

10 Potentialfelder

Konservative Vektorfelder treten in Anwendungen häufig auf; sie werden, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird, durch Potentialfelder (Gradientenfelder) beschrieben.

Ein Vektorfeld $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ heisst **konservativ**, wenn für alle $P, Q \in D(\vec{v})$ gilt, dass die Arbeit von \vec{v} längs allen Wegen von P nach Q gleich gross ist.

In einem konservativen Vektorfeld hängt also die Arbeit nicht vom Weg, sondern nur von dessen Anfangs- und Endpunkt ab. Insbesondere ist die Arbeit, welche ein konservatives Vektorfeld längs eines geschlossenen Weges leistet, immer Null. Diese Eigenschaft charakterisiert konservative Vektorfelder sogar, wie der folgende Satz besagt.

Satz 1 *Ein Vektorfeld \vec{v} ist genau dann konservativ, wenn für alle geschlossenen Wege W die Arbeit von \vec{v} längs W verschwindet.*

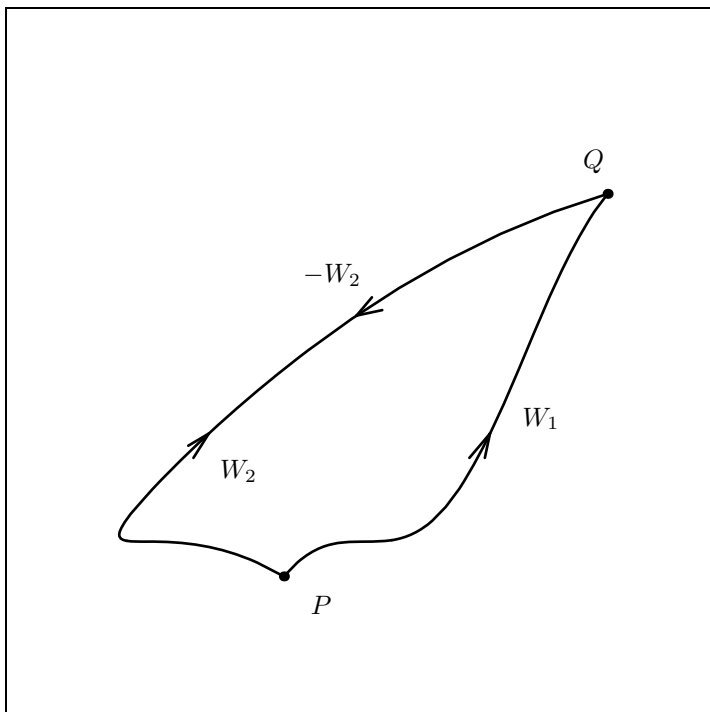


FIG. 1 :
Geschlossene Wege und
konservative Vektorfelder

Beweis Es ist zu zeigen, dass für beliebige zwei Punkte P und Q und zwei beliebige Wege W_1

und W_2 von P nach Q gilt (siehe Figur 1):

$$\int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Nun ist aber der Weg $W_1 + (-W_2)$ ein geschlossener von P ausgehender und nach P zurückkehrender Weg. Deshalb gilt

$$0 = \int_{W_1 + (-W_2)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{-W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Zusammenhang mit grad

Wir betrachten hier ein Vektorfeld $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$, welches sich als **Gradientenfeld** schreiben lässt, d.h. es gibt eine Funktion $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ mit

$$\vec{v} = \mathbf{grad} f.$$

Die Funktion f heisst in diesem Zusammenhang oft **Potential** und das Vektorfeld \vec{v} ein **Potentialfeld**. Wir behaupten als erstes, dass ein solches Feld automatisch konservativ ist. Um dies einzusehen, betrachten wir einen von P nach Q führenden Weg W . Dieser werde durch die Parameterdarstellung $t \rightarrow \vec{r}(t)$ mit $\vec{r}(t_P) = \vec{OP} = (x_P, y_P, z_P)$ und $\vec{r}(t_Q) = \vec{OQ} = (x_Q, y_Q, z_Q)$ beschrieben. Die Arbeit von \vec{v} längs W ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_W \mathbf{grad} f \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} (f_x, f_y, f_z) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} (f_x \dot{x}(t) + f_y \dot{y}(t) + f_z \dot{z}(t)) dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt \\ &= [f(x(t), y(t), z(t))]_{t_P}^{t_Q} \\ &= f(x_Q, y_Q, z_Q) - f(x_P, y_P, z_P). \end{aligned}$$

Also ist die Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges (und nicht vom Verlauf des Weges selbst) abhängig. Folglich ist das Vektorfeld \vec{v} konservativ.

Von dieser Tatsache gilt nun auch die Umkehrung, so dass wir den folgenden Satz aussprechen können.

Satz 2 Genau dann ist das Vektorfeld \vec{v} konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist, d.h. wenn es eine Skalarfunktion f gibt mit $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

Beweis Wir haben bereits gesehen, dass ein Potentialfeld konservativ ist. Wir müssen also nur noch die Umkehrung zeigen. Es sei also \vec{v} ein konservatives Vektorfeld. Wir suchen eine Funktion f mit $\vec{v} = \mathbf{grad} f$. Dazu wählen wir als erstes einen festen Punkt P_0 in $D(\vec{v})$. Um den Funktionswert $f(x, y, z)$ zu definieren, wählen wir einen von P_0 nach $Q = (x, y, z)$ führenden Weg W und setzen

$$f(x, y, z) = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} .$$

Da \vec{v} konservativ ist, hängt der Wert des Integrals nur von Q ab und nicht von der Wahl des Weges W . Um $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ zu zeigen, betrachten wir einen von $Q = (x, y, z)$ nach $Q' = (x+h, y, z)$ führenden Weg L (siehe Figur 2) und beschreiben ihn durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (t, y, z) , \quad x \leq t \leq x+h .$$

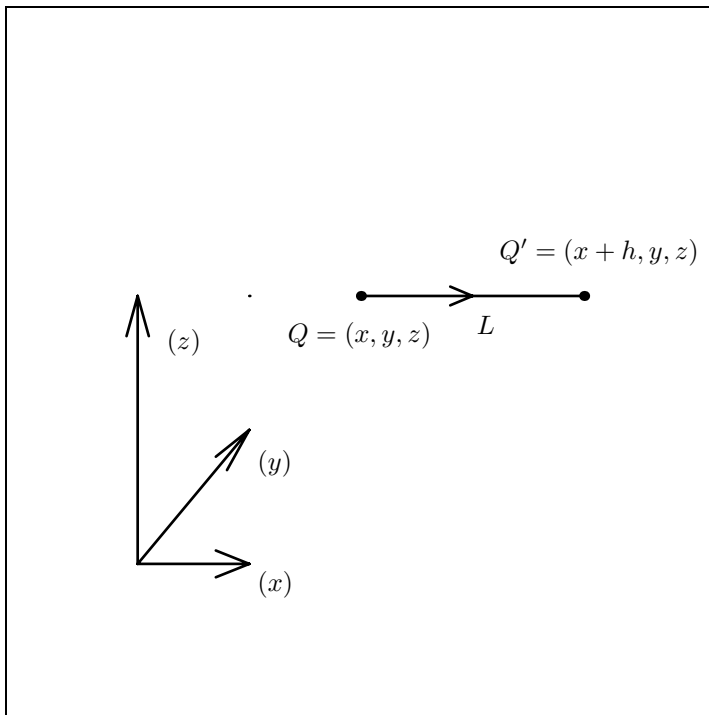


FIG. 2:
Der Weg L

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_L \vec{v} \cdot d\vec{r} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v_1(t, y, z) dt . \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es nun ein t^* zwischen x und $x+h$ mit

$$\int_x^{x+h} v_1(t, y, z) dt = h \cdot v_1(t^*, y, z) .$$

Daraus ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} v_1(t^*, y, z) = v_1(x, y, z) .$$

Analog zeigt man $f_y = v_2$ und $f_z = v_3$. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Wir entnehmen unseren Überlegungen die folgende wichtige Tatsache, die die Berechnung der Arbeit eines Potentialfeldes sehr einfach macht:

Ist \vec{v} ein Gradientenfeld, $\vec{v} = \mathbf{grad} f$, so ist die Arbeit des Vektorfeldes \vec{v} längs eines von P nach Q führenden Weges gerade gleich der Potentialdifferenz $f(x_Q, y_Q, z_Q) - f(x_P, y_P, z_P)$.

Wir merken zu diesem Thema noch Folgendes an: Das Potential f eines Potentialfeldes \vec{v} ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Einerseits ist mit f auch $g = f + C$ ein Potential von \vec{v} , denn $\mathbf{grad} f = \mathbf{grad} g$. Andererseits folgt aus $\mathbf{grad} f = \mathbf{grad} h$, dass die partiellen Ableitungen der Differenz $f - h$ alle verschwinden, d.h. dass $f - h$ eine Konstante ist.

Schliesslich fügen wir an, dass die Niveauflächen der Potentialfunktion f in Anwendungen häufig *Potentialflächen* genannt werden; laut Definition sind dies Flächen, zu denen das Vektorfeld $\mathbf{grad} f$ senkrecht verläuft.

Zusammenhang mit rot

Es sei \vec{v} ein Potentialfeld mit Potential f , $\vec{v} = \mathbf{grad} f$. Dann gilt nach den Resultaten in Abschnitt 2 $\mathbf{rot} \vec{v} = \mathbf{rot} \mathbf{grad} f = (0, 0, 0)$. Es gilt also der Satz

Satz 3 *Ist \vec{v} ein Potentialfeld, so ist \vec{v} wirbelfrei, d.h. es gilt $\mathbf{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$.*

Dieser Satz besagt auch: *Ist $\mathbf{rot} \vec{v} \neq (0, 0, 0)$, so ist \vec{v} kein Potentialfeld.*

Wir stellen uns auch hier die Frage, ob die Umkehrung von Satz 3 gilt. Dafür haben wir bereits etwas Vorarbeit geleistet: Vom Vektorfeld \vec{v} des stromdurchflossenen Leiters haben wir einerseits gezeigt, dass es wirbelfrei ist (Abschnitt 2). Andererseits haben wir in Abschnitt 7 die Arbeit von \vec{v} längs eines speziellen geschlossenen Weges berechnet und einen von Null verschiedenen Wert erhalten. Die Aussage unseres Satzes lässt sich also nicht ohne weiteres umkehren; es muss eine Zusatzvoraussetzung hinzutreten.

Satz 4 *Es sei \vec{v} ein Vektorfeld mit $\mathbf{rot} \vec{v} \equiv (0, 0, 0)$, dessen Definitionsbereich $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist. Dann ist \vec{v} ein Potentialfeld.*

Wir wollen zuerst die hier neu hinzukommende Voraussetzung erklären. Ein Bereich D , unabhängig davon, was seine Dimension ist, heisst **einfach zusammenhängend**, wenn sich jeder geschlossene Weg W in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Man sieht sehr rasch an Beispielen, was dieser Begriff intuitiv beschreibt.

Beispiele Die ganze Ebene ist einfach zusammenhängend.

Die Ebene, aus der man einen Punkt P entfernt hat, ist *nicht* einfach zusammenhängend, denn eine geschlossene Kurve, die um P herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Der ganze Raum ist einfach zusammenhängend.

Der ganze Raum, aus dem man einen Punkt entfernt hat, ist einfach zusammenhängend. Beim Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve lässt sich dieser eine Punkt immer vermeiden.

Der ganze Raum, aus dem man eine Gerade entfernt hat, ist *nicht* einfach zusammenhängend, denn eine geschlossene Kurve, die um diese Gerade herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen.

Dieses letzte Beispiel zeigt, dass der Definitionsbereich des Vektorfeldes des stromdurchflossenen Leiters *nicht* einfach zusammenhängend ist: in den Punkten des Leiters ist dieses Vektorfeld nämlich nicht definiert.

Beweis Wir zeigen, dass für jeden geschlossenen Weg W in $D(\vec{v})$, die Arbeit von \vec{v} längs W verschwindet. Da $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend ist, lässt sich unser Weg W auf einen Punkt zusammenziehen. Dabei überstreicht der Weg ein Flächenstück S , auf das wir jetzt den Satz von Stokes anwenden. Es ergibt sich

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = 0 .$$

Da dies für alle geschlossenen Wege gilt, folgt, dass \vec{v} konservativ und deshalb ein Potentialfeld ist.

Beispiel Ist \vec{v} ein Coulombfeld,

$$\vec{v} = -C \frac{\vec{r}}{r^3} ,$$

so ist $\mathbf{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$ und der Definitionsbereich $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend. Nach Satz 4 ist also \vec{v} ein Potentialfeld. In der Tat ist $\vec{v} = \mathbf{grad} f$, wobei f das durch $f(x, y, z) = C/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gegebene Potential ist.

Wir wollen zum Schluss dieses Abschnittes noch auf eine Beziehung zu den sogenannten Integrabilitätsbedingungen (Kapitel IV, Abschnitt 7) hinweisen. Diese Integrabilitätsbedingungen sind bei der Frage aufgetaucht, wann es zu gegebenen Funktionen

$$\varphi : (x, y, z) \rightarrow \varphi(x, y, z) , \quad \psi : (x, y, z) \rightarrow \psi(x, y, z) , \quad \chi : (x, y, z) \rightarrow \chi(x, y, z)$$

eine Funktion $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ gibt mit

$$f_x \equiv \varphi , \quad f_y \equiv \psi , \quad f_z \equiv \chi .$$

Diese Frage lässt sich offenbar auch so formulieren: Es sei das Vektorfeld $\vec{v} = (\varphi, \psi, \chi)$ gegeben. Wann gibt es eine (Potential-)Funktion f mit $\mathbf{grad} f = \vec{v} = (\varphi, \psi, \chi)$? Auf diese Formulierung können wir jetzt unseren Satz 3 anwenden: Ist der (gemeinsame) Definitionsbereich D von φ, ψ, χ einfach zusammenhängend und ist \vec{v} wirbelfrei, so existiert die Funktion f . Nun gilt

$$\mathbf{rot} \vec{v} = (\chi_y - \psi_z, \varphi_z - \chi_x, \psi_x - \varphi_y) .$$

Soll also \vec{v} wirbelfrei sein, so ergeben sich die Bedingungen

$$\chi_y \equiv \psi_z , \quad \varphi_z \equiv \chi_x , \quad \psi_x \equiv \varphi_y .$$

Dies sind gerade die damals besprochenen Integrabilitätsbedingungen.