

Repetition: Kapitel VI. Vektoranalysis

VI.8. Der Satz von Stokes

Genau wie der Divergenzsatze gehört auch der *Satz von Stokes* zu den ganz grossen und wichtigen Sätzen der Vektoranalysis. Er bringt den Begriff Arbeit eines Vektorfeldes und den Differentialoperator **rot** miteinander in Verbindung.

Man rufe sich den Inhalt des Satzes von Stokes in Erinnerung. Von was für Kurven (Wegen) handelt der Satz von Stokes?

Test Die Rotation des VF \vec{v} sei im Punkte P_0 nicht der Nullvektor. Was bedeutet dies anschaulich für das VF \vec{v} ?

Man rufe sich die anschauliche Bedeutung der Rotation in Erinnerung (siehe Seite 63/64). Geben Sie ein konkretes VF an, dessen Rotation nicht Null ist.

Und zum Schluss noch etwas zum *Überlegen*: In der Situation des Satzes von Stokes lassen sich unschwer neben dem Flächenstück S andere Flächenstücke S' denken, welche ebenfalls den Rand C besitzen. Offenbar gilt der Satz von Stokes unabhängig davon, ob mit S oder S' gerechnet wird. Weshalb?

Die Antwort liegt nicht unmittelbar auf der Hand; sie soll aus diesem Grund hier angefügt werden.

Es ist zu zeigen, dass der Fluss Φ des Vektorfeldes **rot** \vec{v} durch S gleich dem Fluss Φ' des gleichen Vektorfeldes durch S' ist, nämlich gleich der Arbeit von \vec{v} längs der gemeinsamen Randkurve C . (Man mache sich eine entsprechende Skizze!) Die beiden, in der Kurve C aneinander stossenden Flächenstücke schliessen gemeinsam einen räumlichen Bereich B ein. Man wähle nun auf der Fläche S' den *anderen* Normaleneinheitsvektor $\vec{m} = -\vec{n}$ und berechne den Fluss Ψ' von **rot** \vec{v} durch S' in Richtung \vec{m} . Dann gilt natürlich $\Psi' = -\Psi$. Die Summe $\Phi + \Psi'$ ist der Fluss von **rot** \vec{v} durch die gesamte Oberfläche des räumlichen Bereiches B . Dieser Fluss lässt sich aber nach dem Divergenzsatze ausdrücken durch

$$\iiint_B \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) dV .$$

Wegen **div rot** $\vec{v} = 0$ (siehe Kap. VI, p. 15) ist dieses Integral aber Null. Daraus folgt $\Phi + \Psi' = 0$, also $\Phi = \Psi$. Dies war nachzuweisen.