

### 3 Flächen in Parameterdarstellung

Ein **Flächenstück**  $S$ , auch kurz eine Fläche genannt, im dreidimensionalen Raum lässt sich wie folgt beschreiben

- (a) Als Graph einer Funktion von zwei Variablen  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ , oder
- (b) durch eine Gleichung  $g(x, y, z) = 0$ , oder
- (c) durch eine Parameterdarstellung

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$

Eine Parameterdarstellung ist nichts anderes als eine Abbildung eines Bereiches  $B$  der  $(u, v)$ -Ebene (Parameterebene) in den dreidimensionalen Raum (siehe Figur 1).

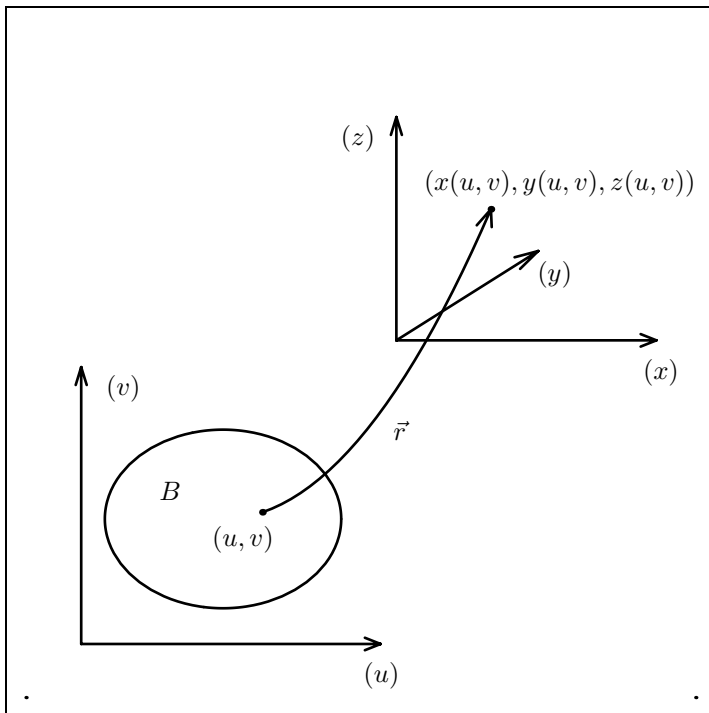


FIG. 1 :  
Parameterdarstellung einer  
Fläche als Abbildung eines  
Bereichs  $B$  der  $(u, v)$ -Ebene in  
den dreidimensionalen Raum

**Beispiel** Die Ebene durch den Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , aufgespannt durch die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} \neq (0, 0, 0)$  wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}: (u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v)$$

bzw. durch die Gleichung

$$c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0) = 0 .$$

Hält man in der Parameterdarstellung eines Flächenstücks  $S$  den Parameter  $v$  fest,  $v = v_0$ , so ist

$$u \rightarrow \vec{r}(u, v_0)$$

die Parameterdarstellung einer Kurve ( $u$ -Linie) auf der Fläche. Hält man den Parameter  $u$  fest,  $u = u_0$ , so ist

$$v \rightarrow \vec{r}(u_0, v)$$

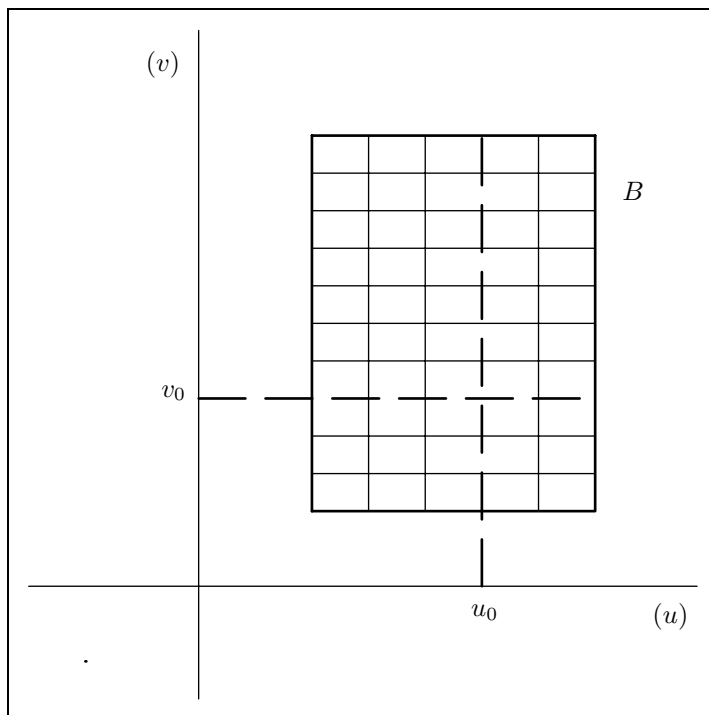


FIG. 2:  
Zur Definition der  
Parameterlinien

die Parameterdarstellung einer Kurve ( $v$ -Linie) auf der Fläche (siehe Figuren 2,3). Diese Kurven auf dem dargestellten Flächenstück  $S$  heissen **Parameterlinien**. Man vergleiche dazu Kapitel

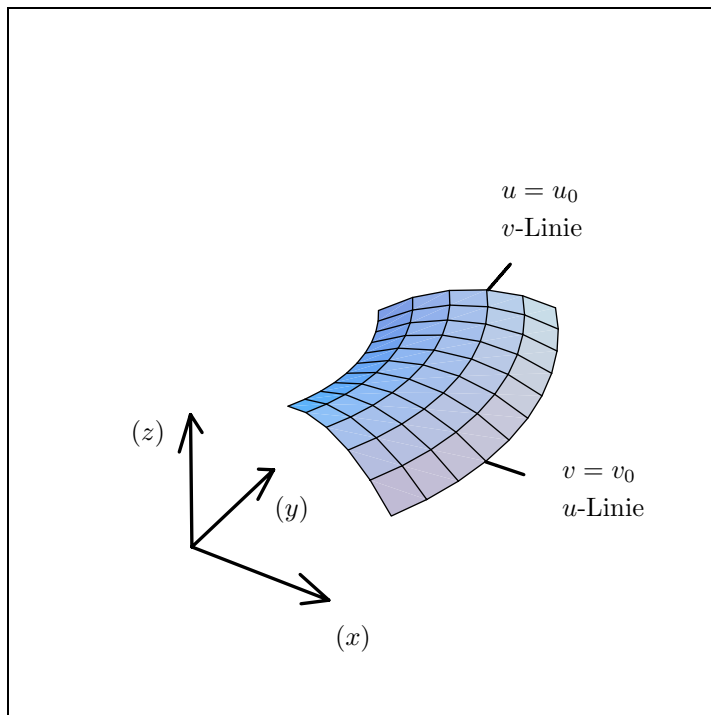


FIG. 3:  
Parameterlinien auf einer Fläche

V, Abschnitt 4 über Koordinatentransformationen, wo die *Koordinatenlinien* auf ganz analoge Weise definiert worden sind.

**Beispiel** Die Oberfläche der Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Ursprung lässt sich durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

beschreiben. Eine Parameterdarstellung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe der Kugelkoordinaten. Setzen wir  $u = \varphi$  und  $v = \theta$  dann stellt

$$(u, v) \rightarrow (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v)$$

mit  $0 \leq u \leq 2\pi$  und  $0 \leq v \leq \pi$  die Kugeloberfläche dar (siehe Figur 4). Die Parameterlinien sind die von der Geographie auf der Erdkugel her bekannten Breitenkreise ( $v$  konstant) und Meridiane ( $u$  konstant).

**Beispiel** Die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit halbem Öffnungswinkel  $\alpha$ , Spitze im Ursprung und  $z$ -Achse als Achse lässt sich durch die folgende Parameterdarstellung beschreiben. Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ( $\theta = \alpha$ ) erhält man eine Parameterdarstellung dieser Fläche,

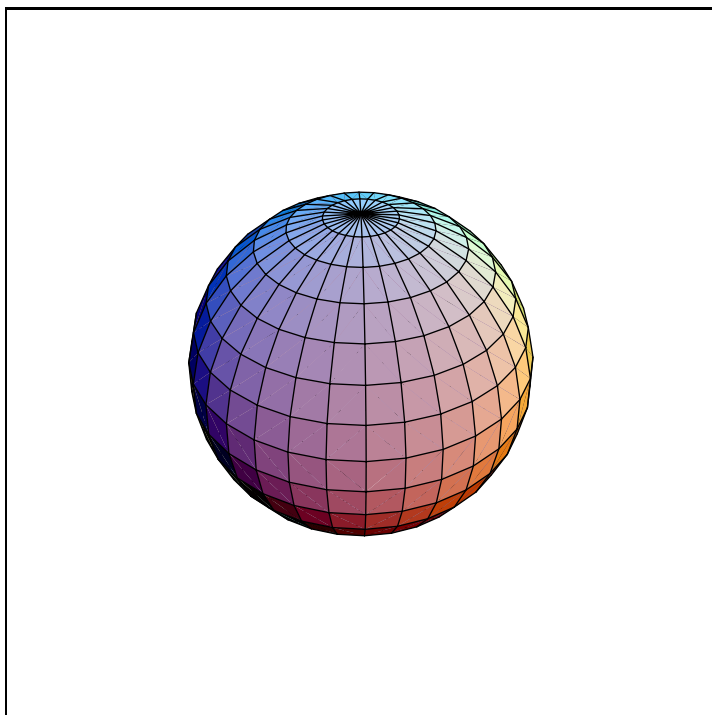


FIG. 4:  
Parameterdarstellung  
einer Kugel

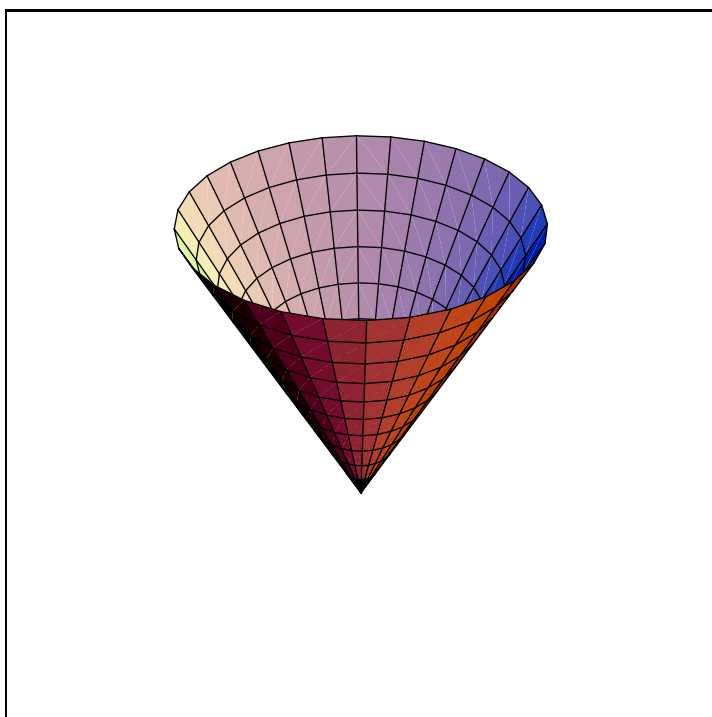


FIG. 5:  
Parameterdarstellung  
eines Kegels

indem man  $u = r$  und  $v = \varphi$  setzt, nämlich

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha) .$$

Der zur Mantelfläche gehörige Parameterbereich ist durch  $0 \leq u < \infty$  und  $0 \leq v \leq 2\pi$  gegeben (siehe Figur 5). Die  $u$ -Linien sind die Mantellinien des Kegels, die  $v$ -Linien sind die zur  $(x, y)$ -Ebene parallelen Kreise mit Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse.

**Beispiel** Es sei eine Kurve  $K$  durch die Parameterdarstellung

$$u \rightarrow \vec{s}(u) = (x(u), y(u), z(u))$$

gegeben. Die Fläche, die beim Durchlaufen der Kurve  $K$  von der Tangente an die Kurve überstrichen wird, heisst *Tangentenfläche*  $S$  der Kurve. Wir setzen  $\vec{t}(u) = \dot{\vec{s}}(u)$  und erhalten damit die folgende Parameterdarstellung von  $S$

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \vec{s}(u) + v \vec{t}(u) .$$

Die  $v$ -Linien sind gerade die Tangenten an die Kurve  $K$ , die  $u$ -Linie, die zu  $v = 0$  gehört, ist die Kurve  $K$ .

Die Fläche  $S$  sei durch die Parameterdarstellung  $(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v)$  gegeben. Auf  $S$  halten wir den Punkt  $P$  fest. Er gehöre zu den Parametern  $(u_0, v_0)$ . Wir wollen die **Tangentialebene** an  $S$  im Punkte  $P$  studieren, insbesondere den zugehörigen **Normaleneinheitsvektor**  $\vec{n}(u_0, v_0)$ . Zu diesem Zweck betrachten wir die durch  $P$  gehende  $u$ -Linie

$$u \rightarrow \vec{r}(u, v_0)$$

und die durch  $P$  gehende  $v$ -Linie

$$v \rightarrow \vec{r}(u_0, v) .$$

Die Tangentialvektoren dieser beiden Kurven im Punkte  $P$ , d.h. die Vektoren  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  und  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  spannen offenbar die Tangentialebene auf. Damit ist ihr Vektorprodukt ein zur Fläche  $S$  in  $P$  senkrecht stehender Vektor. Der normale *Einheitsvektor* zur Fläche  $S$  in  $P$  wird also durch

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)|}$$

beschrieben (siehe Figur 6). Natürlich sind für  $\vec{n}$  zwei Richtungen möglich.

**Beispiel** Gesucht ist der Normaleneinheitsvektor der Tangentenfläche

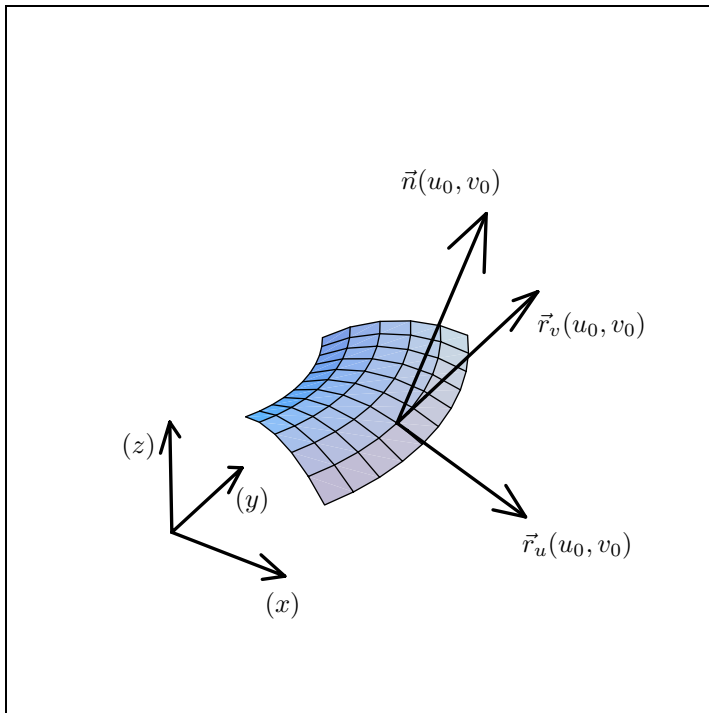


FIG. 6:  
Normalenvektor zu einer durch  
eine Parameterdarstellung  
gegebenen Fläche

$$(u, v) \rightarrow \vec{s}(u) + v\dot{\vec{s}}(u) .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u, v) &= \dot{\vec{s}}(u) + v\ddot{\vec{s}}(u) , \\ \vec{r}_v(u, v) &= \dot{\vec{s}}(u) .\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (\dot{\vec{s}}(u) + v\ddot{\vec{s}}(u)) \times \dot{\vec{s}}(u) = v(\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)) ,$$

also

$$\vec{n}(u, v) = \pm \frac{\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)}{|\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)|} .$$

Wir stellen fest, dass  $\vec{n}(u, v)$  in diesem Beispiel vom Parameter  $v$  unabhängig ist. Dies bedeutet, dass der Normaleneinheitsvektor auf einer  $v$ -Linie konstant ist. Da die  $v$ -Linien die Tangenten an die ursprünglich gegebene Kurve  $K$  sind, folgt daraus, dass die Tangentialebene an die Fläche im Punkte  $P$  diese längs der durch  $P$  gehenden Tangente an die Kurve  $K$  berührt.

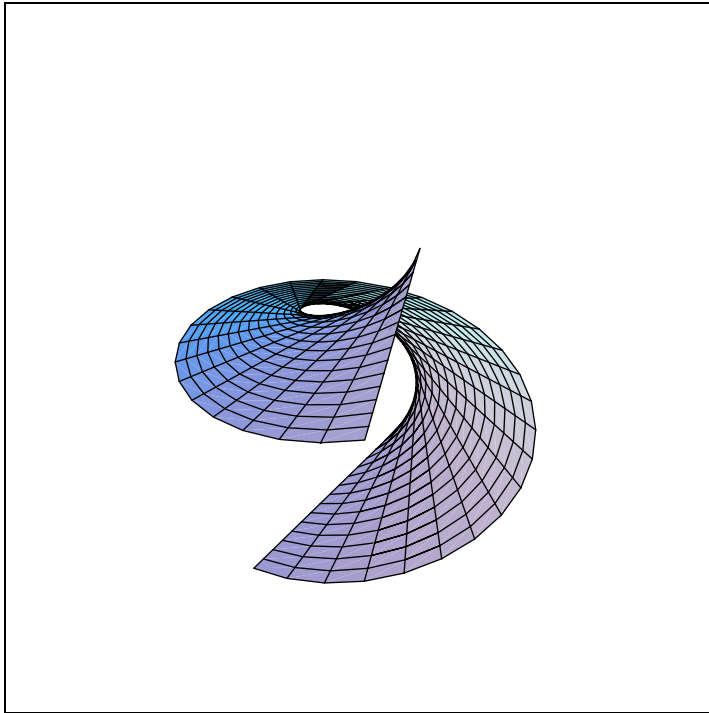


FIG. 7:  
Tangentenfläche an die  
Schraubenlinie. Der gezeichnete  
Teil gehört zu negativen Werten  
des Parameters  $v$ .

**Beispiel** Wir betrachten den Spezialfall des vorhergehenden Beispiels, wo die Kurve  $K$  die Schraubenlinie

$$u \rightarrow \vec{s}(u) = (\cos u, \sin u, hu)$$

ist. Die Tangentenfläche (siehe Figur 7)

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \vec{s}(u) + v\dot{\vec{s}}(u)$$

besitzt den Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1}} (-h \sin u, h \cos u, -1) ,$$

wobei wir eine der beiden möglichen Richtungen des Normaleneinheitsvektors ausgezeichnet haben. Berechnet man den Winkel  $\omega$  zwischen  $\vec{n}(u, v)$  und dem Einheitsvektor in  $z$ -Richtung, so erhält man

$$\cos \omega = (0, 0, 1) \cdot \vec{n}(u, v) = \frac{-1}{\sqrt{h^2 + 1}} .$$

Wir entnehmen diesem Resultat, dass  $\omega$  unabhängig ist von  $u$  und  $v$ , d.h. dass  $\omega$  auf der ganzen Fläche konstant ist: *die Tangentenfläche an die Schraubenlinie hat gegenüber der  $(x, y)$ -Ebene überall dieselbe Neigung*. Flächen mit dieser Eigenschaft treten etwa als Oberflächen von Aufschüttungen von losem Material in Erscheinung; in der Mathematik heissen sie deshalb auch *Böschungsfächen*.

**Bemerkung** Der Leser überlege sich an dieser Stelle, wie der Normaleneinheitsvektor einer durch eine Gleichung  $g(x, y, z) = 0$  gegebenen Fläche auf ganz andere Art, nämlich mit Hilfe des Gradienten dargestellt werden kann.

Als nächstes interessieren wir uns für den **Oberflächeninhalt** eines durch eine Parameterdarstellung gegebenen Flächenstücks  $S$ . Es sei  $S$  durch die Parameterdarstellung

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v)$$

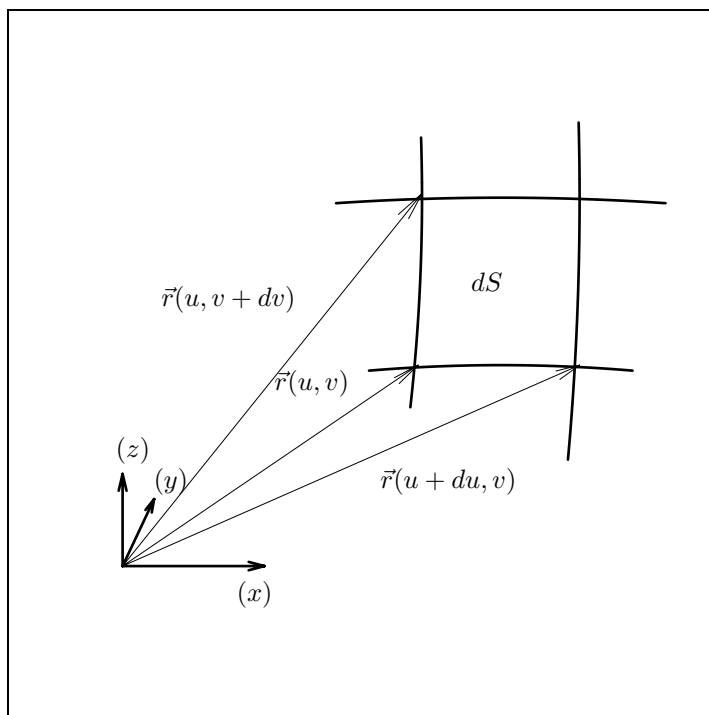


FIG. 8:  
Zur Berechnung der Oberfläche  
eines Flächenstücks

gegeben, wo  $(u, v)$  über den Bereich  $B$  in der  $(u, v)$ -Ebene variiert. Wir denken uns  $S$  durch das Netz der Parameterlinien in kleine Teilstücke eingeteilt. Lassen wir  $u$  um  $du$  und  $v$  um  $dv$  wachsen, so erhalten wir auf der Fläche  $S$  ein differentielles Flächenstück  $dS$ . Dieses kann



näherungsweise als ebenes Parallelogramm angesehen werden, welches durch die Vektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u, v) &\sim \vec{r}_u(u, v) du \\ \vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u, v) &\sim \vec{r}_v(u, v) dv\end{aligned}$$

aufgespannt wird. Sein Flächeninhalt  $dO$  lässt sich approximativ durch den Absolutbetrag des Vektorproduktes ausdrücken (siehe Figur 8). Es ist also

$$dO = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv.$$

Der Flächeninhalt  $O$  des Flächenstücks  $S$  ist die “Summe” all dieser Anteile  $dO$ , also

$$O = \iint_B |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv.$$

Man beachte, dass in der Formel über den Parameterbereich  $B$  in der  $(u, v)$ -Ebene zu integrieren ist, der zum Flächenstück  $S$  gehört.

**Bemerkung** Es handelt sich bei den obigen Überlegungen nicht um eine mathematische Herleitung, vielmehr müsste an dieser Stelle der Begriff des Flächeninhaltes einer gekrümmten Fläche definiert und dann gezeigt werden, dass die obige Formel unter vernünftigen Voraussetzungen an die Funktion  $(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v)$  diesen Flächeninhalt liefert. Hier haben wir uns mit einigen mehr heuristischen Überlegungen begnügt. Der Mathematiker kann allerdings zeigen, dass sie für “vernünftige” Parameterdarstellungen zum richtigen Resultat führen. Insbesondere bedeutet dies, dass der Wert des Integrals nicht von der Parameterdarstellung abhängig ist, die man für ein geometrisch gegebenes Flächenstück gewählt hat: das Integral liefert für verschiedene “vernünftige” Parameterdarstellungen desselben Flächenstücks das gleiche Resultat.

**Beispiel** Wir betrachten die Oberfläche der Kugel vom Radius  $R$  und Mittelpunkt  $O$ ;

$$(u, v) \rightarrow (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v)$$

mit  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u, v) &= (-R \sin v \sin u, R \sin v \cos u, 0) \\ \vec{r}_v(u, v) &= (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, -R \sin v) \\ \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) &= (-R^2 \sin^2 v \cos u, -R^2 \sin^2 v \sin u, -R^2 \sin v \cos v).\end{aligned}$$

Das Vektorprodukt  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  ist ins Innere der Kugel gerichtet. Es ergibt sich

$$dO = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = R^2 \sin v du dv$$

(eine Formel, die sich übrigens auch direkt aus der Figur 9 ablesen lässt) und damit

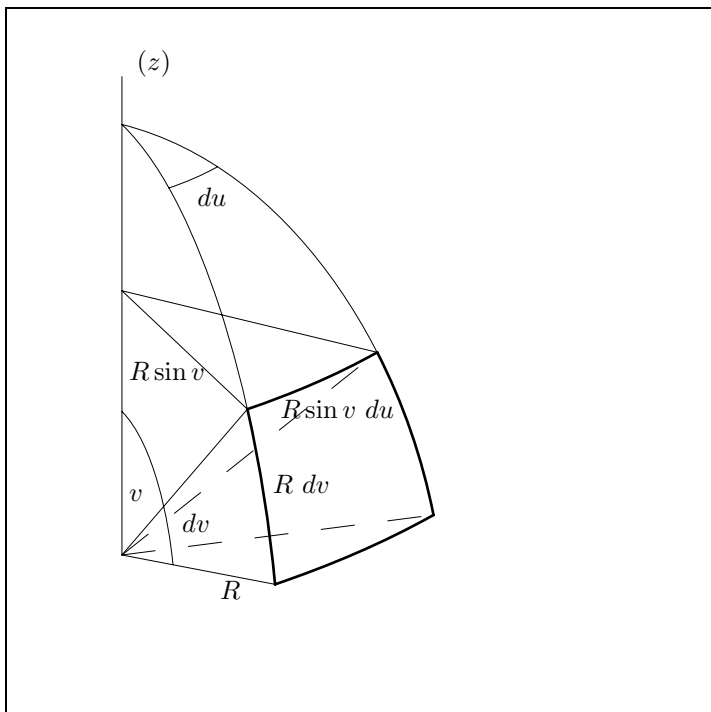


FIG. 9:  
Zur Berechnung der  
Oberfläche einer Kugel

$$O = \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi R^2 \sin v \, dv = R^2 \int_0^{2\pi} du \, [-\cos v]_0^\pi = 4\pi R^2 ,$$

ein uns wohl bekanntes Resultat.

**Beispiel** Gesucht ist der Flächeninhalt der Tangentenfläche an die Schraubenlinie

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, h(u + v))$$

für  $0 \leq u \leq \pi/2$ ,  $-u \leq v \leq 0$  (siehe Figur 10). Dies beschreibt den Teil der Schraubenfläche, der zum Stück der Schraubenlinie im ersten Oktanten gehört und der sich zwischen diesem Kurvenstück und der  $(x, y)$ -Ebene befindet.

Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, v) &= (-\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u, h) \\ \vec{r}_v(u, v) &= (-\sin u, \cos u, h) \\ \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) &= (-hv \sin u, hv \cos u, -v) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Flächenelement

$$dO = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \, du \, dv = |v| \sqrt{h^2 + 1} \, du \, dv ,$$

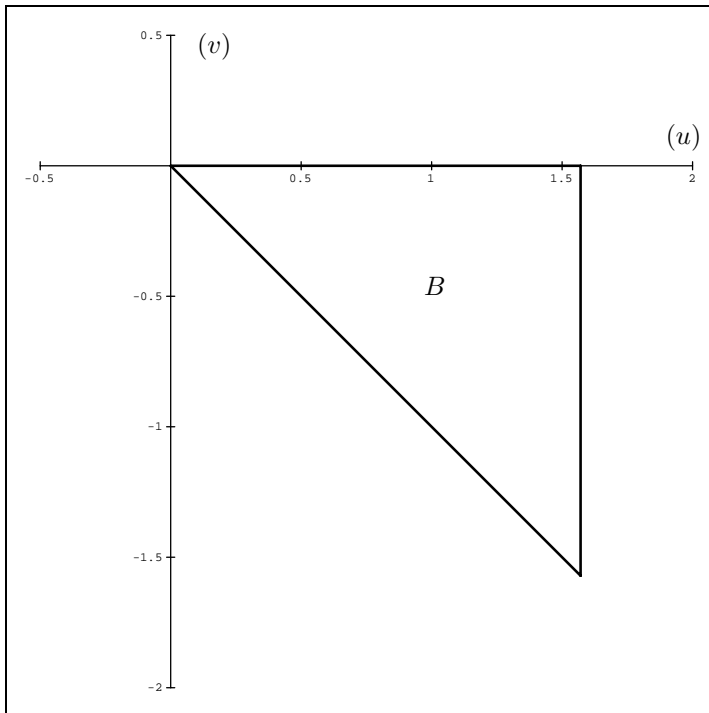


FIG. 10:  
Der Bereich  $B$  der  $(u, v)$ -Ebene

und der Flächeninhalt berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 O &= \iint_B |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \, du \, dv \\
 &= \sqrt{h^2 + 1} \int_0^{\pi/2} du \int_{-u}^0 dv |v| \\
 &= \sqrt{h^2 + 1} \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{v^2}{2} \right]_{-u}^0 du \\
 &= \sqrt{h^2 + 1} \int_0^{\pi/2} \frac{u^2}{2} du \\
 &= \sqrt{h^2 + 1} \left[ \frac{u^3}{6} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \sqrt{h^2 + 1} \frac{\pi^3}{48} .
 \end{aligned}$$

**Beispiel** Wir betrachten den Bereich  $A$  der  $(x, y)$ -Ebene, welcher durch die positive  $x$ -Achse und die Kurve  $\rho = \cos(\varphi/4)$  begrenzt wird (siehe Figur 11). Wie gross ist der Flächeninhalt des

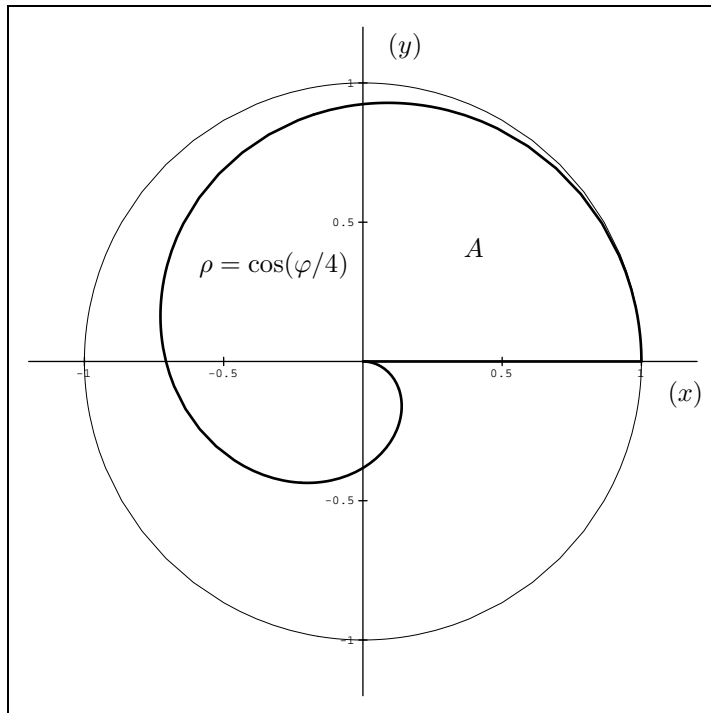


FIG. 11 :  
Der Bereich  $A$  der  $(x, y)$ -Ebene

über dem Bereich  $A$  liegenden Teils  $S$  der Oberfläche der Einheitskugel.

Wir wählen zur Beschreibung des Flächenstücks  $S$  als Parameter Polarkoordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene.  $S$  wird dann durch die Parameterdarstellung

$$(\rho, \varphi) \rightarrow \vec{r}(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \sqrt{1 - \rho^2})$$

beschrieben. Der Definitionsbereich  $A$  ist durch  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \rho \leq \cos(\varphi/4)$  gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{r}_\rho(\rho, \varphi) &= \left( \cos \varphi, \sin \varphi, -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \\ \vec{r}_\varphi(\rho, \varphi) &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) \\ \vec{r}_\rho(\rho, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\rho, \varphi) &= \left( \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cos \varphi, \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sin \varphi, \rho \right) \\ |\vec{r}_\rho(\rho, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\rho, \varphi)| &= \left( \frac{\rho^4}{1 - \rho^2} \cos^2 \varphi + \frac{\rho^4}{1 - \rho^2} \sin^2 \varphi + \rho^2 \right)^{1/2} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt

$$O = \iint_B \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos(\varphi/4)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ -\sqrt{1-\rho^2} \right]_0^{\cos(\varphi/4)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi (-\sqrt{1-\cos^2(\varphi/4)} + 1) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \sin(\varphi/4)) \\
&= [\varphi + 4 \cos(\varphi/4)]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi - 4 .
\end{aligned}$$

Man beachte, dass der Oberflächeninhalt der halben Einheitskugel gerade  $2\pi$  beträgt.

Wir betrachten zum Schluss noch kurz den Fall, wo das Flächenstück  $S$  auf einfache Weise als Graph einer Funktion  $f$  von zwei Variablen  $(x, y)$  gegeben ist. Setzen wir  $u = x$  und  $v = y$ , so erhalten wir aus dieser expliziten Darstellung sofort eine Parameterdarstellung von  $S$

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)) .$$

Das übliche Vorgehen liefert dann mit

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$$

und

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$$

sofort

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1) ,$$

so dass man

$$dO = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} \, du \, dv$$

erhält. Der Oberflächeninhalt eines über dem Bereich  $B$  liegenden Graphen einer Funktion  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  von zwei Variablen berechnet sich also mit Hilfe der Formel

$$O = \iint_B \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1} \, dx \, dy ,$$

wobei wir natürlich wieder zur ursprünglichen Variablenbezeichnung zurückgekehrt sind.