

8 Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes steht in einem gleichen Verhältnis zum Satz von Gauss wie die Arbeit eines Vektorfeldes zum Fluss eines Vektorfeldes, oder wie der Operator **rot** zum Operator **div**.

Es sei $v : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ ein *reguläres*, d.h. stetig differenzierbares Vektorfeld mit Definitionsbereich $D(\vec{v})$. Ferner sei S ein ganz in $D(\vec{v})$ enthaltenes orientiertes Flächenstück mit Rand ∂S . *Orientiert* heisst ein Flächenstück, wenn darauf einer der beiden Normaleneinheitsvektoren \vec{n} ausgezeichnet ist, und zwar auf eine auf der ganzen Fläche konsistenten, d.h. stetigen Weise. (Man beachte, dass sich nicht jedes Flächenstück orientieren lässt: ein Möbiusband kann nicht orientiert werden!) Der Einfachheit halber und um der mathematischen Strenge Genüge zu tun, nehmen wir an, dass sich S und ∂S aus endlich vielen stetig differenzierbaren Flächenstücken bzw. Kurvenstücken zusammensetzt. Wir machen nun die geschlossene Randkurve ∂S zu einem Weg C , indem wir einen Durchlaufsinne wählen, der mit der Orientierung von S verträglich ist: Wir durchlaufen ∂S so, dass mit dem auf S ausgezeichneten Normalenvektor eine Rechtsschraube gebildet wird (siehe Figur 1). Dann gilt der Satz von Stokes (G. G. Stokes 1819-1903):

Satz von Stokes *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO .$$

Die Arbeit des Vektorfeldes \vec{v} längs des Randweges C ist gleich dem Fluss von $\mathbf{rot} \vec{v}$ in Richtung \vec{n} durch die Fläche S .

Beispiel Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (2xy, x^2 + y^2, 0) .$$

Es sei S die Ellipsenfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

in der (x, y) -Ebene, \vec{n} der in Richtung der z -Achse zeigende Normaleneinheitsvektor. Der Rand ∂S ist dann die Ellipsenperipherie, die wir zu einem (geschlossenen) Weg C machen, indem wir ihn verträglich mit \vec{n} , also im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Nach dem Satz von Stokes gilt dann

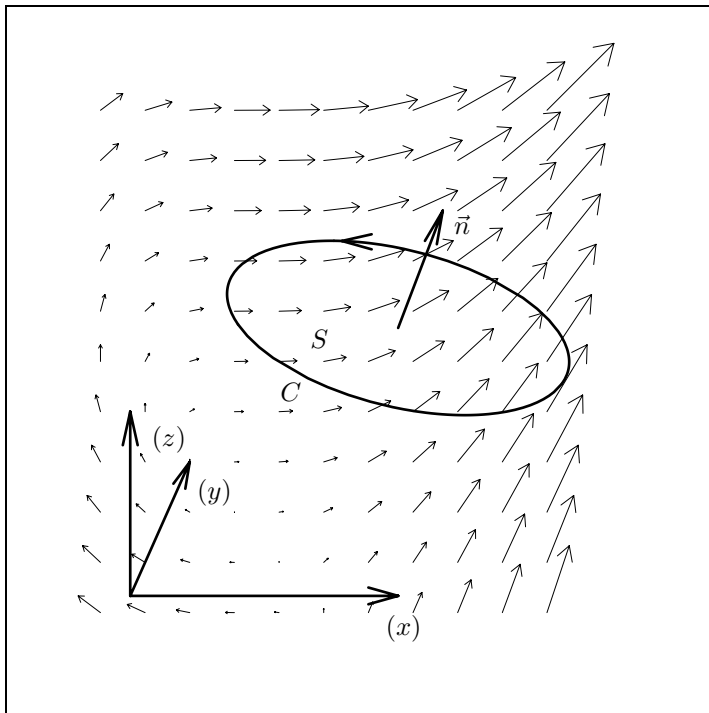


FIG. 1:
Zum Satz von Stokes

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iint_S (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) dO = 0 ,$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat in Abschnitt 7, wo wir die Arbeit des Vektorfeldes \vec{v} längs des Weges C direkt berechnet haben.

Wir entnehmen diesem Beispiel, dass wir aus dem Satz von Stokes die nachstehende *Folgerung* ziehen können:

Es sei $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ ein reguläres Vektorfeld mit $\mathbf{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$ und es sei C ein Weg, der den Rand eines ganz in $D(\vec{v})$ liegenden orientierten Flächenstücks S bildet. Dann ist die Arbeit A des Vektorfeldes \vec{v} längs C Null.

Beispiel Es sei das offensichtlich überall reguläre Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (x^2 - y^2, -xy, 0)$$

gegeben. Gesucht ist die Arbeit von \vec{v} längs des geschlossenen Weges C in der (x, y) -Ebene, wobei C von $P = (1, 0)$ längs der Geraden $y = 1 - x$ nach $Q = (0, 1)$ und von dort längs des

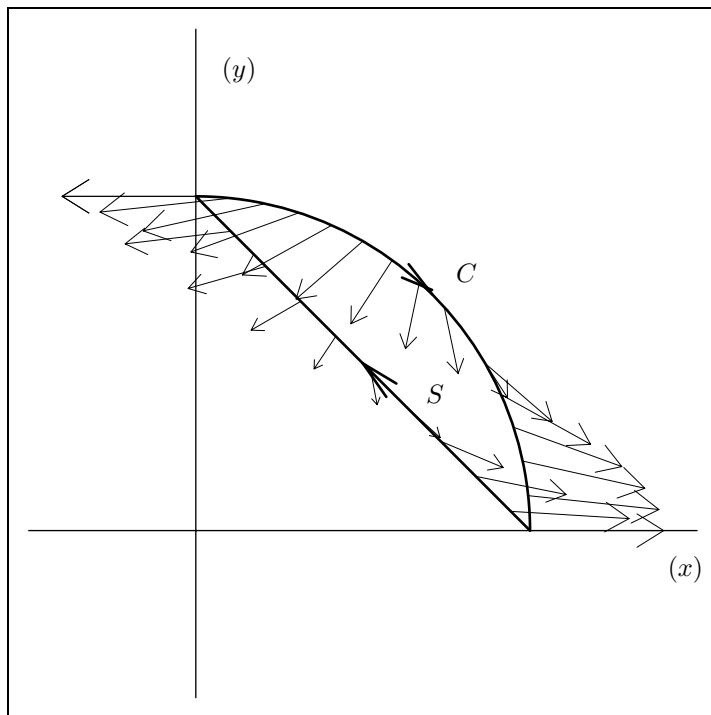


FIG. 2:
Arbeit längs des
geschlossenen Weges C

Einheitskreises $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ zurück nach P verläuft (siehe Figur 2). Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO \quad .$$

Dabei bezeichnen wir mit S das durch $0 \leq y \leq 1$ und $1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$ gegebene Flächenstück der (x, y) -Ebene. Der vorgeschriebene Durchlaufsinne der Randkurve beschreibt mit dem Einheitsvektor in der negativen z -Richtung eine Rechtsschraube; konsequenterweise ist $\vec{n} = (0, 0, -1)$. Mit $\mathbf{rot} \vec{v} = (0, 0, y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO &= - \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y dx \\ &= - \int_0^1 dy \left(y\sqrt{1-y^2} - y(1-y) \right) \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} dy - \int_0^1 (y^2 - y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 - \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

Beispiel Wir betrachten das Stück S der durch

$$z = x^2 - y^2$$

gegebenen Sattelfläche, das zu $x^2 + y^2 \leq a^2$ gehört (siehe Figur 3). Die Randkurve C dieses Flächenstücks ist gegeben durch die Parameterdarstellung

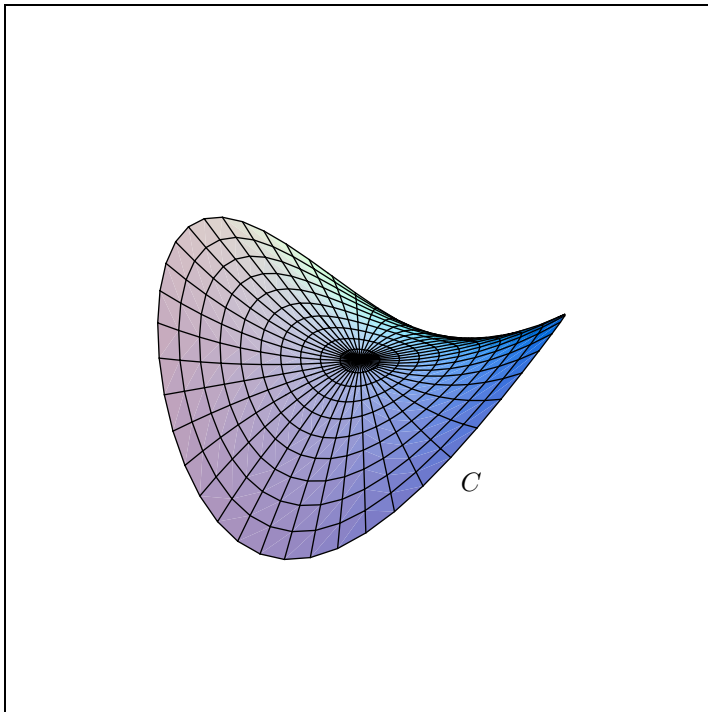


FIG. 3:
Sattelfläche S mit
Randkurve C

$$t \rightarrow (a \cos t, a \sin t, a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ferner betrachten wir das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (z, x, y).$$

Gesucht ist die Arbeit des Vektorfeldes \vec{v} längs der Kurve C . Laut Satz von Stokes können wir diese Arbeit auf zwei verschiedene Arten berechnen, nämlich erstens als Arbeit längs des Weges

C und zweitens als Fluss des Vektorfeldes **rot** \vec{v} durch die Fläche S und zwar in der Richtung, mit welcher der Durchlaufsinne der Randkurve eine Rechtsschraube bildet.

Die direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (a^2(\cos^2 t - \sin^2 t), a \cos t, a \sin t) \cdot (-a \sin t, a \cos t, a^2(-4 \cos t \sin t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^3 \cos^2 t \sin t + a^3 \sin^2 t \sin t + a^2 \cos^2 t - 4a^3 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2a^3 \cos^2 t \sin t + a^3 \sin t + a^2 \cos^2 t - 4a^3 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \pi a^2, \end{aligned}$$

denn nur der zweitletzte Summand liefert einen von Null verschiedenen Beitrag.

Wir wenden uns jetzt der Berechnung des Flusses zu und wählen als Parameterdarstellung des Flächenstücks S :

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u^2 + v^2 \leq a^2.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, v) &= (1, 0, 2u), \\ \vec{r}_v(u, v) &= (0, 1, -2v) \end{aligned}$$

und damit den Normalenvektor

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (-2u, 2v, 1).$$

Dieser bildet mit dem gegebenen Durchlaufsinne der Randkurve C eine Rechtsschraube. Für die Rotation des Vektorfeldes erhalten wir

$$\mathbf{rot} \vec{v} = (1, 1, 1).$$

Damit liefert die Flussberechnung

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO \\ &= \iint_B (1, 1, 1) \cdot (-2u, 2v, 1) du dv \\ &= \iint_B (-2u + 2v + 1) du dv, \end{aligned}$$

wobei B der durch $u^2 + v^2 \leq a^2$ gegebene Kreis in der (u, v) -Ebene ist. Für dieses B liefert aus Symmetriegründen nur der letzte der drei Summanden einen Beitrag. Damit gilt

$$\Phi = \pi a^2 .$$

Wir *beweisen* in dieser Vorlesung den Satz von Stokes natürlich nicht. Immerhin wollen wir in einem Spezialfall plausibel machen, weshalb der Satz von Stokes richtig ist. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall, wo S ein achsenparalleles Rechteck ist, welches durch

$$a \leq x \leq b , \quad c \leq y \leq d , \quad z = e$$

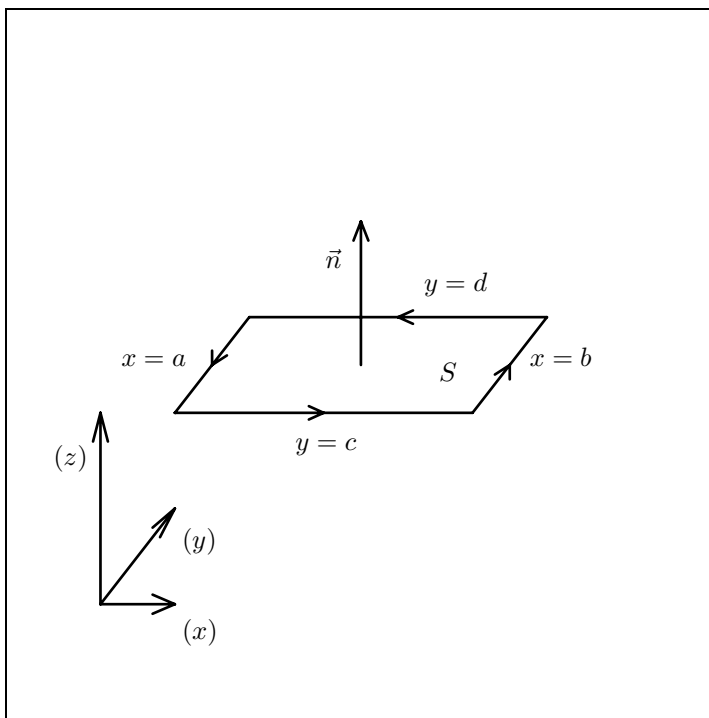


FIG. 4:
Spezialfall des
Satzes von Stokes

gegeben ist (siehe Figur 4). Wir durchlaufen dieses Rechteck im Gegenuhrzeigersinn und nennen den entsprechenden Weg C . Es muss dann auf S der Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = (0, 0, 1)$ gewählt werden. Nun gilt mit

$$\mathbf{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

für die Berechnung des Flusses von $\mathbf{rot} \vec{v}$ durch S in Richtung \vec{n}

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO &= \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx \, dy \\
 &= \int_c^d dy \int_a^b dx \frac{\partial v_2}{\partial x} - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial v_1}{\partial y} \\
 &= \int_c^d (v_2(b, y, e) - v_2(a, y, e)) \, dy - \int_a^b (v_1(x, d, e) - v_1(x, c, e)) \, dx \\
 &= \int_c^d v_2(b, y, e) \, dy + \int_b^a v_1(x, d, e) \, dx + \int_d^c v_2(a, y, e) \, dy + \int_a^b v_1(x, c, e) \, dx \\
 &= \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},
 \end{aligned}$$

so dass in diesem Fall der Satz von Stokes verifiziert ist.

Auf ähnliche Weise wie der Divergenzsatz eine koordinatenfreie Definition von \mathbf{div} liefert, so liefert der Satz von Stokes eine koordinatenfreie Definition der Rotation und damit eine anschauliche Bedeutung für $\mathbf{rot} \vec{v}$.

Wir bemerken zuerst, dass $\mathbf{rot} \vec{v}$ mit Hilfe eines festgewählten Koordinatensystems definiert ist,

$$\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right).$$

Es ist von vornherein nicht klar, dass sich der Vektor $\mathbf{rot} \vec{v}$ nicht ändert, wenn ein anderes kartesisches Koordinatensystem gewählt wird und in diesem auf formal dieselbe Art ein Vektor gebildet wird. Der Satz von Stokes erlaubt nun, eine koordinatenfreie Definition anzugeben und auf diese Art zu zeigen, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{rot} \vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z)$$

unabhängig vom gewählten kartesischen Koordinatensystem ist. Ausserdem liefert dieselbe Überlegung auch eine anschauliche Bedeutung für $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$. Es sei ein Vektorfeld \vec{v} gegeben und $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt in seinem Definitionsbereich $D(\vec{v})$. Ferner sei \vec{n} ein beliebiger Einheitsvektor. Mit S_r bezeichnen wir die auf \vec{n} senkrecht stehende Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt P_0 . Schliesslich sei C_r der S_r berandende Weg, der mit \vec{n} eine Rechtsschraube bildet (siehe Figur 5). Der Satz von Stokes liefert in dieser Situation

$$\int_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO.$$

Nach dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale gibt es auf S_r einen Punkt $P_r = (x_r, y_r, z_r)$ mit

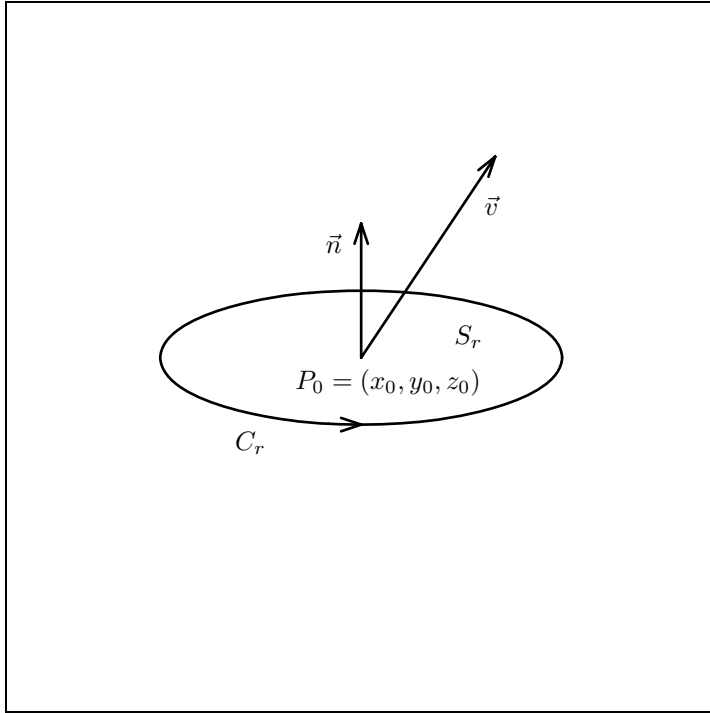


FIG. 5:
Arbeit längs eines
(kleinen) Kreises

$$\iint_{S_r} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \pi r^2 \mathbf{rot} \vec{v}(x_r, y_r, z_r) \cdot \vec{n}.$$

Für $r \rightarrow 0$ erhalten wir wegen der Stetigkeit des Feldes $\mathbf{rot} \vec{v}$ somit

$$\vec{n} \cdot \mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{S_r} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Nun gilt bekanntlich für das Skalarprodukt das Folgende: $\vec{n} \cdot \mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ nimmt den maximalen Wert genau dann an, wenn der Vektor \vec{n} parallel zum Vektor $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ ist. Dieser maximale Wert ist $|\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)|$. Wir haben damit den Vektor $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ in Richtung und Länge beschreiben können:

Der Vektor \vec{n} zeigt genau dann in Richtung $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$, wenn

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

den maximalen Wert annimmt. Dieser Wert ist gleich $|\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)|$.

Für die Anschauung entnehmen wir dieser Überlegung, dass $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ Richtung und

Stärke der “Wirbelung” des Vektorfeldes \vec{v} im Punkte (x_0, y_0, z_0) angibt. Wählen wir eine zu $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ senkrecht stehende Kreisscheibe S_r mit Radius r , Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) und Rand C_r , so gibt die Länge von $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ die Arbeit des Vektorfeldes \vec{v} längs C_r pro Flächeneinheit von S_r an. Anschaulich heisst dies, dass das Vektorfeld \vec{v} in (x_0, y_0, z_0) einen **Wirbel** aufweist, der senkrecht zu $\mathbf{rot} \vec{v}(x_0, y_0, z_0)$ verläuft. Aus diesem Grund heisst $\mathbf{rot} \vec{v}$ auch etwa die **Wirbelstärke** von \vec{v} . Gilt für ein Vektorfeld $\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) \equiv (0, 0, 0)$, so heisst dieses **wirbelfrei**.

Zum Schluss merken wir noch an, dass gemäss den Resultaten des Abschnittes 2 jedes Gradientenfeld wirbelfrei ist; insbesondere ist auch das Coulombfeld wirbelfrei.