

5 Der Divergenzsatz

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$ und ein endlicher räumlicher Bereich B (Kugel, Torus, etc) mit berandender Fläche ∂B . (Um der mathematischen Strenge Genüge zu tun, setzen wir voraus, dass sich ∂B aus endlich vielen Flächenstücken zusammensetzt, die sich durch stetig differenzierbare Parameterdarstellungen beschreiben lassen.) Auf ∂B sei der *äussere* Normaleneinheitsvektor ausgezeichnet (siehe Figur 1).

Wir setzen voraus, dass \vec{v} in ganz B definiert und dort “regulär” ist, d.h. dass \vec{v} einmal stetig differenzierbar ist. Dann gilt der überraschende und wichtige **Divergenzsatz, Satz von Gauss** (C. F. Gauss 1777 - 1855):

Satz *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

$$\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B \mathbf{div} \vec{v} \, dV .$$

Der Fluss des Vektorfeldes \vec{v} von innen nach aussen durch die berandende Fläche ∂B von B ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz von \vec{v} über den Bereich B .

Beispiel Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (xz, z, y)$$

und die Einheitskugel B mit Mittelpunkt in O . Wir haben in einem Beispiel in Abschnitt 4 bereits gesehen, dass der Fluss Φ (von innen nach aussen) von \vec{v} durch die Kugeloberfläche Null ist. Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\Phi = \iiint_B \mathbf{div} \vec{v} \, dV ,$$

so dass sich der Fluss Φ auch als Volumenintegral berechnen lässt. Wir erhalten $\mathbf{div} \vec{v}(x, y, z) = z$. Für das Integral

$$\iiint_B z \, dV$$

erhält man aber Null, da der von der oberen Halbkugel herrührende Anteil den Anteil der untern Halbkugel kompensiert. (Natürlich kann man mit Hilfe von Kugelkoordinaten dieses Integral auch leicht direkt berechnen: Es gilt $z = r \cos \theta$, $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$. Also

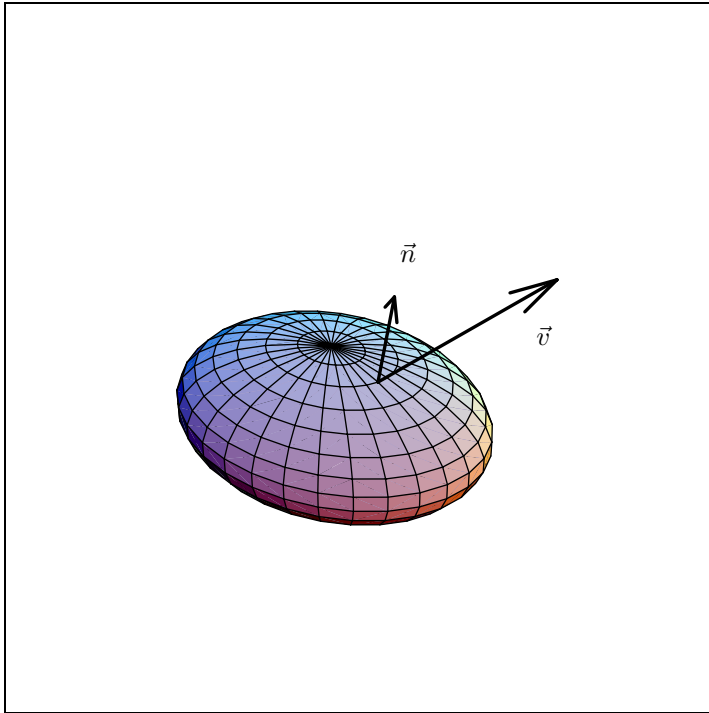


FIG. 1 :
Zum Satz von Gauss

$$\iiint_B z \, dV = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \, r \cos \theta \, r^2 \sin \theta = 0 \, . \,)$$

Wir beweisen den Satz von Gauss hier nicht. Immerhin wollen wir ihn in einem Spezialfall verifizieren, im Spezialfall nämlich, wo der Bereich B ein achsenparalleler Quader ist. Es sei B beschrieben durch die Ungleichungen (siehe Figur 2)

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad e \leq z \leq f \, .$$

Für das Vektorfeld

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

ist dann das Volumenintegral

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \iiint_B \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) \, dV + \iiint_B \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) \, dV + \iiint_B \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) \, dV$$

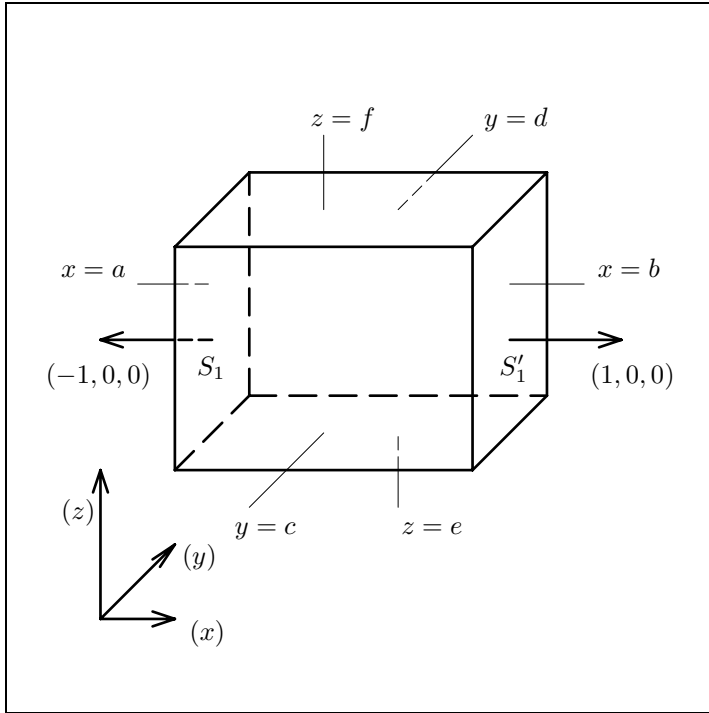


FIG. 2:
Spezialfall des Satzes von Gauss

auszurechnen. Für dessen ersten Summanden gilt nun

$$\begin{aligned}
 \iiint_B \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) \, dV &= \int_e^f dz \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial v_1}{\partial x} \, dx \\
 &= \int_e^f dz \int_c^d dy (v_1(b, y, z) - v_1(a, y, z)) \\
 &= \int_e^f dz \int_c^d dy \vec{v}(b, y, z) \cdot (1, 0, 0) + \int_e^f dz \int_c^d dy \vec{v}(a, y, z) \cdot (-1, 0, 0) \\
 &= \iint_{S_1'} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO + \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO ,
 \end{aligned}$$

wo S_1' die rechte und S_1 die linke Seitenfläche des Quaders B bezeichnet. Der erste der obigen Summanden ist also gleich dem Fluss (von innen nach aussen) des Vektorfeldes \vec{v} durch die Seitenflächen S_1 und S_1' . Analog verfährt man mit den übrigen beiden Summanden. Damit erhält man im Falle des Quaders tatsächlich

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO .$$

Im Rest dieses Abschnittes zeigen wir noch, wie der Satz von Gauss eine koordinatenfreie Definition der Divergenz liefert. Diese ermöglicht dann ihrerseits eine anschauliche Interpretation

der Divergenz eines Vektorfeldes.

Zur Einleitung betrachten wir neben dem (x, y, z) -Koordinatensystem ein zweites kartesisches Koordinatensystem (ξ, η, ζ) . Ist uns im (x, y, z) -Koordinatensystem ein Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

gegeben, so stellt sich dieses im neuen (ξ, η, ζ) -Koordinatensystem natürlich durch andere Komponenten dar:

$$\vec{v} : (\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \vec{v}(\xi, \eta, \zeta) = (\tilde{v}_1(\xi, \eta, \zeta), \tilde{v}_2(\xi, \eta, \zeta), \tilde{v}_3(\xi, \eta, \zeta)) .$$

Es ist auch zu erwarten, dass die partielle Ableitungen der Komponenten $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ nach den neuen Koordinaten ξ, η, ζ mit den partiellen Ableitungen von v_1, v_2, v_3 nach x, y, z wenig mehr zu tun haben werden. Umso überraschender ist deshalb das Resultat, dass *die Summe der partiellen Ableitungen der Komponenten des Vektorfeldes \vec{v} nach den drei entsprechenden Koordinaten vom Koordinatensystem unabhängig ist*:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) .$$

Die *Divergenz des Vektorfeldes*, wie wir sie formal definiert haben, ist vom gewählten (kartesischen) Koordinatensystem unabhängig.

Wir beweisen dies, indem wir mit Hilfe des Satzes von Gauss eine koordinatenfreie Definition von $\mathbf{div} \vec{v}$ angeben. Wir betrachten zu diesem Zweck einen festen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und eine Kugel K_r um P_0 mit Radius r und Oberfläche S_r . Dann gilt nach dem Satz von Gauss

$$\iiint_{K_r} \mathbf{div} \vec{v} dV = \iint_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} dO ,$$

wo \vec{n} den äusseren Normaleneinheitsvektor bezeichnet (siehe Figur 3). Der Mittelwertsatz der Integralrechnung für Volumenintegrale besagt, dass ein Punkt $P_r = (x_r, y_r, z_r)$ in K_r existiert mit

$$\iiint_{K_r} \mathbf{div} \vec{v} dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \mathbf{div} \vec{v}(x_r, y_r, z_r) .$$

Lässt man nun r gegen Null gehen, so ergibt sich

$$\mathbf{div} \vec{v}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iint_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} dO .$$

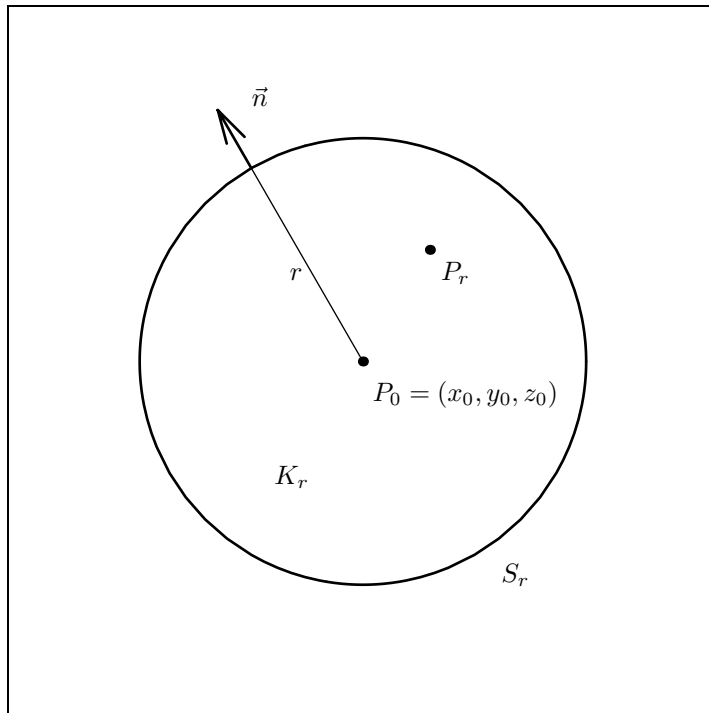


FIG. 3:
Der Fluss durch die Oberfläche
einer (kleinen) Kugel um P_0

Da der Fluss des Vektorfeldes \vec{v} durch S_r definitionsgemäss nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängig ist, ist auch die linke Seite der Gleichung vom gewählten Koordinatensystem unabhängig. Dies war zu beweisen.

Wir sehen aus diesen Überlegungen, dass die Divergenz $\mathbf{div} \vec{v}$ eines Vektorfeldes \vec{v} in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein Mass für den aus der Volumeneinheit um P_0 heraustretenden Fluss des Vektorfeldes ist.

Die Aussage $\mathbf{div} \vec{v}(x_0, y_0, z_0) > 0$, bedeutet, dass in P_0 pro Volumeneinheit ein positiver Fluss erhalten wird. Anschaulich lässt sich dies dadurch deuten, dass in P_0 fortlaufend “Flüssigkeit erzeugt wird”. Man nennt deshalb eine solche Stelle eine **Quelle** des Vektorfeldes \vec{v} .

Die Aussage $\mathbf{div} \vec{v}(x_0, y_0, z_0) < 0$, lässt sich dadurch interpretieren, dass in P_0 fortlaufend “Flüssigkeit verschwindet”; man spricht dann von einer **Senke** oder von einer **negativen Quelle** des Vektorfeldes.

Ein Vektorfeld \vec{v} , dessen Divergenz im ganzen Definitionsbereich verschwindet, $\mathbf{div} \vec{v} \equiv 0$ heisst **quellenfrei**. Anschaulich ist nach dem eben Gesagten klar, dass Strömungsfelder inkompressibler Medien quellenfrei sind; dies lässt sich, wie wir in Abschnitt 6 sehen werden, auch theoretisch bestätigen. Durch direkte Rechnung haben wir ausserdem bereits im Abschnitt 2 gezeigt, dass das Coulombfeld quellenfrei ist.