

1 Skalarfelder und Vektorfelder

Unter einem **Skalarfeld** verstehen wir eine reellwertige, auf einem räumlichen Bereich B definierte Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) .$$

Jedem Punkt des Definitionsbereiches $D(f)$ wird eine reelle Zahl zugeordnet (siehe Figur 1).

Eine im Bereich B variable *skalare* physikalische Grösse wird durch ein in B definiertes Skalarfeld beschrieben; Beispiele solcher Grössen sind etwa die Temperatur, der Luftdruck, das elektrische Potential, etc.

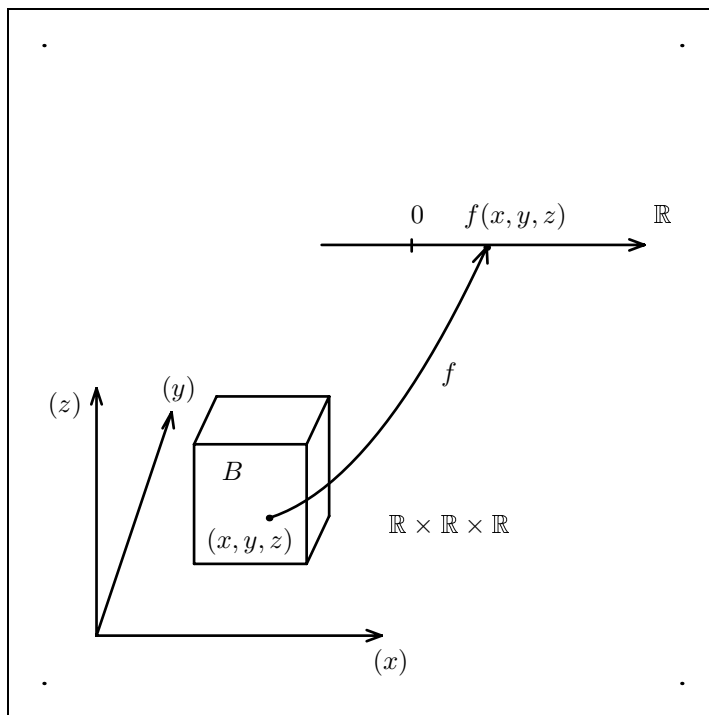


FIG. 1 :
Skalarfeld

Durch ein im Bereich B definiertes **Vektorfeld**

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

wird jedem Punkt in B ein Vektor $\vec{v}(x, y, z)$ zugeordnet.

Es ist oft instruktiv, sich den Vektor $\vec{v}(x, y, z)$ im Punkte (x, y, z) angebracht zu denken (siehe Figur 2). Eine im Bereich B variable *vektorielle* Grösse wird durch ein in B definiertes Vektorfeld beschrieben. Als Beispiele von Vektorfeldern erwähnen wir die folgenden.

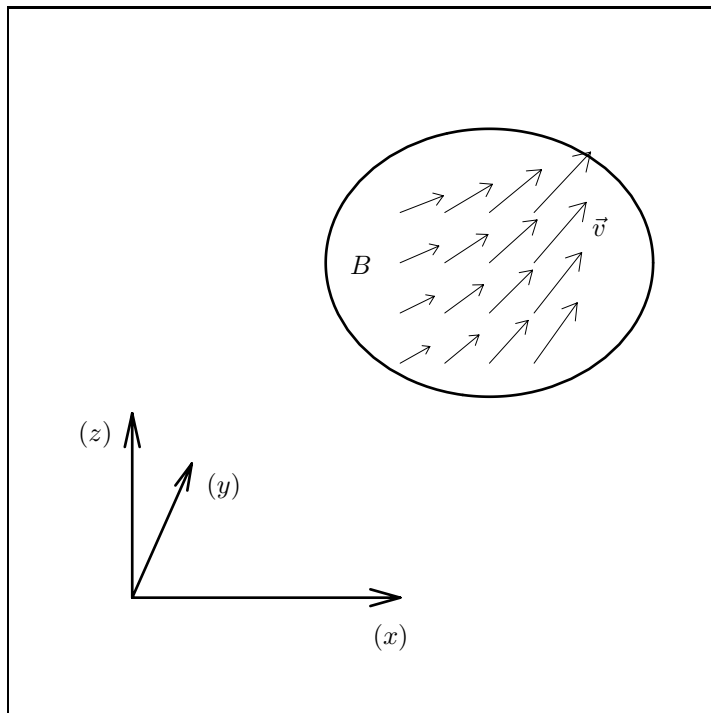


FIG. 2:
Vektorfeld

Beispiel In einem mit Gas oder Flüssigkeit gefüllten Bereich B ordne man jedem Punkt (x, y, z) die Geschwindigkeit $\vec{v}(x, y, z)$ des Gas- bzw. Flüssigkeitsteilchens zu, das sich im Punkte (x, y, z) befindet. Man nennt dann das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$$

das *Strömungsfeld* des Gases bzw. der Flüssigkeit. Es beschreibt den Bewegungszustand des Mediums.

Beispiel Man ordne jedem Punkt (x, y, z) des Bereiches B die Gravitationskraft $\vec{K}(x, y, z)$ zu, die auf eine Probemasse m in diesem Punkt wirkt. Dieses Vektorfeld

$$\vec{K} : (x, y, z) \rightarrow \vec{K}(x, y, z)$$

beschreibt den Zustand des räumlichen Bereiches B bezüglich der Gravitation. Es ist ein Beispiel eines *Kraftfeldes*.

Beispiel Ordnet man jedem Punkt (x, y, z) des Bereiches B die elektrische (Anziehungs- oder Abstossungs-)Kraft $\vec{E}(x, y, z)$ zu, die auf eine Probeladung e in diesem Punkte wirkt, so beschreibt das Vektorfeld

$$\vec{E} : (x, y, z) \rightarrow \vec{E}(x, y, z)$$

den Zustand des räumlichen Bereiches B bezüglich des elektrischen Feldes.

Wir nennen ein Skalar- oder Vektorfeld **stationär**, wenn es zeitunabhängig ist, wir nennen es **instationär**, wenn es zeitabhängig ist. Mit einigen wenigen Ausnahmen werden wir nur stationäre Felder betrachten. Die Ausnahmen betreffen elektrodynamische und hydrodynamische Felder, wo die Zeitabhängigkeit gerade das Wesentliche ist; z.B. hängt nach Maxwell die elektrische Feldstärke mit der zeitlichen Änderung der magnetischen Feldstärke zusammen (siehe Abschnitt 9).

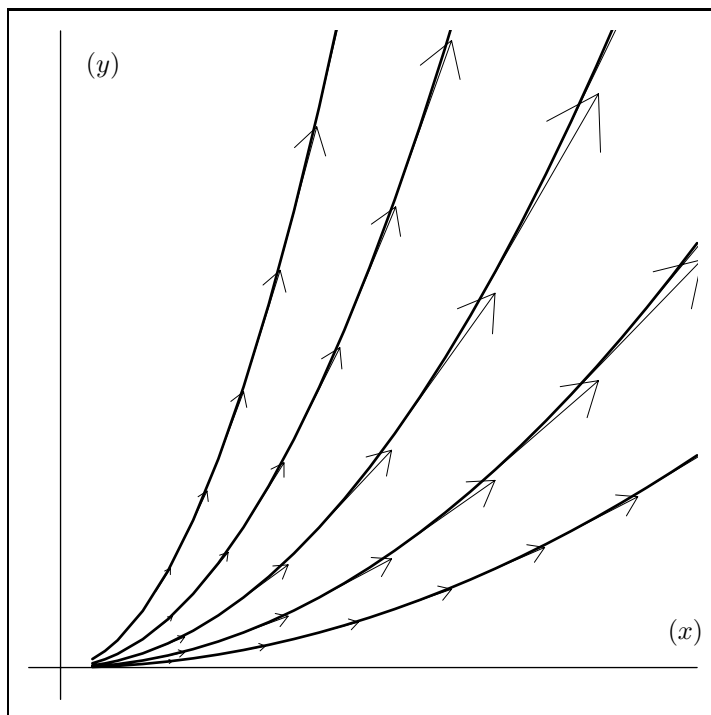


FIG. 3:
Feldlinien

Ist im Bereich B ein Vektorfeld $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ gegeben, so heisst eine in B verlaufende Kurve K eine **Feldlinie** von \vec{v} , wenn in jedem ihrer Punkte der zu diesem Punkt gehörige

Feldvektor tangential zu K ist (siehe Figur 3).

Beispiel Ist $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ das stationäre Strömungsfeld eines Gases oder einer Flüssigkeit, so sind die Feldlinien gerade die Bahnen der Teilchen des Mediums.

Beispiel Das einfachste Vektorfeld ist das homogene. Es besteht darin, dass jedem Punkt des Bereiches B der konstante Vektor $\vec{v}(x, y, z) = \vec{a}$ zugeordnet wird (siehe Figur 4). Das Geschwindigkeitsfeld eines translatorisch bewegten Körpers ist homogen. Das Strömungsfeld einer Parallelströmung ist homogen. Das elektrische Feld zwischen zwei parallelen Kondensatorplatten ist homogen. Die Feldlinien eines homogenen Vektorfeldes sind parallele Geraden.

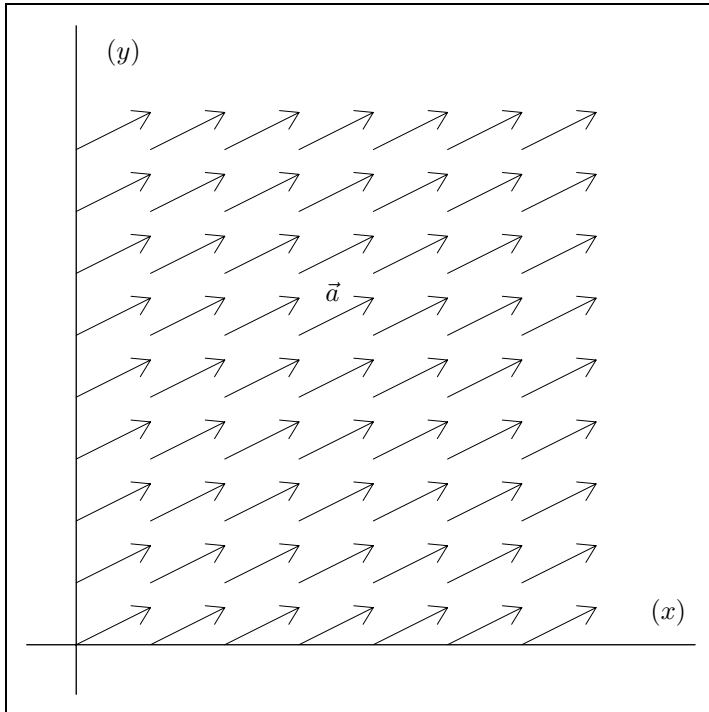


FIG. 4:
Homogenes Vektorfeld

Beispiel Es sei $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ das Geschwindigkeitsfeld eines mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ rotierenden starren Körpers. Die Rotationsachse gehe durch den Ursprung. Wie üblich bezeichnen wir mit $\vec{r}(x, y, z)$ den Ortsvektor des Punktes (x, y, z) . Dann gilt offensichtlich (siehe Figur 5)

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{\omega} \times \vec{r}(x, y, z) = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x) .$$

Die Feldlinien dieses Feldes sind offenbar Kreise in Normalebenen zu $\vec{\omega}$, deren Mittelpunkte auf

der Rotationsachse liegen.

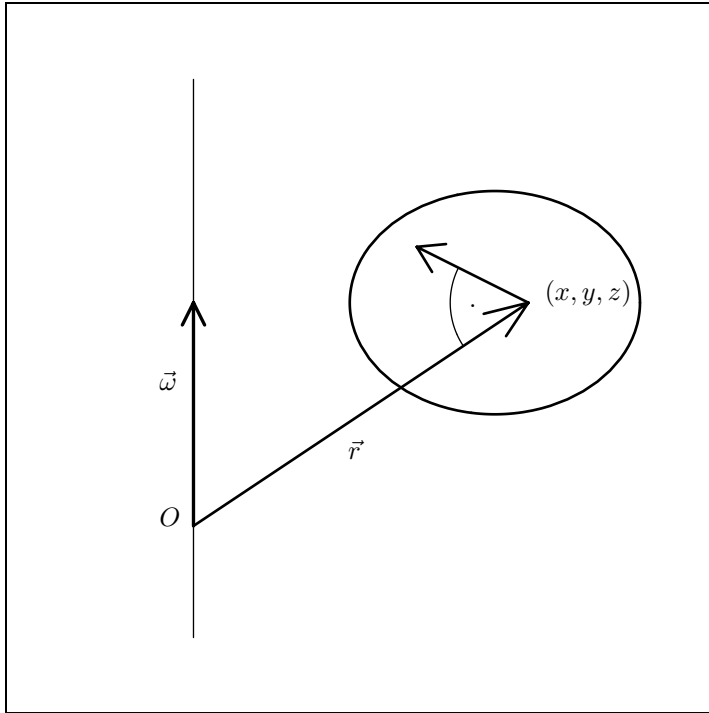


FIG. 5:
Vektorfeld eines rotierenden
starren Körpers

Beispiel Das Coulomb'sche Feld (C. A. Coulomb 1736 -1806) ist das elektrische Feld einer sich im Nullpunkt des Koordinatensystems befindlichen Punktladung e . Der Feldvektor \vec{v} in (x, y, z) ist die Kraft auf eine in (x, y, z) angebrachte positive Einheitsladung. Setzen wir wie üblich $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, so gilt (siehe Physik)

$$|\vec{v}| = \gamma \frac{|e|}{|\vec{r}(x, y, z)|^2} = \gamma \frac{|e|}{r^2},$$

wobei γ eine positive Konstante ist. Für positives e ist \vec{v} von O weggerichtet (Abstossung, siehe Figur 6), und für negatives e ist \vec{v} auf O zugerichtet (Anziehung). Man erhält also

$$\vec{v}(x, y, z) = \gamma \frac{e}{|\vec{r}(x, y, z)|^3} \vec{r}(x, y, z) = \gamma \frac{e}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

Das Newton'sche Gravitationsfeld eines in O befindlichen Massenpunktes stimmt formal, d.h. bis auf eine Konstante mit dem Feld einer negativen elektrischen Ladung in O überein; es ist $\vec{v}(x, y, z)$ in diesem Fall die auf eine in (x, y, z) angebrachte Einheitsmasse wirkende Gravitationskraft. Die Feldlinien des Coulombfeldes sind die von O ausgehenden Strahlen. Man beachte, dass das Coulombfeld in O nicht definiert ist.

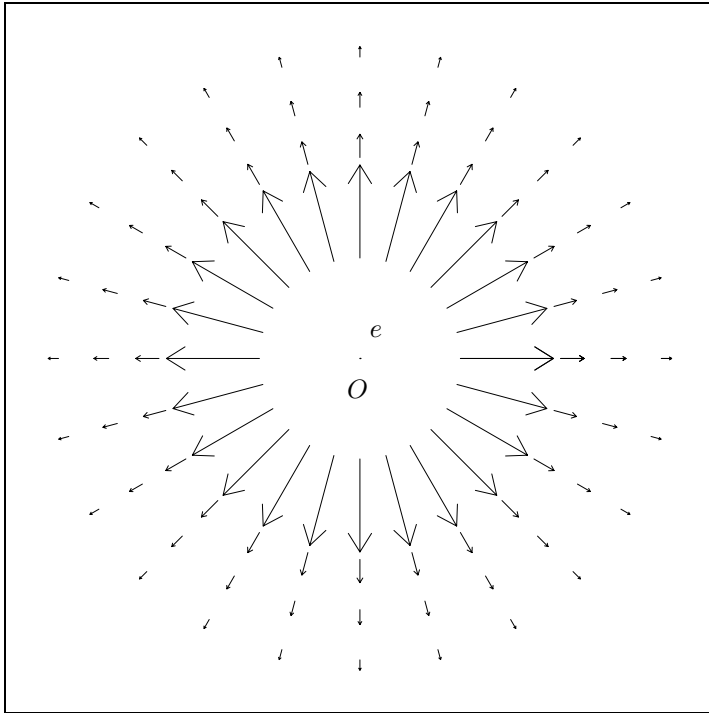


FIG. 6:
Coulomb'sches Feld

Beispiel Das Magnetfeld eines unendlich langen geradlinigen stromdurchflossenen Leiters. In der z -Achse fliesse ein Strom konstanter Stärke J . Ein Strom erzeugt nach dem Gesetz von Biot-Savart (J. B. Biot 1774 - 1862, F. Savart 1791 - 1841) ein Magnetfeld; in der Physik lernt man, dass dieses im Punkt (x, y, z) durch

$$\vec{v}(x, y, z) = 2J \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

beschrieben wird (siehe Figur 7). Wir entnehmen dieser Formel, dass \vec{v} nur für $x^2 + y^2 > 0$ definiert ist. Der Definitionsbereich von \vec{v} ist der dreidimensionale Raum ohne die z -Achse. Die Länge des Feldvektors $|\vec{v}|$ ist unabhängig von der z -Koordinate. Der Feldvektor ist parallel zur (x, y) -Ebene und steht senkrecht auf dem Lot zum Leiter. Es gilt

$$|\vec{v}(x, y, z)| = 2J \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

d.h. $|\vec{v}(x, y, z)|$ ist umso grösser, je näher (x, y, z) an der z -Achse liegt. Die Feldlinien von \vec{v} sind Kreise parallel zur (x, y) -Ebene mit Mittelpunkt auf der z -Achse.

Beispiel Strömungsfeld einer zähen Flüssigkeit durch ein zylindrisches Rohr. Es sei die z -Achse gerade die Achse des zylinderförmigen Rohres, welches den Radius a besitze. Der Ansatz von

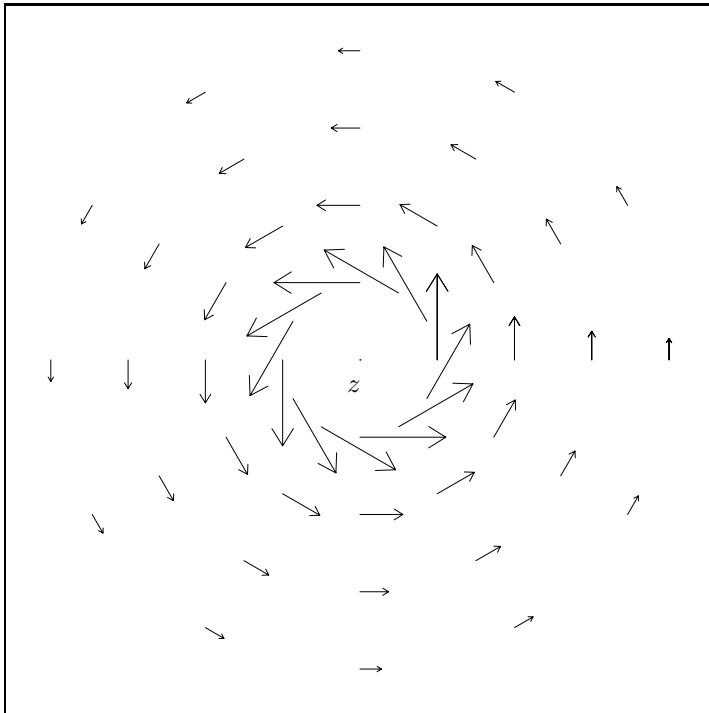


FIG. 7:
Magnetfeld eines
stromdurchflossenen Leiters

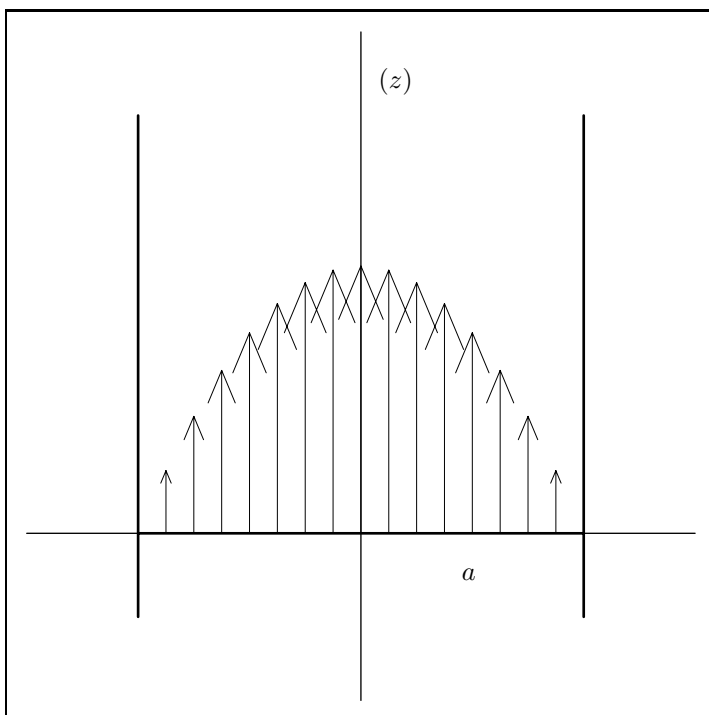


FIG. 8:
Hagen-Poiseuille-Strömung

Hagen-Poiseuille sagt dann, dass für Punkte (x, y, z) im Innern des Rohres die Geschwindigkeit der Strömung durch

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (0, 0, C(a^2 - x^2 - y^2))$$

gegeben ist (siehe Figur 8). Das Geschwindigkeitsprofil der Hagen-Poiseuille-Strömung ist eine Parabel.

Beispiel Das Gravitationsfeld einer homogenen Kugel mit Radius a ist für $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \geq a$ gegeben durch

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = -C' \frac{1}{r^3} \vec{r} = -\frac{C'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

(siehe Kapitel V, Abschnitt 3). Für $r < a$ (im Innern der Kugel) liefert eine ähnliche Rechnung wie in Kapitel V, Abschnitt 3

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = -C'' \vec{r} = -C''(x, y, z).$$

Natürlich sind die Konstanten C' und C'' positiv.