

## 7 Die Arbeit

In Abschnitt 4 haben wir den Begriff des Flusses eines Vektorfeldes eingeführt. Hier nun geht es um einen weiteren mit einem Vektorfeld verbundenen Begriff, nämlich um die *Arbeit* eines Vektorfeldes. Wie so oft kommt auch hier der Name des mathematischen Begriffs aus einer speziellen Anwendung: Bei der Berechnung der Arbeit, die eine Kraft im physikalisch-mechanischen Sinn leistet, tritt diese mathematische Bildung auf.

Gegeben sei ein reguläres d.h. stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z)$  und ein ganz im Definitionsbereich  $D(\vec{v})$  von  $\vec{v}$  verlaufender Weg  $W$  mit Anfangspunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$ . Unter einem **Weg** verstehen wir eine mit einem Durchlaufsinne versehene Kurve, die sich aus endlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken zusammensetzt. Um zum mathematischen Begriff Arbeit zu gelangen, fassen wir das Vektorfeld  $\vec{v}$  als Kraftfeld auf und fragen nach der mechanischen Arbeit, die  $\vec{v}$  leistet, wenn sich ein Punkt längs des Weges  $W$  von  $P$  nach  $Q$  bewegt.

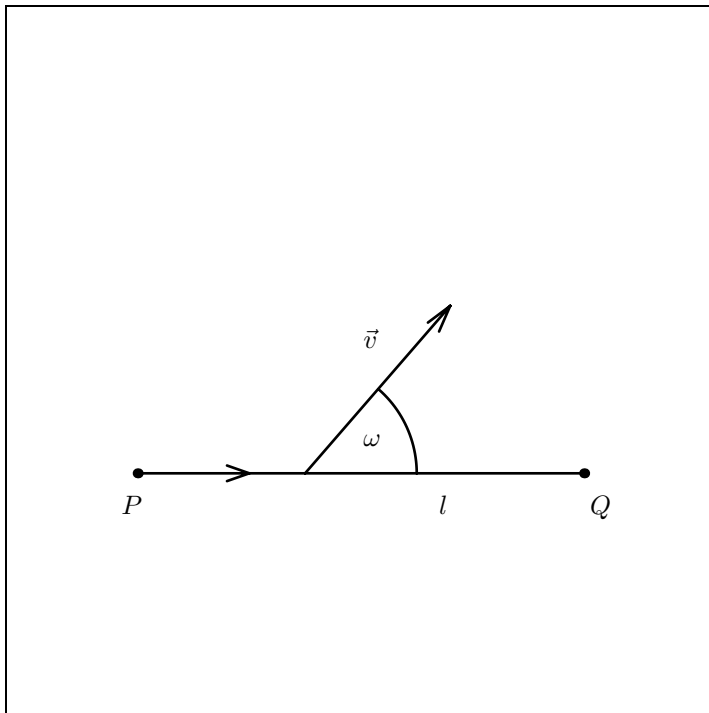


FIG. 1 :  
Die Arbeit; Spezialfall.

Im einfachen *Spezialfall* eines geradlinig verlaufenden Weges  $W$  von  $P$  nach  $Q$  und eines homogenen Vektorfeldes  $\vec{v}$ , ist diese Arbeit gegeben durch (siehe Figur 1)

$$A = |\vec{v}| l \cos \omega = \vec{v} \cdot \vec{PQ} .$$

Dabei bezeichnet  $l$  die Länge von  $W$  und  $\omega$  den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{PQ}$ .

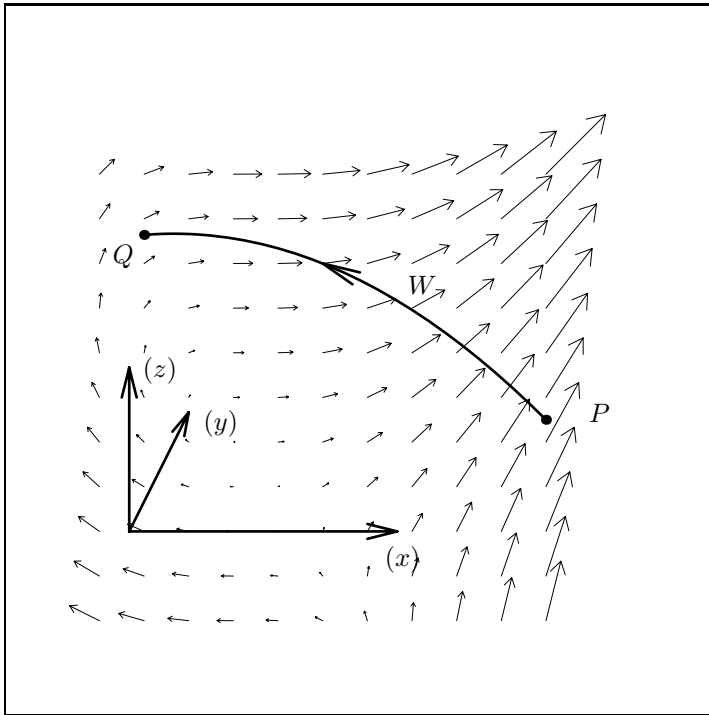


FIG. 2:  
Die Arbeit; allgemeiner Fall.

Im *allgemeinen* Fall unterteilen wir den Weg in “kurze” Teilstücke. Diese können als geradlinig und das Vektorfeld in ihrem Bereich als homogen angesehen werden. Der Anteil  $dA$  an die Arbeit, der von einem solchen Teilstück  $d\vec{r}$  herrührt, ist offenbar gegeben durch

$$dA = \vec{v} \cdot d\vec{r} .$$

Die gesamte Arbeit auf dem Weg  $W$  von  $P$  bis  $Q$  ist dann die “Summe” all dieser Anteile, also das Integral (siehe Figur 2)

$$A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} .$$

Im konkreten Fall ist der Weg  $W$  durch eine Parameterdarstellung gegeben,

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \vec{r}(t_P) = \vec{OP}, \quad \vec{r}(t_Q) = \vec{OQ}, \quad .$$

Dann gilt  $\vec{v} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$  und damit

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} (v_1(x(t), y(t), z(t)), v_2(x(t), y(t), z(t)), v_3(x(t), y(t), z(t))) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) dt . \end{aligned}$$

Der Wert dieses Wegintegrals ist definitionsgemäss die **Arbeit**, die das Vektorfeld  $\vec{v}$  längs des Weges  $W$  leistet.

Wie schon erwähnt, tritt die formale Bildung des Arbeitsintegrals auch in vielen Anwendungen auf, wo das Vektorfeld kein Kraftfeld ist; das Integral trägt dann oft einen anderen Namen. Im Falle eines Strömungsfeldes heisst es *Zirkulation*; im Fall des elektrischen Feldes beschreibt das Integral nichts anderes als die (*elektrische*) *Spannung*.

**Beispiel** Es sei  $\vec{v}$  das Gravitationsfeld eines Massenpunktes, der sich in  $O$  befindet,

$$\vec{v}(x, y, z) = -C \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} .$$

Wir fragen nach der Arbeit  $A$ , die  $\vec{v}$  längs eines Kreises  $K$  mit Mittelpunkt in  $O$  leistet.

Ist  $W$  der durch den Kreis  $K$  gegebene Weg (der Durchlaufsinns spielt in diesem Beispiel keine Rolle), dann ist

$$A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 ,$$

denn  $\vec{v}$  ist gegen den Ursprung  $O$  gerichtet und  $d\vec{r}$  verläuft senkrecht zu  $\vec{r}$ , es ist also  $\vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ .

Es sei ein Weg  $W$  mit Startpunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $-W$  den Weg mit dem umgekehrten Durchlaufsinns. Offensichtlich gilt dann

$$\int_{-W} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_W \vec{v} \cdot (-d\vec{r}) = - \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} .$$

Ist  $W_1$  ein Weg mit Anfangspunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$  und  $W_2$  ein Weg mit Anfangspunkt  $Q$  und Endpunkt  $R$ , so lassen sich  $W_1$  und  $W_2$  zu einem Weg zusammensetzen, den wir mit  $W_1 + W_2$  bezeichnen (siehe Figur 3). Es gilt dann

$$\int_{W_1+W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{W_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{W_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} .$$

**Beispiel** Es sei das Vektorfeld des stromdurchflossenen Leiters gegeben,

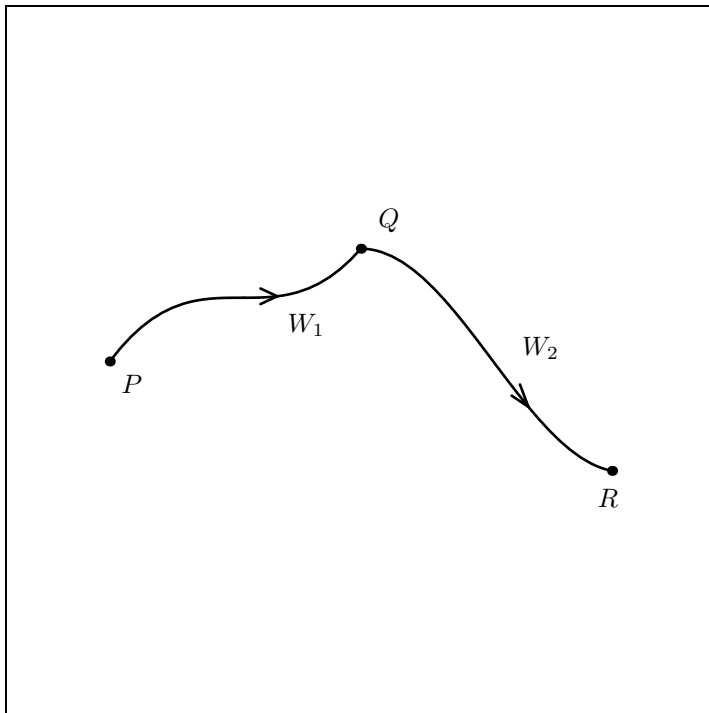


FIG. 3:  
Zusammensetzung von Wegen

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = 2J \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right),$$

und es sei  $W$  der durch

$$t \rightarrow (a \cos t, a \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

beschriebene (geschlossene) Weg. Die Arbeit von  $\vec{v}$  längs des Weges  $W$  berechnet sich dann durch

$$\begin{aligned} A &= \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(a \cos t, a \sin t, 0) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= 2J \int_0^{2\pi} \left( -\frac{a \sin t}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}, \frac{a \cos t}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}, 0 \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t, 0) dt \\ &= 2J \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2J \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Wir werden später auf dieses interessante Beispiel zurückkommen.

**Beispiel** Es sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \rightarrow \vec{v}(x, y, z) = (2xy, x^2 + y^2, 0)$$

gegeben. Gesucht ist die Arbeit, die  $\vec{v}$  längs der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Ellipse

$$E : t \rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ,$$

leistet (siehe Figur 4). Es gilt

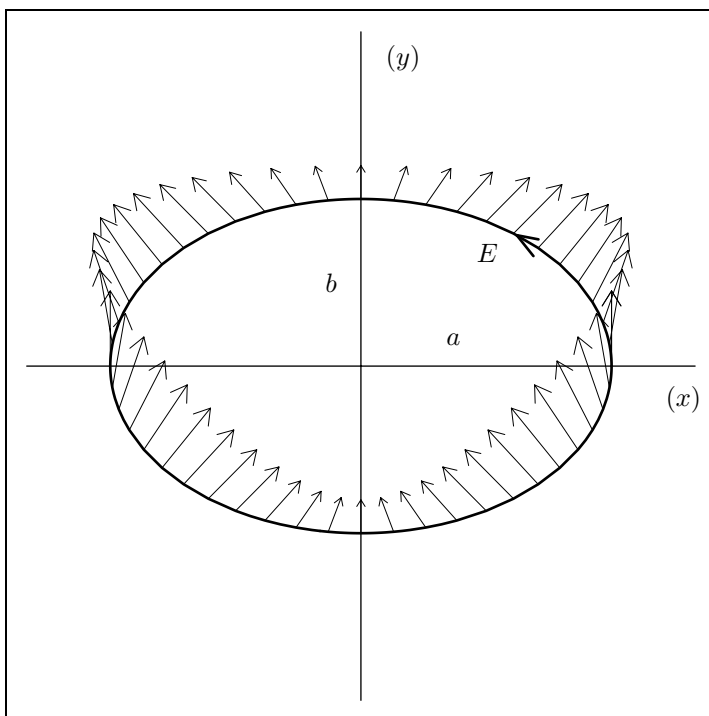


FIG. 4:  
Arbeit des Vektorfeldes  
 $\vec{v}(x, y, z) = (2xy, x^2 + y^2, 0)$   
längs der Ellipse  $E$

$$\begin{aligned} A &= \int_E \vec{v} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (2ab \sin t \cos t, a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t, 0) \cdot (-a \sin t, b \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2a^2 b \sin^2 t \cos t + a^2 b \cos^3 t + b^3 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2a^2 b + b^3) \sin^2 t \cos t dt + \int_0^{2\pi} a^2 b \cos^3 t dt \\ &= 0 . \end{aligned}$$