

U. Stambach: Analysis I/II**Eine zweidimensionale Variante des Divergenzsatzes.**

Neben dem dreidimensionalen Divergenzsatz gibt es auch eine zweidimensionale Variante. Gegeben ist hier ein einfach zusammenhängender Bereich B in der (x, y) -Ebene mit Rand ∂B . Man macht den Rand ∂B zu einem Weg C , indem man die Durchlaufrichtung so wählt, dass mit dem Einheitsvektor in z -Richtung eine Rechtsschraube entsteht. Es sei

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \text{ , } t_A \leq t \leq t_B$$

eine Parameterdarstellung der (geschlossenen) Kurve C in der (x, y) -Ebene.

Ferner ist in B ein (zweidimensionales) Vektorfeld gegeben

$$\vec{v} : (x, y) \rightarrow \vec{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y)) \text{ ,}$$

also eigentlich

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0) \text{ .}$$

Man betrachte nun den geraden Zylinder Z mit Grundfläche B und Höhe 1 und wende darauf den Divergenzsatz an:

$$\iiint_Z \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO \text{ .}$$

Man beachte, dass die Divergenz des zweidimensionalen Vektorfeldes durch den einfachen Ausdruck

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y)$$

gegeben ist. Da der Fluss von \vec{v} durch Grund- und Deckfläche von Z offensichtlich Null ist, spielt nur der Fluss von \vec{v} durch die Mantelfläche des Zylinders eine Rolle. Für die Mantelfläche M erhält man sofort die Parameterdarstellung

$$\vec{r} : (t, s) \rightarrow \vec{r}(t, s) = (x(t), y(t), s)$$

wobei $t_A \leq t \leq t_B$ und $0 \leq s \leq 1$. Für den äusseren(!) Normalenvektor erhält man

$$\vec{r}_t(t, s) \times \vec{r}_s(t, s) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t), 0) \text{ .}$$

Damit erhält man für den Fluss von \vec{v} durch M von innen nach aussen

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO &= \int_{t_A}^{t_B} dt \int ds (v_1(x(t), y(t), s), v_2(x(t), y(t), s)) \cdot (\dot{y}(t), -\dot{x}(t), 0)) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} (v_1(x(t), y(t))\dot{y}(t) - v_2(x(t), y(t))\dot{x}(t)) \, dt \text{ .} \end{aligned}$$

Der letztere Ausdruck kann auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden: einmal als “Fluss” des zweidimensionalen Vektorfeldes \vec{v} von innen nach aussen durch den Rand ∂B des Bereichs B oder als “Arbeit” des Vektorfeldes $\vec{w} = (-v_2, v_1)$ längs des Weges C .

Der zweidimensionale Divergenzsatz kann damit in der folgenden Form ausgesprochen werden, wobei die “Divergenz” und der “Fluss” gemäss den obigen Angaben zu interpretieren sind:

Das Gebietsintegral über die “Divergenz” des zweidimensionalen Vektorfeldes \vec{v} über den Bereich B in der (x, y) -Ebene ist gleich dem “Fluss” des Vektorfeldes \vec{v} durch den Rand ∂B .

Wir bemerken zum Schluss, dass der zweidimensionale Divergenzsatz auch als *Spezialfall des Satzes von Stokes* angesehen werden kann. Man betrachte zu diesem Zweck das Vektorfeld $\vec{w} = (-v_2, v_1)$ und wende darauf den Satz von Stokes bezüglich des Bereiches B in der (x, y) -Ebene mit Randkurve C an:

$$\int_C \vec{w} \cdot d\vec{r} = \iint_B \mathbf{rot} \vec{w} \cdot \vec{n} \, dO ,$$

also wegen $\vec{n} = (0, 0, 1)$

$$\int_{t_A}^{t_B} (-v_2(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + v_1(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) \, dt = \iint_B \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) \right) \, dx \, dy .$$

Es hat sich – wie oben – ergeben:

Die Arbeit des Vektorfeldes $\vec{w} = (-v_2, v_1)$ längs C ist gleich dem Gebietsintegral über B mit der (zweidimensionalen) Divergenz von $\vec{v} = (v_1, v_2)$ als Integranden.

Für **Beispiele von Anwendungen** in der Mechanik vergleiche man etwa: Mahir Behar Sayir: Mechanik 2, Seite 180 und Seite 195.

Auf Seite 179 tritt dort im übrigen auch der Begriff “einfach zusammenhängend” bzw. “mehrfach zusammenhängend” auf, von dem wir im Zusammenhang mit Potentialfeldern gesprochen haben.

Schliesslich stellt man fest, dass auf Seite 195 ein Arbeitsintegral längs eines geschlossenen Weges erscheint (Formel (21.80)). In diesem Anwendungs-Spezialfall braucht man statt “Arbeit” das Wort “Zirkulation” – wie in einigen anderen mechanischen und physikalischen Anwendungen auch.