

6 Anwendungen des Divergenzsatzes

Es gibt sehr viele Anwendungen des Divergenzsatzes. Wir besprechen hier einige davon, und zwar solche, die sich auch ohne detaillierte Kenntnisse der Anwendungsgebiete darstellen lassen. Dabei verläuft die Überlegung in allen Fällen formal gleich: Wir gehen von einem allgemeinen physikalischen Gesetz aus, wenden darauf den Divergenzsatz an und erhalten ein neues physikalisches Gesetz, das vom mathematischen Standpunkt aus wesentlich durchsichtiger und einfacher zu handhaben ist.

Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

In unserm ersten Beispiel leiten wir aus dem sehr allgemeinen physikalischen Gesetz der Erhaltung der Materie die sogenannte Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik her. Wir betrachten ein (instationäres) Strömungsfeld eines Mediums (Gas oder Flüssigkeit)

$$\vec{v} : (x, y, z, t) \rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) .$$

Die Dichte des Mediums im Punkte (x, y, z) zur Zeit t sei durch das Skalarfeld

$$\rho : (x, y, z, t) \rightarrow \rho(x, y, z, t)$$

beschrieben. Es sei nun B ein beliebiger endlicher Bereich, der ganz im Strömungsfeld liegt (siehe Figur 1). Zur Zeit t befindet sich dann im Innern von B die Masse

$$m(t) = \iiint_B \rho(x, y, z, t) \, dV .$$

Die zeitliche Änderung dieser Masse ist folglich gegeben durch

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_B \rho(x, y, z, t) \, dV = \iiint_B \rho_t(x, y, z, t) \, dV ,$$

wobei wir im letzten Schritt unser Wissen über die Ableitung eines Integrals nach einem Parameter benützt haben (siehe Kapitel V, Abschnitt 5). Pro Zeiteinheit tritt durch das Oberflächenelement dS die Masse

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dO$$

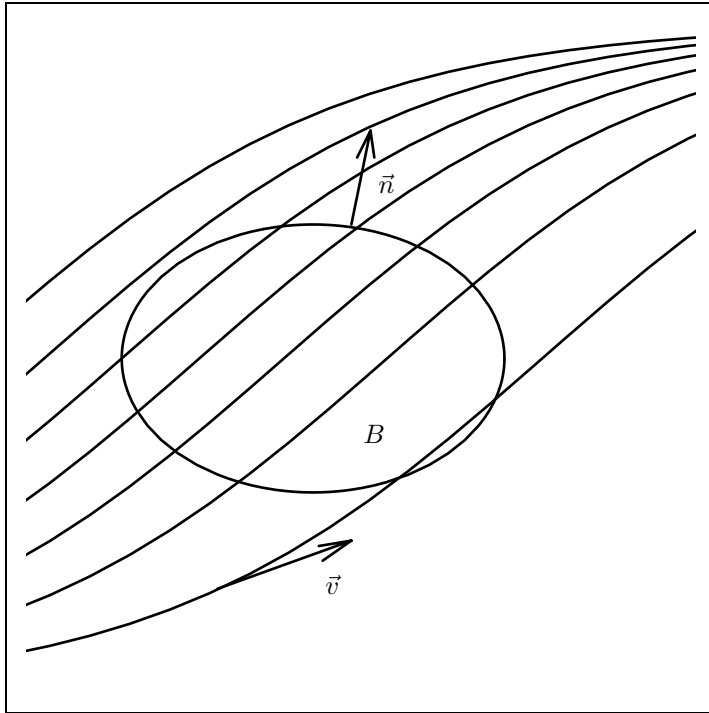


FIG. 1:
Zur Kontinuitätsgleichung

aus, wobei \vec{n} den äusseren Normaleneinheitsvektor bezeichnet. Durch die Gesamtoberfläche ∂B von B geht also die Masse

$$\iint_{\partial B} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dO$$

verloren. Die Materiebilanz (“Gesetz der Erhaltung der Materie”) liefert nun die Gleichung

$$\iiint_B \rho_t \, dV + \iint_{\partial B} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dO = 0 .$$

Die gesamte in B vorhandene Masse nimmt um genau so viel zu, wie durch die Oberfläche ∂B in den Bereich B hineinfliesst. An dieser Stelle wendet man nun auf das in der Gleichung auftretende Flussintegral

$$\iint_{\partial B} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dO$$

den Divergenzsatz an, und zwar für das Vektorfeld

$$\vec{w} : (x, y, z, t) \rightarrow \vec{w}(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t) .$$

Man erhält

$$\iint_{\partial B} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B \mathbf{div} (\rho \vec{v}) \, dV .$$

Daraus ergibt sich die Integralbeziehung

$$\iiint_B (\rho_t + \mathbf{div} (\rho \vec{v})) \, dV = 0 .$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Bereich B im Strömungsfeld erfüllt sein muss, schliessen wir, dass mit dem Integral auch der Integrand verschwindet:

$$\rho_t + \mathbf{div} (\rho \vec{v}) = 0 .$$

Dies ist die wichtige **Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik**. Wir betrachten davon noch einige Spezialfälle

- (a) Im Falle einer stationären Strömung ist $\rho_t \equiv 0$. Dann folgt

$$\mathbf{div} (\rho \vec{v}) \equiv 0 .$$

Dabei gilt natürlich

$$\mathbf{div} (\rho \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \mathbf{div} \vec{v} .$$

- (b) Im Falle einer Strömung eines inkompressiblen Mediums ist ρ zeitlich und örtlich konstant. Dann gilt

$$\mathbf{div} (\rho \vec{v}) = \rho \mathbf{div} \vec{v} ,$$

so dass sich die Kontinuitätsgleichung in diesem Fall auf die Aussage

$$\mathbf{div} \vec{v} \equiv 0$$

reduziert. Wir haben damit formal bewiesen, dass Strömungsfelder inkompressibler Medien (z.B. von Flüssigkeiten) quellenfrei sind (vergleiche Abschnitt 5).

Wärmeleitungsgleichung

Unser zweites Beispiel geht aus vom grundlegenden physikalischen Erhaltungssatz der Energie. Wir werden daraus die sogenannte Wärmeleitungsgleichung herleiten. Es sei ein homogener Körper K gegeben. Die Temperatur an der Stelle (x, y, z) zur Zeit t sei durch das instationäre Skalarfeld

$$u : (x, y, z, t) \rightarrow u(x, y, z, t)$$

beschrieben. Wir betrachten nun einen beliebigen ganz in K liegenden Bereich B mit Oberfläche ∂B (siehe Figur 2). Die zur Zeit t in B befindliche Wärmemenge $W(t)$ ist gegeben durch

$$W(t) = \iiint_B c \rho u(x, y, z, t) dV ,$$

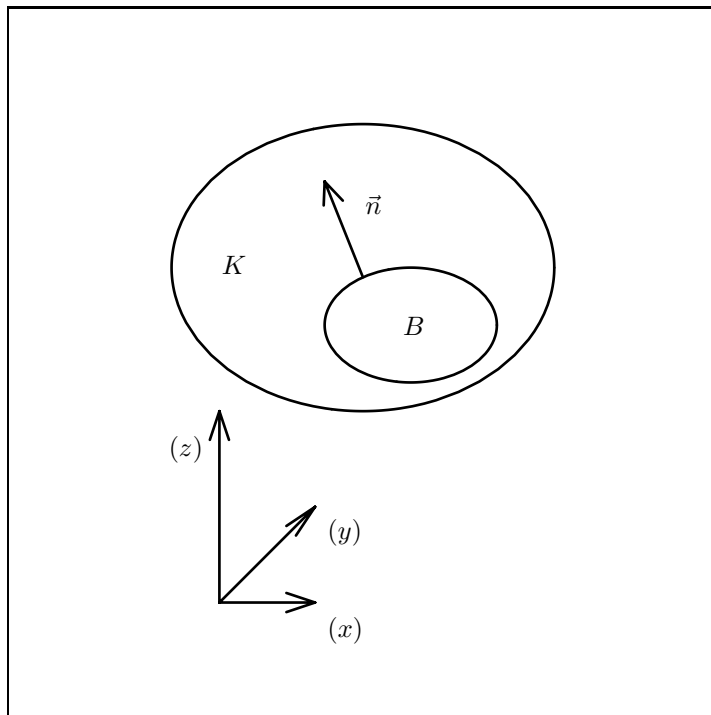


FIG. 2:
Zur Wärmeleitungsgleichung

wobei c die spezifische Wärme und ρ die Dichte des Materials ist. (Beide Größen sind konstant, da wir K als homogen vorausgesetzt haben.) Die Änderung der Wärmemenge $W(t)$ ist somit gegeben durch

$$\frac{dW}{dt}(t) = \iiint_B c \rho u_t(x, y, z, t) dV .$$

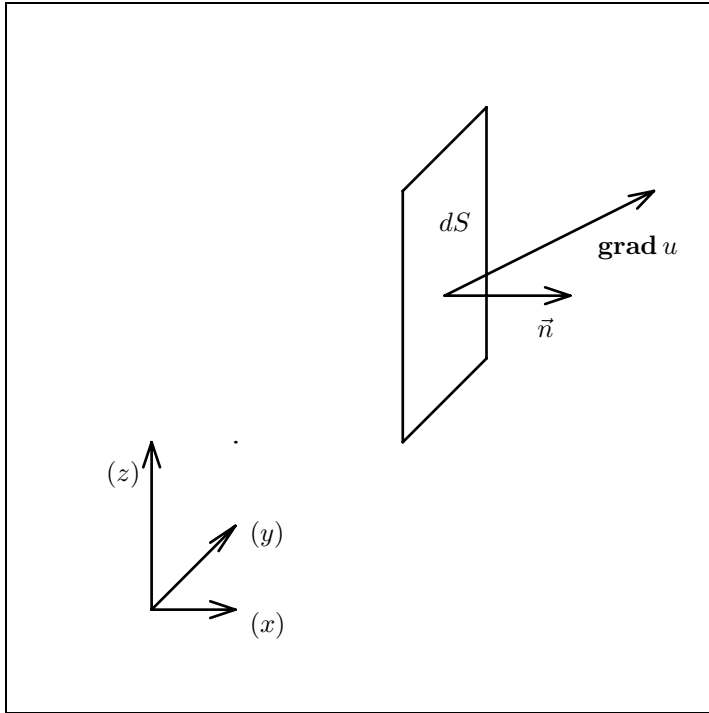


FIG. 3:
Zum Ansatz von Newton
für die Wärmeleitung

Da in B weder Wärme erzeugt noch vernichtet wird, kann die Änderung der Wärmemenge $W(t)$ nur durch einen Wärmefluss durch die Oberfläche ∂B von B verursacht werden. In dieser Form benützen wir den Erhaltungssatz der Energie. Um den Wärmefluss durch die Oberfläche mathematisch ausdrücken zu können, greifen wir auf das von Newton beschriebene Erfahrungsgesetz zurück (siehe Figur 3): *Die pro Zeiteinheit durch das differentielle Flächenstück dS in Richtung des Normaleneinheitsvektors \vec{n} hindurchfliessende Wärmemenge ist proportional zum Temperaturgefälle in Richtung \vec{n} , also zur Richtungsableitung $D_{\vec{n}}u$ von u in Richtung \vec{n} und natürlich proportional zum Flächeninhalt dO des Flächenstücks dS . Wegen $D_{\vec{n}}u = \vec{n} \cdot \mathbf{grad} u$ (siehe Kapitel IV, Abschnitt 7) folgt für die durch dS hinaus tretende Wärmemenge*

$$dW = -k \vec{n} \cdot \mathbf{grad} u \, dO.$$

Dabei ist k eine positive Konstante. Wir erhalten damit die Gleichung

$$\iiint_B c \rho u_t \, dV = \iint_{\partial B} k (\vec{n} \cdot \mathbf{grad} u) \, dO ,$$

wenn wir mit \vec{n} den äusseren Normaleneinheitsvektor von B bezeichnen. An dieser Stelle wenden wir nun den Divergenzsatz auf das auf der rechten Seite stehende Flussintegral an. Wir erhalten

$$\iint_{\partial B} k (\vec{n} \cdot \mathbf{grad} u) dO = \iiint_B k \mathbf{div} \mathbf{grad} u dV .$$

Daraus folgt

$$\iiint_B (c\rho u_t - k \mathbf{div} (\mathbf{grad} u)) dV = 0 .$$

Da dies für beliebige in K liegende Bereiche B gelten muss, folgern wir, dass mit dem Integral auch der Integrand Null ist. Verwenden wir wie üblich die Bezeichnung $\mathbf{div} \mathbf{grad} u = \Delta u$ und setzen wir

$$a^2 := \frac{k}{c\rho} ,$$

so gilt

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 .$$

Dies ist die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**. Diese lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung tritt in vielen anderen Anwendungen, nämlich ganz allgemein bei Diffusionsproblemen auf. In der Analysis III wird einiges über die Lösungen dieser Gleichungen gesagt werden.

Wir erwähnen zum Schluss noch den Spezialfall einer stationären Temperaturverteilung, also z.B. einer Temperaturverteilung, wie sie sich in einem isolierten Körper K nach langer Zeit automatisch einstellt. Dann gilt $u_t \equiv 0$, so dass u Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

sein muss. Die stationäre Temperaturverteilung u genügt der sogenannten **Laplace'schen Differentialgleichung** $\Delta u = 0$; die Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichungen heissen definitionsgemäss **harmonische Funktionen**.

Grundgleichung der Elektrostatik

In unserm dritten Beispiel leiten wir die Grundgleichung der Elektrostatik, also eine der vier Maxwell'schen Gleichungen (siehe Physik) aus dem Coulomb'schen Gesetz her.

Das Coulomb'sche Gesetz besagt, dass das elektrische Feld \vec{E} einer elektrischen Ladung e im Punkte $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ durch

$$\vec{E}(x, y, z) = e \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

beschrieben wird, wobei wir zur Abkürzung $\vec{r} = (x, y, z)$ und $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ gesetzt haben. Man vergleiche dazu das entsprechende Beispiel in Abschnitt 1, wo das Coulombfeld für $P_0 = O$ beschrieben wurde. (Der Einfachheit halber setzen wir jetzt die dort auftretende Konstante gleich 1; dies entspricht einer geschickten Wahl der Masseneinheiten.)

Wir haben bereits gesehen, dass das Coulombfeld quellenfrei ist; d.h. es gilt $\operatorname{div} \vec{E} \equiv 0$. Es sei nun B ein Bereich, der P_0 enthält, sein Rand sei ∂B . Der Fluss Φ von innen nach aussen durch ∂B lässt sich mit Hilfe des Divergenzsatzes berechnen. Zu diesem Zweck sparen wir aus B eine kleine Kugel K mit Mittelpunkt P_0 aus (siehe Figur 4). Für den durchlöchernten Bereich \bar{B} ist die Voraussetzung des Divergenzsatzes erfüllt: Das Vektorfeld \vec{E} ist in ganz \bar{B} regulär. (Man beachte, dass dies für B nicht der Fall ist: \vec{E} ist in P_0 nicht definiert!) Der Divergenzsatz angewandt auf \bar{B} und \vec{E} liefert nun

$$0 = \iiint_{\bar{B}} \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \iint_{\partial \bar{B}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO = \iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO + \iint_{\partial K} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO .$$

Dabei ist im zweiten Flussintegral die für \bar{B} äussere, also die für die Kugel K innere Normalenrichtung zu wählen. Das letztere Flussintegral wurde in Abschnitt 4 für die äussere Normalenrichtung bereits berechnet. Jenes Resultat liefert

$$\iint_{\partial K} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO = -4\pi e .$$

Wir erhalten damit die Aussage: Für den Fluss Φ des Coulombfeldes \vec{E} durch die Oberfläche ∂B eines Bereiches B gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO = \begin{cases} +4\pi e & \text{falls } e \text{ in } B \text{ enthalten ist,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Wir betrachten nun endlich viele Punktladungen e_1, e_2, \dots, e_m in den Punkten P_1, P_2, \dots, P_m . Erzeugt e_i das Coulombfeld \vec{E}_i , so folgt für das totale elektrische Feld \vec{E}

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_m .$$

Ferner sei B ein beliebiger Bereich (siehe Figur 5). Wir erhalten dann für den Fluss des Vektorfeldes \vec{E} aus B heraus

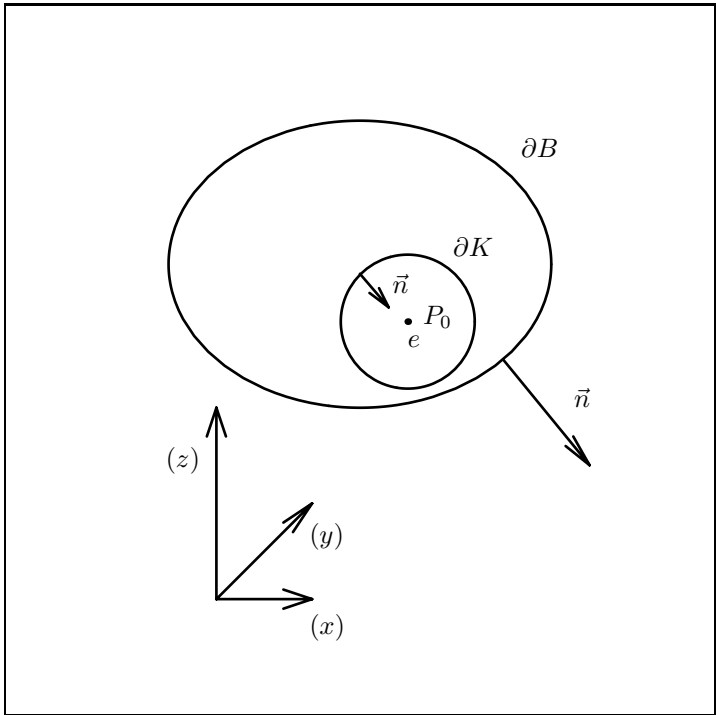


FIG. 4:
Der Fluss eines Coulombfeldes

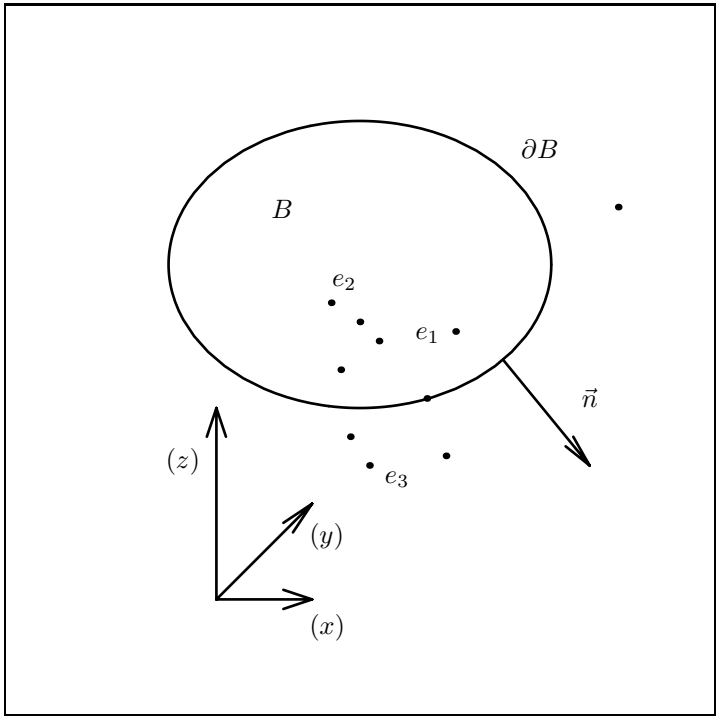


FIG. 5:
Der Fluss einer Summe
von Coulombfeldern

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_m) \cdot \vec{n} \, dO &= \iint_{\partial B} \vec{E}_1 \cdot \vec{n} \, dO + \iint_{\partial B} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \, dO + \cdots + \iint_{\partial B} \vec{E}_m \cdot \vec{n} \, dO \\ &= 4\pi \sum e_i , \end{aligned}$$

wobei die Summe über diejenigen Ladungen zu erstrecken ist, die in B enthalten sind.

Im Falle einer kontinuierlichen Ladungsverteilung gehen wir wie folgt vor. Es sei die Ladungsdichte gegeben durch das Skalarfeld

$$\rho : (x, y, z) \rightarrow \rho(x, y, z) .$$

Dann folgt für das Flussintegral durch die Oberfläche ∂B des Bereiches B

$$\iint_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dO = 4\pi \iiint_B \rho \, dV ,$$

denn das rechts stehende Integral liefert gerade die in B enthaltene Ladung (entsprechend der Summe der Einzelladungen e_i bei der diskreten Ladungsverteilung). Wenden wir nun den Divergenzsatz auf das links stehende Integral an, so folgt

$$\iiint_B (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) \, dV = 0 .$$

Da B beliebig gewählt werden kann, folgern wir aus dem Verschwinden des Integrals das Verschwinden des Integranden. Es gilt also

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho .$$

Dies ist die **Grundgleichung der Elektrostatik**, eine der vier Maxwell'schen Gleichungen (J. C. Maxwell 1831 - 1879).

Als triviale Folgerung erhalten wir, dass im ladungsfreien Raum ($\rho \equiv 0$) die elektrische Feldstärke quellenfrei ist.

Hydrostatischer Auftrieb

Gegeben sei ein Körper K , der vollständig in eine Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht γ eingetaucht werde. Man weiss mit Archimedes (Heureka!), dass dann eine Auftriebskraft auf

den Körper wirkt. Hier wollen wir die Grösse dieser Kraft mit Hilfe des Satzes von Gauss aus dem Druckverlauf in der Flüssigkeit ermitteln.

Wir nehmen an, dass der Flüssigkeitsspiegel horizontal sei. Bezeichnen wir mit $p(z)$ den in der Tiefe z herrschenden Druck, so gilt natürlich $p(z) = p_0 + \gamma z$, wobei p_0 der Druck an der Flüssigkeitsoberfläche ist (siehe Figur 6). Ist B der vom Körper K eingenommene Bereich, so bezeichne \vec{n} den äusseren Normaleneinheitsvektor. Auf das differentielle Flächenstück dS von B wirkt dann die Kraft

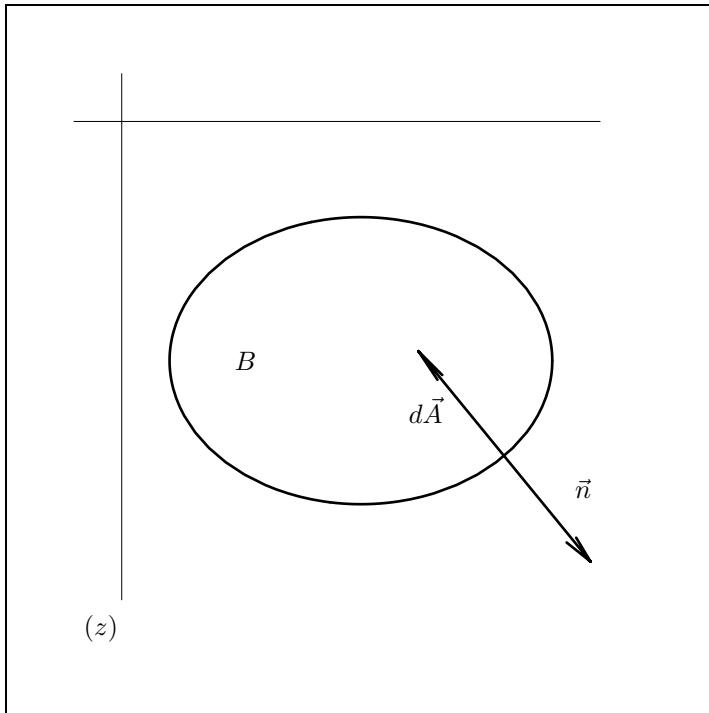


FIG. 6:
Zum hydrostatischen Auftrieb

$$d\vec{A} = -(p_0 + \gamma z) \vec{n} dO ,$$

und auf den ganzen Körper K somit die “Summe” aller $d\vec{A}$, also

$$\vec{A} = \iint_{\partial B} d\vec{A} = \left(- \iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_1 dO, - \iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_2 dO, - \iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_3 dO \right) .$$

Mit Hilfe des Divergenzsatzes lassen sich diese Oberflächenintegrale uminterpretieren. Zu diesem Zweck führen wir (Hilfs-)Vektorfelder ein, die erlauben, die Integrale als Flussintegrale aufzufassen. Wählen wir als erstes das Vektorfeld $\vec{v} = (p_0 + \gamma z, 0, 0)$, dann liefert der Divergenzsatz angewandt auf B

$$\iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_1 dO = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = 0 .$$

Tun wir dasselbe für das Vektorfeld $\vec{v} = (0, p_0 + \gamma z, 0)$ so erhalten wir

$$\iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_2 dO = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = 0 .$$

Wählen wir schliesslich $\vec{v} = (0, 0, p_0 + \gamma z)$, so folgt auf gleiche Weise

$$\iint_{\partial B} (p_0 + \gamma z) n_3 dO = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \iiint_B \gamma dV = \gamma V ,$$

wo V das Volumen des Körpers K bezeichnet. Das Produkt γV ist nichts anderes als das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Es gilt für die Auftriebskraft

$$\vec{A} = (0, 0, -\gamma V) ,$$

und wir haben das wohlbekannte **Archimedische Prinzip** hergeleitet.