

4 Der Fluss

Es sei ein Vektorfeld \vec{v} gegeben, das im Bereich $D(\vec{v})$ definiert ist. Wir betrachten ein vollständig in $D(\vec{v})$ liegendes Flächenstück S , das durch eine Parameterdarstellung gegeben ist und auf dem die eine der beiden Normalenrichtungen \vec{n} ausgezeichnet ist. Ist \vec{v} das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung, so können wir fragen, wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit in Richtung \vec{n} durch das Flächenstück S hindurchfließt. Diese Grösse nennt man den **Fluss** Φ des Vektorfeldes \vec{v} in Richtung \vec{n} durch S .

Am einfachsten ist diese Frage natürlich zu beantworten, wenn S ein ebenes Flächenstück und \vec{v} ein homogenes Vektorfeld ist. Das pro Zeiteinheit durch S in Richtung \vec{n} fließende Volumen ist dann das Volumen des (schiefen) Zylinders mit Grundfläche S und durch \vec{v} gegebenen Mantellinien. Dieses Volumen ist offensichtlich

$$\Phi = (\vec{v} \cdot \vec{n}) O ,$$

wo O der Flächeninhalt von S ist (siehe Figur 1).

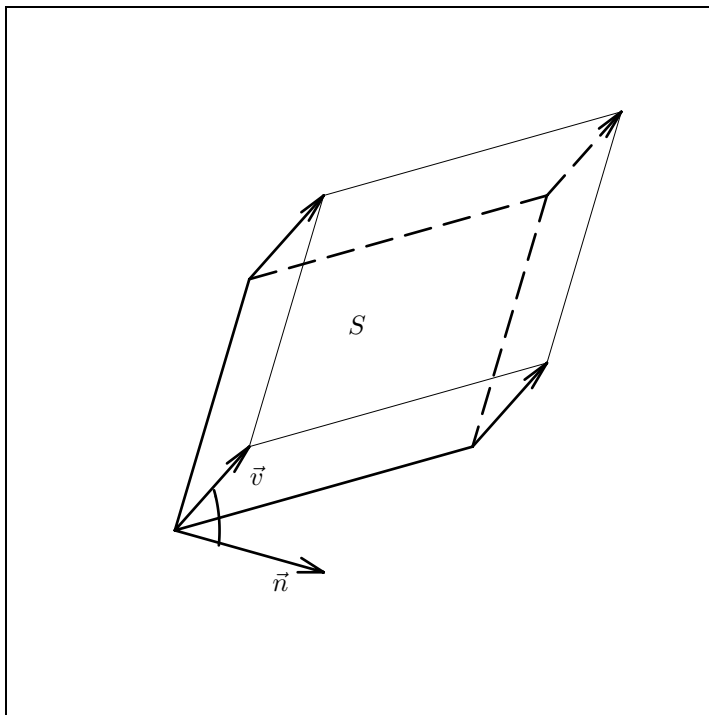


FIG. 1 :
Fluss eines homogenen
Vektorfeldes durch ein
ebenes Rechteck

Im allgemeinen Fall zerlegen wir S in “kleine” Teilbereiche dS ; natürlich tun wir dies mit Vorteil längs der durch die Parameterdarstellung von S gegebenen Parameterlinien. Diese kleinen Teilbereiche dS können approximativ als eben und das Vektorfeld in jedem dieser Teilbereiche approximativ als homogen angesehen werden (siehe Figur 2). Der von dS herrührende Anteil $d\Phi$ des Flusses ist dann offenbar

$$d\Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO ,$$

wo dO der Flächeninhalt von dS bezeichnet. Die “Summe” all dieser Anteile, also das Integral, ist dann der **Fluss** des Vektorfeldes \vec{v} durch S in Richtung \vec{n} :

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO .$$

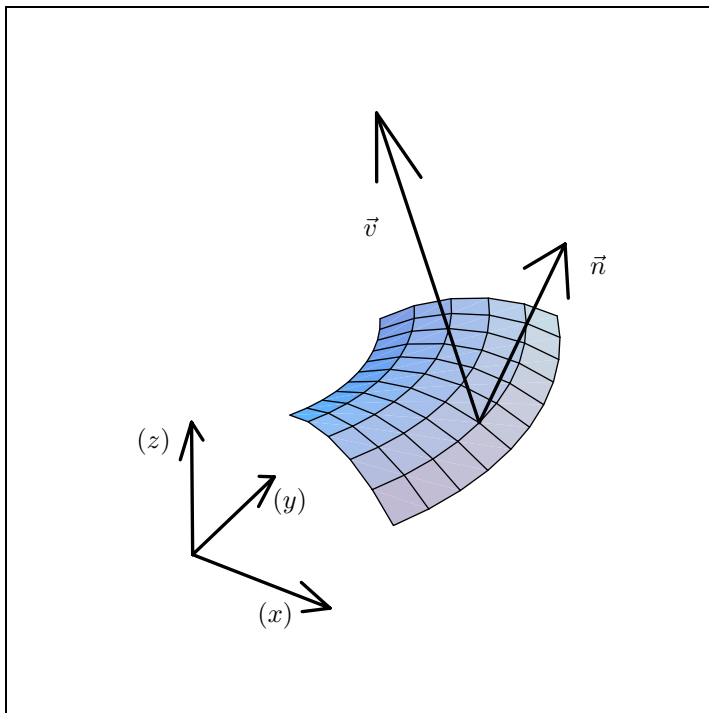


FIG. 2:
Fluss eines Vektorfeldes
durch ein Flächenstück

Beispiel Gegeben ist eine elektrische Ladung e im Ursprung des Koordinatensystems. Gesucht ist der Fluss des zugehörigen Coulombfeldes durch eine Kugeloberfläche mit Mittelpunkt in O und Radius R von innen nach aussen. Es gilt

$$\vec{v} = C \frac{e}{|\vec{r}|^3} \vec{r} .$$

Damit ist

$$\Phi = \iint_S C \frac{e}{R^3} \vec{r} \cdot \vec{n} \, dO ,$$

wo \vec{n} den äusseren Normaleneinheitsvektor der Kugeloberfläche bezeichnet. Da \vec{r} und \vec{n} parallel sind, gilt $\vec{r} \cdot \vec{n} = R$. Damit folgt

$$\Phi = C \frac{e}{R^2} \iint_S dO = C \frac{e}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi C e .$$

Der Fluss des Coulombfeldes zur Ladung e durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R , deren Mittelpunkt mit e zusammenfällt, ist proportional zur Grösse der Ladung e und unabhängig vom Radius R .

Nicht immer ist die Berechnung des Flusses so einfach. Es sei das Flächenstück S durch die Parameterdarstellung

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) , \quad (u, v) \in B$$

gegeben. Daraus folgt für den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(u, v)$

$$\vec{n}(u, v) = \pm \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|} .$$

Das Vorzeichen hängt davon ab, welche der beiden Normalenrichtungen auf S wir auszeichnen. Da nach Abschnitt 3 das Flächenelement dO durch

$$dO = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \, du \, dv$$

gegeben ist, folgt für den Fluss

$$\Phi = \pm \iint_B \vec{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) \, du \, dv .$$

Dabei ist B der zu S gehörige Parameterbereich in der (u, v) -Ebene. Wie nicht anders zu erwarten war, führt die Umkehrung der Flussrichtung, d.h. die Wahl des anderen Normaleneinheitsvektors zu einem Vorzeichenwechsel.

Beispiel Es sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (xz, z, y)$$

gegeben. Gesucht ist der Fluss Φ von innen nach aussen von \vec{v} durch die Oberfläche S der Einheitskugel mit Mittelpunkt in O . Die Fläche S kann durch die Parameterdarstellung

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$$

mit $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$ beschrieben werden. Dann gilt (siehe Abschnitt 3)

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) .$$

Dieser Normalenvektor (*kein* Einheitsvektor) ist nach *innen* gerichtet. Damit erhalten wir für den Fluss von innen nach aussen, also in der zu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ entgegengesetzten Richtung

$$\begin{aligned} \Phi &= - \iint_B \vec{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) \, du \, dv \\ &= \iint_B (\sin v \cos u \cos v, \cos v, \sin v \sin u) \cdot (\sin^2 v \cos u, \sin^2 v \sin u, \sin v \cos v) \, du \, dv \\ &= \iint_B (\sin^3 v \cos v \cos^2 u + \sin^2 v \cos v \sin u + \sin^2 v \cos v \sin u) \, du \, dv \\ &= \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos v \cos^2 u \, du \\ &= \pi \int_0^\pi \sin^3 v \cos v \, dv \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \sin^4 v \right]_0^\pi \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Beispiel Gesucht ist der Fluss (in Richtung der äusseren Normalen) des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$$

durch den Kegelmantel des Kegels mit Spitze in O , der Achse gleich der z -Achse, dem halben Öffnungswinkel $\pi/4$ und der Höhe 1. Der Kegelmantel lässt sich durch die Parameterdarstellung

$$(\rho, \varphi) \rightarrow (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$$

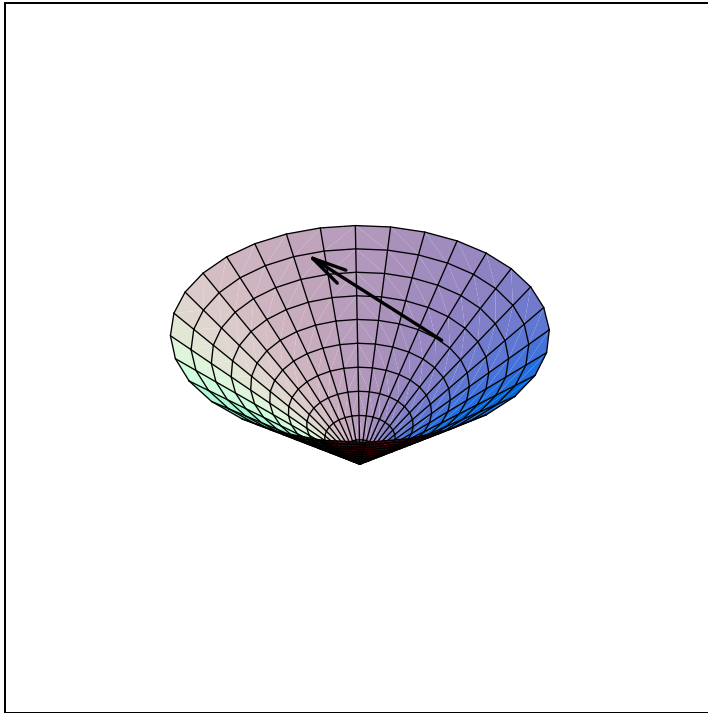


FIG. 3:
Kegelmantel mit
Normalenvektor $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi$

beschreiben, wobei ρ und φ Polarkoordinaten in der (x, y) -Ebene bezeichnen und der Bereich B durch $0 \leq \rho \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gegeben ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{r}_\rho(\rho, \varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 1) \\ \vec{r}_\varphi(\rho, \varphi) &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) \\ \vec{r}_\rho(\rho, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\rho, \varphi) &= (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) = (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, \rho) .\end{aligned}$$

Dieser Normalenvektor ist nach innen gerichtet (siehe Figur 3). Deshalb gilt für den gesuchten Fluss Φ

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_B (2\rho \cos \varphi - \rho^2 \sin \varphi, \rho^2 \cos \varphi + 3\rho \sin \varphi, \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \rho) \cdot (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, -\rho) \, d\rho \, d\varphi \\ &= \iint_B (2\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi + \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi + 3\rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2) \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (2\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi + 3\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2) .\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

folgt schliesslich

$$\Phi = \int_0^1 (2\rho^2\pi + 3\rho^2\pi + \rho^2 2\pi) \, d\rho = 7\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = 7\pi/3 \, .$$