

9 Eine Anwendung des Satzes von Stokes

Wie die Anwendungen des Divergenzsatzes so sind auch die Anwendungen des Satzes von Stokes sehr zahlreich. Zur Illustration stellen wir hier ein Beispiel aus der Elektrodynamik dar.

Wir betrachten ein (instationäres) Magnetfeld

$$\vec{H} : (x, y, z, t) \rightarrow \vec{H}(x, y, z, t) .$$

Im Definitionsbereich dieses Magnetfeldes sei eine geschlossene Kurve C gegeben; diese betrachten wir als Weg, indem wir C mit einem Durchlaufsinne versehen. Konkret können wir uns C als Draht vorstellen, an dem wir die elektrische Spannung messen werden, und zwar in der durch den Durchlaufsinne gegebenen Richtung. Ferner sei S irgend eine Fläche mit Rand $\partial S = C$. Schliesslich zeichnen wir auf S denjenigen Normaleneinheitsvektor aus, der mit dem Durchlaufsinne auf C eine Rechtsschraube bildet (siehe Figur 1). Wir bezeichnen nun mit Z den Fluss von \vec{H} durch S in Richtung \vec{n} ,

$$Z = \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} \, dO .$$

Das physikalische Experiment zeigt dann Folgendes: Falls Z zeitlich variiert, so fliesst in C ein elektrischer Strom, und zwar besagt das von Faraday (M. Faraday 1791 - 1867) stammende Erfahrungsgesetz, dass für die induzierte Spannung die Gleichung

$$V_{\text{ind}} = -\mu_0 \frac{dZ}{dt}$$

gilt, d.h. die induzierte Spannung ist proportional zur Änderung des Flusses Z . Setzt man die Definition von Z ein, so erhält man

$$V_{\text{ind}} = -\mu_0 \frac{dZ}{dt} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} \, dO = -\mu_0 \iint_S \vec{H}_t \cdot \vec{n} \, dO .$$

Wir bringen nun die Spannung V_{ind} mit dem elektrischen Feld \vec{E} in Verbindung und wenden auf das entsprechende (Arbeits-)Integral den Satz von Stokes an:

$$V_{\text{ind}} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO .$$

Da diese Beziehung für sämtliche mögliche Flächen S gelten muss, können wir wie früher vom Verschwinden des Integrals auf das Verschwinden des Integranden schliessen. Es gilt somit

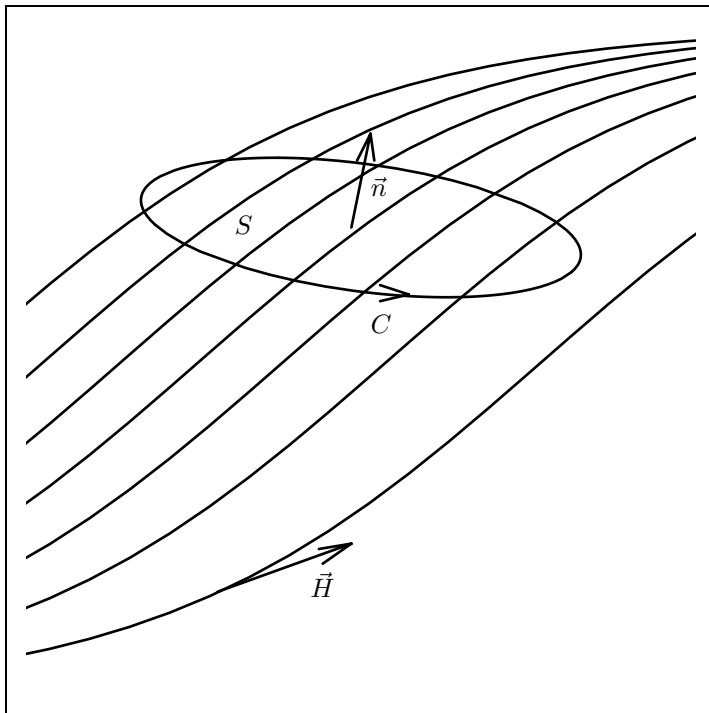


FIG. 1 :
Zum Gesetz von Faraday

$$\mathbf{rot} \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_t = \vec{0} \quad .$$

Dies ist eine weitere der berühmten vier Maxwell'schen Gleichungen, welche die Grundlage der Elektrodynamik bilden.