

2 Differentialoperatoren der Vektoranalysis

Wir stellen hier eine Anzahl von Rechenvorschriften zusammen. Es wird sich im Laufe dieses Kapitels zeigen, dass alle diese auf den ersten Blick willkürlichen Bildungen eine anschauliche und wichtige Bedeutung haben.

Der erste hier zu besprechende Differentialoperator ist uns bereits bekannt. Es ist der **Gradient** (siehe Kapitel IV, Abschnitt 7). Ist $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ eine Funktion von drei Variablen, also ein Skalarfeld, so ist der Gradient von f definiert durch

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) .$$

Der Gradient ordnet einem Skalarfeld ein Vektorfeld zu. In Kapitel IV, Abschnitt 7 haben wir eine geometrische Beschreibung von $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ kennengelernt:

- (a) Die Länge von $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ ist der Betrag der grössten Richtungsableitung von f in (x, y, z) . Die Richtung von $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ ist die Richtung, in der die grösste Richtungsableitung von f in (x, y, z) erhalten wird.
- (b) Der Vektor $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ steht senkrecht zur Niveauläche von f , die durch den Punkt (x, y, z) geht.

Das Vektorfeld $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ wird auch **Gradientenfeld** von f genannt. Die Eigenschaft (b) des Gradienten liefert sofort das Resultat, dass die Feldlinien von $\mathbf{grad} f$ senkrecht zu den Niveaulächen von f verlaufen. Kennt man also die Niveaulächen von f , so kennt man auch den Verlauf der Feldlinien von $\mathbf{grad} f$ und umgekehrt.

Der zweite der Differentialoperatoren ist die sogenannte **Divergenz**. Die Divergenz ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu. Sie ist wie folgt definiert

$$\mathbf{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) .$$

Beispiel Ist das Vektorfeld \vec{v} homogen, $\vec{v} = \vec{a}$, so ist $\mathbf{div} \vec{v} \equiv 0$.

Beispiel Für das Coulombfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = C \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) = C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = C \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Aus Symmetriegründen folgt dann

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) = C \frac{r^2 - 3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = C \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Daraus ergibt sich für die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) \equiv 0.$$

Beispiel Für das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters

$$\vec{v}(x, y, z) = 2J \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) &= 2J \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) \\ &= 2J \left(\frac{y2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-y2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel Für das Strömungsfeld nach Hagen-Poiseuille ergibt sich

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = 0.$$

Beispiel Für das Gravitationsfeld *innerhalb* einer homogenen Kugel

$$\vec{v}(x, y, z) = -C'' \vec{r} \ , \quad \vec{r} = (x, y, z) \ ,$$

erhalten wir

$$\mathbf{div} \vec{v}(x, y, z) = -3C'' \ .$$

Ausserhalb der homogenen Kugel ist das Gravitationsfeld ein Coulombfeld, und seine Divergenz ist deshalb Null (siehe oben).

Der dritte der Differentialoperatoren ist die sogenannte **Rotation**. Die Rotation ordnet einem Vektorfeld wiederum ein Vektorfeld zu. Sie ist definiert durch

$$\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \ .$$

Beispiel Ist das Vektorfeld homogen, $\vec{v} = \vec{a}$, so ist

$$\mathbf{rot} \vec{v} = (0, 0, 0) \ .$$

Beispiel Für das Geschwindigkeitsfeld eines rotierenden starren Körpers $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ erhalten wir

$$\mathbf{rot} \vec{v} = 2 (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \ .$$

Die Rotation dieses Vektorfeldes \vec{v} ist also ein Mass für die Winkelgeschwindigkeit der Rotation.

Beispiel Für das Coulombfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = C \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \ , \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

erhält man

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = C \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} \right) = C \left(\frac{-3r^2 y/r + y 3r^2 z/r}{r^6} \right) = 0 \ .$$

Aus Symmetriegründen sind auch die übrigen zwei Komponenten des Vektors **rot** \vec{v} Null.

Beispiel Für das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters

$$\vec{v}(x, y, z) = 2J \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) &= \left(0, 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ &= 2J \left(0, 0, \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Beispiel Für das Strömungsfeld nach Hagen-Poiseuille erhält man

$$\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) = (-2Cy, 2Cx, 0) .$$

Beispiel Für das Gravitationsfeld innerhalb einer homogenen Kugel

$$\vec{v}(x, y, z) = -C'' \vec{r} , \quad \vec{r} = (x, y, z) ,$$

erhält man

$$\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) \equiv (0, 0, 0) .$$

Neben diesen drei Differentialoperatoren **grad**, **div**, **rot** der Vektoranalysis treten natürlich auch deren Zusammensetzungen auf. (Achtung, nicht jede Zusammensetzung ist sinnvoll!) Für diese gelten die folgenden Identitäten.

Der zusammengesetzte Operator **div grad** ordnet einem Skalarfeld wiederum ein Skalarfeld zu. Es gilt

$$\mathbf{div grad} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} .$$

In Anwendungen tritt dieser Operator häufig auf (siehe z.B. Kapitel IV, Abschnitt 8). Er heisst auch **Laplace-Operator** und wird mit Δ bezeichnet.

Für die Zusammensetzung von **grad** und **rot** folgt

$$\mathbf{rot\ grad\ } f \equiv (0, 0, 0) \ .$$

Satz *Die Rotation eines Gradientenfeldes ist Null.*

Für die Zusammensetzung von **rot** und **div** folgt

$$\mathbf{div\ rot\ } \vec{v} \equiv 0 \ .$$

Satz *Die Divergenz eines Rotationsfeldes ist Null.*

Die beiden anderen sinnvollen Zusammensetzungen **rot rot** und **grad div** sind untereinander durch die Formel

$$\mathbf{rot\ rot\ } \vec{v} = \mathbf{grad\ div\ } \vec{v} - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3) \ .$$

verbunden.

Alle diese Identitäten lassen sich einfach beweisen, indem man auf die Definitionen der Differentialoperatoren zurückgeht. Wir überlassen dies dem Leser.