsp:
 • $x \mapsto x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ ist nicht injektiv, da z. B. -1 und 1 auf den gleichen Wert abgebildet werden.
 • $x \mapsto x^3$ ist für jeden Definitionsbereich injektiv, da kein Wert $2x$ angenommen wird.

Def: $f: D(f) \rightarrow B$ ist **surjektiv**, wenn für jedes $y \in B$ (mind.) ein $x \in D(f)$ existiert, so dass $f(x) = y$
 Gleichbedeutend:
 • $B = W(f)$, also Zielbereich = Wertebereich
 • Jeder Wert im Zielbereich wird angenommen

Jede Funktion kann durch Einschränken von $D(f)$ injektiv und durch Einschränken des Zielbereichs surjektiv gemacht werden.

Def: f ist **bijektiv, umkehrbar, invertierbar**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

⇒ Es gibt eine **Umkehrfunktion/ Inverse** $f^{-1}: W(f) \rightarrow D(f)$, so dass gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \in D(f)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \in W(f)$$

Anders gesagt: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Es gilt: $D(f^{-1}) = W(f)$, $W(f^{-1}) = D(f)$

Bsp: • $f(x) = a \cdot x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ist eine **lineare Funktion**.
 (⚠ keine Lineare Abbildung wie in Lineare Algebra)

• Wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a x_1 + b = a x_2 + b \quad \parallel -b \parallel : a$
 $a \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, d.h. f ist injektiv

• Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $y = a x + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$
 \Rightarrow Für jedes $y \in W(f)$ gibt es ein $x = \frac{y-b}{a} \in D(f)$ mit $f(x) = y$, d.h. f ist surjektiv.

⇒ f ist bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

• Jede strikt monotone Funktion (wachsend oder fallend) ist injektiv.

• $g(x) = a^x$, $a > 1$, $D(g) = \mathbb{R}$

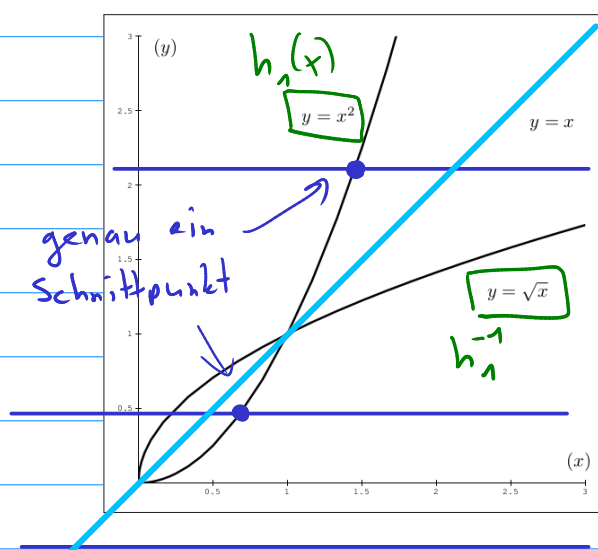
• g strikt monoton wachsend $\Rightarrow g$ injektiv

• $W(g) = (0, \infty)$, da jede positive Zahl angenommen wird, aber nicht 0 oder negative Zahlen.

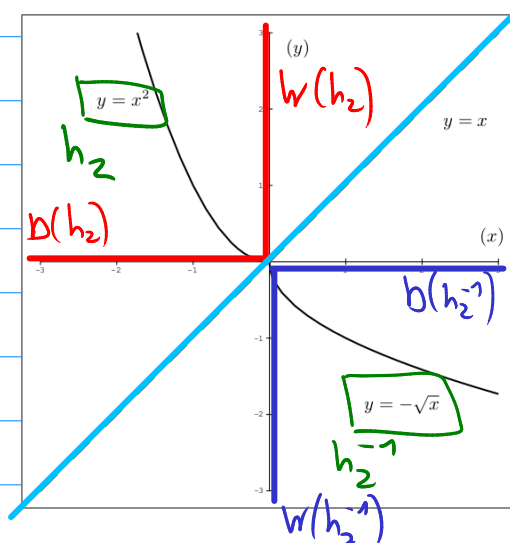
⇒ $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv mit Inverse **$\log_a(x)$**

- $h(x) = x^2$ ist mit $D(h) = \mathbb{R}$ nicht injektiv,
denn: $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$
Hier folgt **nicht**, dass $x_1 = x_2$ sein muss,
es kann auch $x_1 = -x_2$ gelten \Rightarrow nicht injektiv!

Durch Einschränkung: $h_1: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist bijektiv
 $x \mapsto x^2$



kein
Schnittpunkt



$$h_2: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \mapsto x^2$$

ist ebenfalls bijektiv

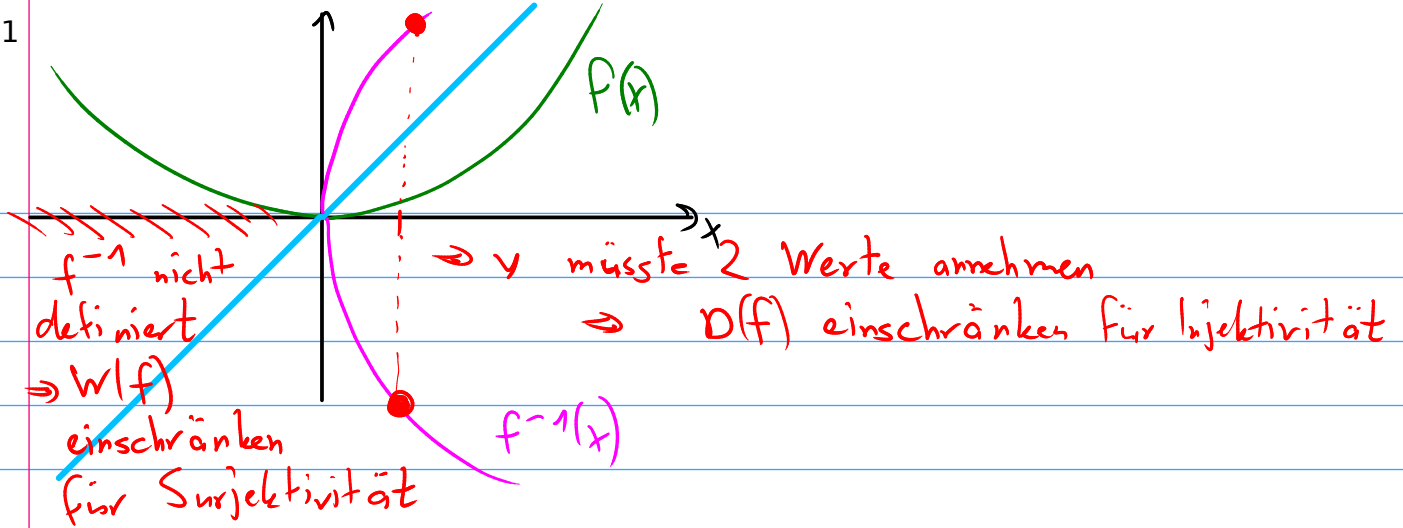
$$h_2^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$y \mapsto -\sqrt{y}$$

Graphisches Umkehren: $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma(f)$
 f bijektiv $\Rightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \Gamma(f^{-1})$

\Rightarrow Wenn man f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem zeichnet, entsteht $\Gamma(f^{-1})$ durch Spiegeln von $\Gamma(f)$ an der Diagonalen $x = y$.

Wenn man nicht injektive oder nicht surjektive Funktionen so graphisch invertiert, sieht man, wo die Invertierung schiefliegt:

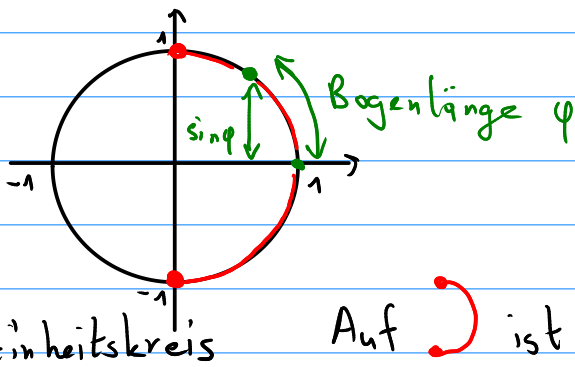


• $f(x) = x$

• $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ injektiv ✓

• $y \in D(f) \Rightarrow y = x$ tut's, surjektiv, mit Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = y$.

Inversen von trigonometrischen Funktionen



Der Sinus ist periodisch:
 $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$
 \Rightarrow Nicht injektiv mit $D(\sin) = \mathbb{R}$.

Auf arc ist $\sin \varphi$ immer unterschiedlich
 $\Rightarrow \sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.

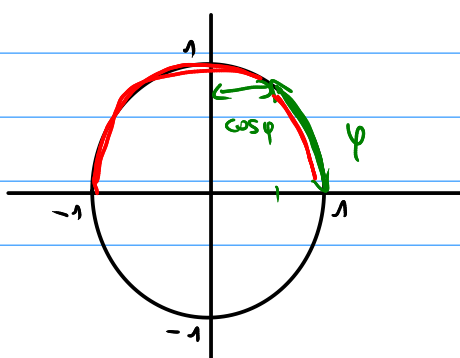
Dann ist $\sin \varphi \in [-1, 1] = W(\sin)$

$\Rightarrow \sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv

mit Umkehrfunktion $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, dem Arcus Sinus.

Heute: Abschluss Umkehrfunktionen, Asymptoten, Zusammenfassung Kapitel I

Umkehrfunktion des Cosinus:



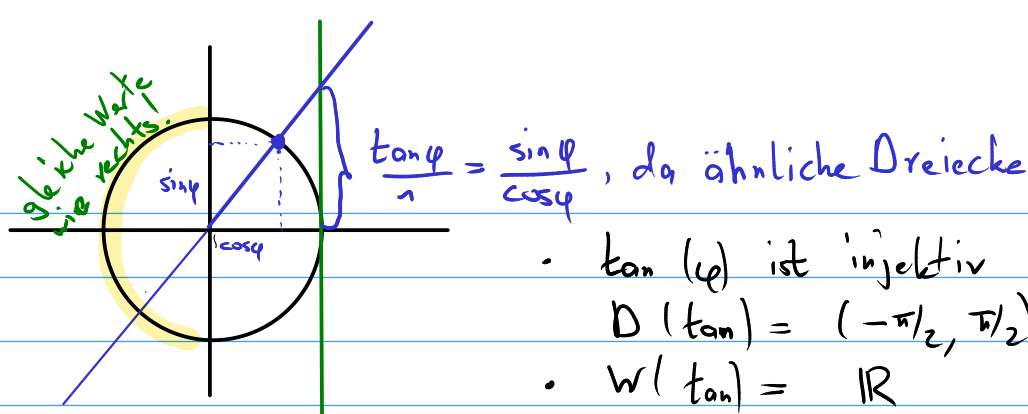
• $\cos \varphi$ ist injektiv für

$D(\cos) = [0, \pi]$

• $W(\cos) = [-1, 1]$

$\Rightarrow \cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv

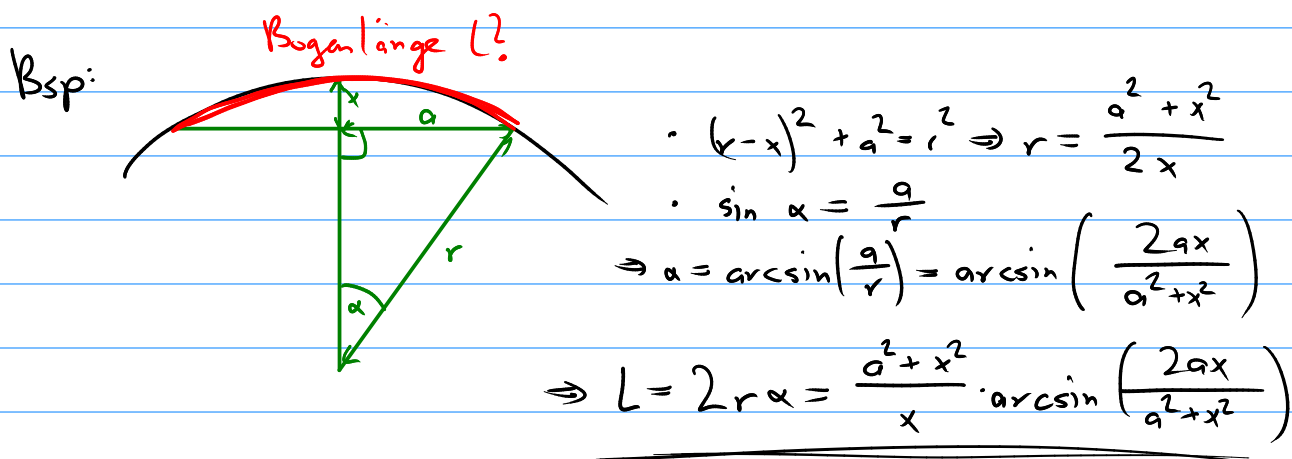
mit Inverse \arccos , dem Arcus Cosinus



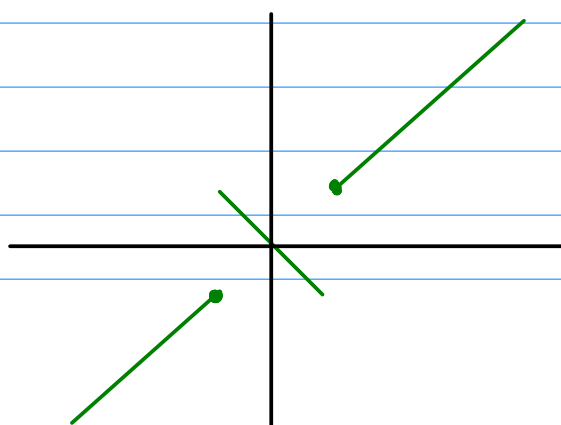
$\Rightarrow \tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv mit Inverse \arctan , dem **Arcus Tangens**.

Vorsicht: Je nach Einschränkung des Definitionsbereichs ändert sich auch die Umkehrfunktion!

Bsp: \sin ist auch auf $[\pi/2, \frac{3\pi}{2}]$ injektiv mit $W(\sin) = [-1, 1]$
 $\Rightarrow \sin: [\pi/2, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv
 Umkehrfunktion $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [\pi/2, \frac{3\pi}{2}]$
 Ist nicht das übliche $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$! üblicher \arcsin
 Hier: $1 \mapsto \pi/2$
 $-1 \mapsto 3\pi/2$ $\Rightarrow y \mapsto \pi - \arcsin(y)$



Frage: Ist jede surjektive Funktion stetig?



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } |x| \geq 1 \\ -x, & \text{wenn } |x| < 1 \end{cases}$$

nicht stetig, aber surjektiv als Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.7 Asymptoten

Die Aussage " $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ " wird von vielen Funktionen erfüllt,
z. B. $x \mapsto x, x^2, \sqrt{x}, e^x, \ln(x)$

Wachsen diese Funktionen auf die gleiche Weise?

Bsp: $f(x) := \sqrt{x^2 - 1}$, $D(f) = [1, \infty)$

Wenn x gross ist, sollte das "-1" keine Rolle mehr spielen

$g(x) := \sqrt{x^2} = |x|$ ($=x$ falls $x \geq 0$)

\Rightarrow Wenn x gross ist, wird der Abstand zwischen f und g klein.

Präziser: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \underline{\underline{0}}$$

Def: g ist eine **Asymptote** von f , wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ gilt.

Manchmal werden wir auch bei $x \rightarrow -\infty$ von Asymptoten sprechen.

Schreibweise: $f \sim g$.

Regeln:

- $f \sim f$, jede Funktion ist asymptotisch zu sich selbst.
- $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$
- $f \sim g$ und $\underline{h \sim 0} \Rightarrow f \pm h \sim g$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$

Kompliziertere Asymptoten sind leicht $\overset{x \rightarrow \infty}{}$ zu finden ($n + 1/x^2$).

Nützlich sind einfachere Asymptoten. Oft wählt man lineare Funktionen
(\rightarrow Geraden)

Bsp: • $f(x) := 1/x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, d.h. $g(x) \equiv 0$
 $x \rightarrow \infty$
 ist eine Asymptote von f .
 "gleich als Funktion"
 "äquivalent, für alle x "

$$\bullet f(x) := \frac{2x+3}{x+1} = \frac{\overbrace{2x+2+1}^{=2(x+1)}}{x+1} = 2 + \boxed{\frac{1}{x+1}}$$

$\rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow \infty$

$\Rightarrow g(x) \equiv 2$ ist eine Asymptote.

f hat bei $x = -1$ eine Definitionslücke mit $\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = \infty$
 $\Rightarrow f$ hat einen **Pol** bei $x = -1$ und damit gewissermassen
 eine "vertikale Asymptote".

$$\bullet f(x) := \underbrace{2021 \cdot e^{-x^2}} + \sin(x)$$

↳ dominant bei $x = 0$, aber wird schnell kleiner mit x gross

$\Rightarrow g(x) := \sin(x)$ ist eine Asymptote, da $2021 \cdot e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\bullet f(x) := \frac{3x^2 - 6x + 7}{x-2} = \frac{3x \cdot (x-2) + 7}{x-2} = 3x + \frac{7}{x-2}$$

$\Rightarrow g(x) := 3x$ ist eine Asymptote, Pol bei $x = 2$.