

## 4 Die Taylorreihe

Es sei wiederum  $f : x \rightarrow f(x)$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion und  $x_0$  ein innerer Punkt des Definitionsbereiches. Die Formel für das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades  $P_n$  von  $f$  in  $x_0$  zeigt, dass diese Polynome als Partialsummen der Reihe

$$(4.1) \quad f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

aufgefasst werden können. Die Reihe (4.1) heisst die **Taylorreihe** von  $f$  mit Mittelpunkt  $x_0$ .

Man beachte, dass man die Reihe (4.1) hinschreiben kann, ohne über deren Konvergenz oder Divergenz eine Aussage zu machen. Da sie eine Potenzreihe mit Mittelpunkt  $x_0$  ist, wissen wir aber immerhin, dass ihr Konvergenzbereich ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall mit Mittelpunkt  $x_0$  ist. Es kann vorkommen, dass die Reihe nirgends, ausser natürlich in  $x_0$  konvergiert. Dies ist aber eher der Ausnahmefall. Der Normalfall sieht anders aus: *Für viele Funktionen konvergiert die Taylorreihe in einer echten Umgebung von  $x_0$  und ihre Summe stimmt im Konvergenzbereich sogar mit der Funktion  $f$  überein.* Dieses Verhalten wird u.a. in den Beispielen des letzten Abschnitts über das Approximationsverhalten der Taylorpolynome von  $x \rightarrow e^x$  und  $x \rightarrow \cos x$  deutlich. Konvergiert die Taylorreihe für  $f$  mit Mittelpunkt  $x_0$  in einem nichttrivialen Intervall, so spricht man auch etwa von der *Taylorentwicklung* von  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel** Die Taylorreihe von  $x \rightarrow e^x$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  lautet

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

Sie heisst auch *Exponentialreihe* (siehe Figur 1). Man kann zeigen, dass diese Reihe für alle  $x$  konvergiert und die Funktion  $x \rightarrow e^x$  darstellt. Wir dürfen deshalb schreiben

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

**Beispiel** Die Taylorreihe von  $x \rightarrow \cos x$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  lautet

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots .$$

Sie heisst auch etwa *Cosinus-Reihe* (siehe Figur 2). Auch hier kann man zeigen, dass die Reihe für alle  $x$  konvergiert und für alle  $x$  die Gleichung

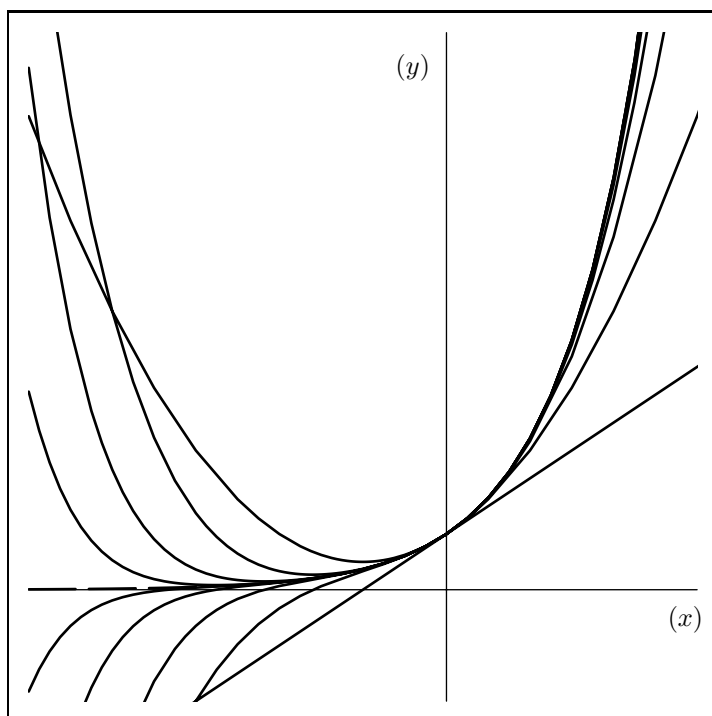


FIG. 1:  
Die ersten Partialsummen  
der Exponentialreihe; die Kurve  
 $y = e^x$  ist gestrichelt  
eingezeichnet

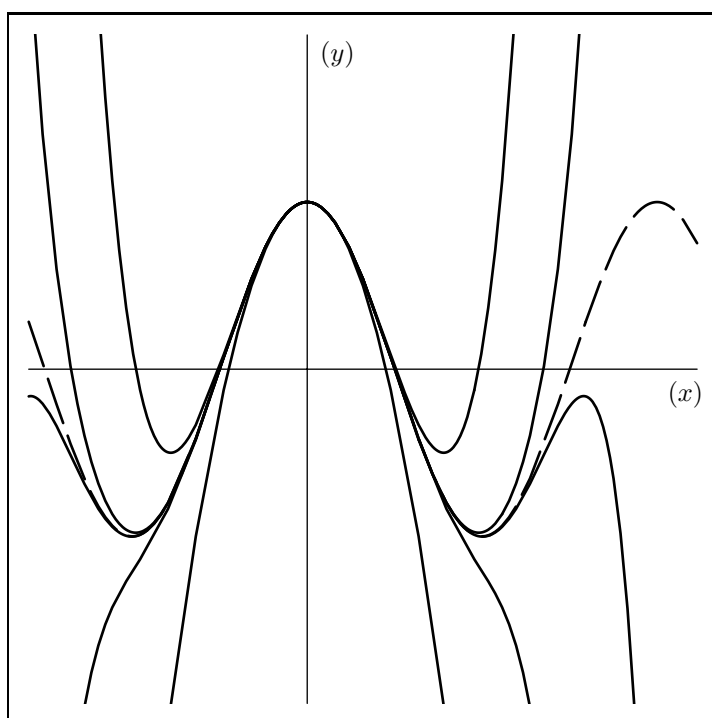


FIG. 2:  
Die ersten Partialsummen  
der Cosinus-Reihe; die Kurve  
 $y = \cos x$  ist gestrichelt  
eingezeichnet

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

gilt.

**Beispiel** Die Taylorreihe von  $x \rightarrow \sin x$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  lautet

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots .$$

Sie heisst *Sinus-Reihe*. Die Sinus-Reihe konvergiert ebenfalls für alle  $x$ , und es gilt die Gleichung

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots .$$

Die Beschäftigung der Mathematik mit Potenzreihen hat gezeigt, dass es Vorteile bietet, wenn man an Stelle der reellen Zahlen komplexe Zahlen zulässt. Es zeigt sich dann, dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z, z_0, c_k \in \mathbb{C}$$

in der komplexen Zahlenebene ein Kreis mit Mittelpunkt  $z_0$  ist, wobei über das Konvergenzverhalten in den Punkten der Peripherie des Kreises keine einfachen allgemeinen Aussagen möglich sind. Man spricht dann natürlich vom *Konvergenzkreis* der Potenzreihe (siehe Figur 3). In diesem Zusammenhang klärt sich auch die Wahl des oben erwähnten Begriffes des *Konvergenzradius* zwanglos auf. Um die Nützlichkeit von komplexen Zahlen in diesem Zusammenhang zu illustrieren, betrachten wir noch das folgende Beispiel.

**Beispiel** Wir berechnen mit Hilfe der Taylorreihen mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  die Grösse

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots \\ &= e^{ix} . \end{aligned}$$

Es ist also hier die Euler'sche Formel,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

mit Hilfe der entsprechenden Taylorreihen plausibel gemacht worden.

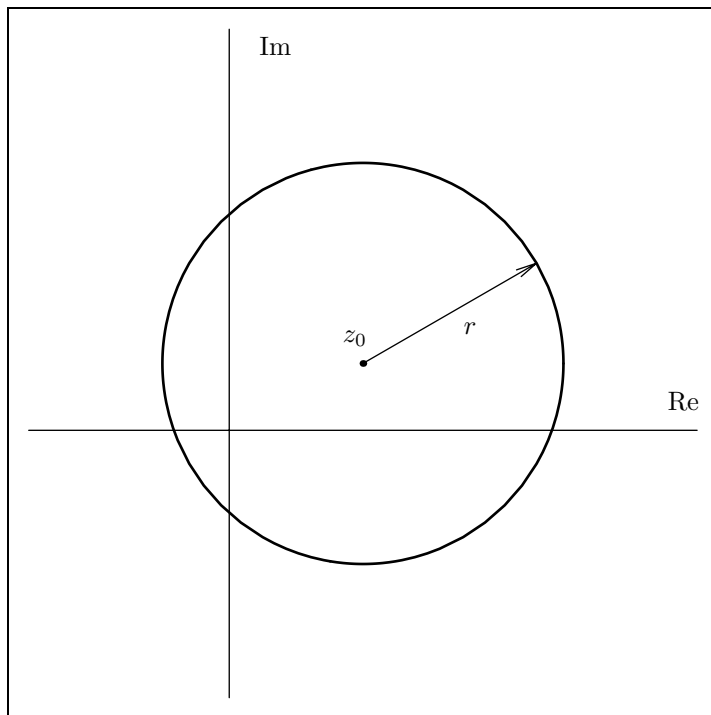


FIG. 3:  
Konvergenzkreis in der  
komplexen Zahlenebene

Wichtig für das Folgende ist nun der mathematische Satz, welcher besagt, dass eine Funktion  $f$  um den Punkt  $x_0$  *höchstens eine* Potenzreihenentwicklung zulässt.

**Satz** *Stellen zwei Potenzreihen mit Mittelpunkt  $x_0$  die gleiche Funktion dar, so stimmen sie in allen ihren Koeffizienten überein.*

Es gilt also: Konvergiert eine Potenzreihe mit Mittelpunkt  $x_0$  gegen eine Funktion  $f$ , so ist diese Potenzreihe automatisch *die* Taylorreihe von  $f$  mit Mittelpunkt  $x_0$ .

**Beispiel** Wir haben in einem früheren Abschnitt nachgewiesen, dass im Intervall  $(-1, +1)$  die Gleichung

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

gilt. Mit dem obigen Satz schliessen wir nun, dass diese Reihe die Taylorreihe von  $x \rightarrow \log(1+x)$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  ist.

**Beispiel** Die früher hergeleitete, im Intervall  $(-1, +1)$  gültige Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

ist automatisch die Taylorentwicklung der Funktion  $x \rightarrow \arctan x$  um  $x_0 = 0$ .

**Beispiel** Gegeben sei die Funktion  $f : x \rightarrow (1+x)^\alpha$ , wo  $\alpha$  eine reelle Zahl ist. Gesucht ist die Taylorentwicklung von  $f$  um  $x_0 = 0$ . Für die Ableitungen von  $f$  erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} . \end{aligned}$$

Definieren wir, als Verallgemeinerung des wohlbekannten Binomialkoeffizienten,

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

so lautet die Taylorreihe von  $f$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$

$$(4.2) \quad 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \binom{\alpha}{4}x^4 + \dots$$

Man nennt (4.2) die Binomialreihe zum Exponenten  $\alpha$ . Für  $\alpha = -1$  erhält man die uns gut bekannte geometrische Reihe mit Faktor  $-x$  (siehe Figur 4). Man kann zeigen, dass die Binomialreihe für jedes  $\alpha$  wenigstens im Intervall  $(-1, +1)$  konvergiert und dass in diesem Intervall die Gleichung

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \binom{\alpha}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

gilt. Man beachte, dass der Konvergenzbereich auch grösser sein kann. Ist nämlich  $\alpha$  eine positive *ganze* Zahl, so bricht die Reihe (4.2) nach endlich vielen Gliedern ab (man erhält ein Polynom!), und dementsprechend besteht in diesem Fall der Konvergenzbereich aus allen reellen Zahlen.

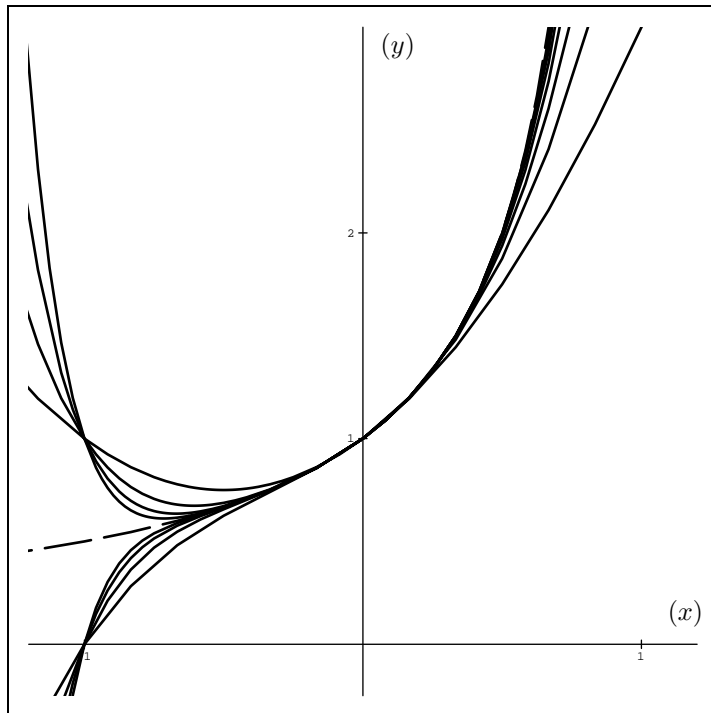


FIG. 4:  
Die ersten Partialsummen der  
geometrischen Reihe mit  
Faktor  $-x$ ; die Kurve  
 $y = 1/(1-x)$  ist gestrichelt  
eingezeichnet

**Beispiel** Die Funktion

$$x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2}$$

hat die für  $|x| < 1$  gültige Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2}(-x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x^2)^3 + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Integration liefert daraus die für denselben Bereich gültige Potenzreihenentwicklung

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Die Bestimmung der Koeffizienten der Taylorentwicklung einer Funktion  $f$  kann sehr aufwendig sein, weil man dafür ja die Ableitungen beliebig hoher Ordnung von  $f$  kennen muss. In vielen Fällen ist es deshalb einfacher, die Koeffizienten auf andere Weise zu bestimmen. Beispiele

dafür haben wir bereits bei der geometrischen Reihe kennengelernt und bei den vielen aus der geometrischen Reihe hergeleiteten Reihentwicklungen. Als weiteres Beispiel wollen wir hier die Tangens-Reihe bestimmen und zwar mit Hilfe der *Methode des Koeffizientenvergleichs*.

**Beispiel** Bekanntlich gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

also

$$\cos x \cdot \tan x = \sin x .$$

Machen wir den Ansatz

$$\tan x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$

und benützen wir die uns bekannten Sinus- und Cosinus-Reihen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots) &= \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ c_0 + c_1x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2!}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!}\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!}\right)x^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!}\right)x^5 + \dots &= \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots . \end{aligned}$$

Da links und rechts dieselbe Funktion beschrieben wird, also nach unserem Satz die beiden Reihen in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen müssen, erhalten wir das folgende Gleichungssystem für die (unendlich vielen) Koeffizienten  $c_i$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 - \frac{c_0}{2!} &= 0 \\ c_3 - \frac{c_1}{2!} &= -\frac{1}{3!} \\ c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} &= 0 \\ c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} &= \frac{1}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dieses System ist – wie man sagt – rekursiv auflösbar; man erhält

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{2}{15}, \dots$$

Der Beginn der Potenzreihenentwicklung von  $x \rightarrow \tan x$  lautet also

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Man kann zeigen, dass die so erhaltene Reihe für  $|x| < \pi/2$  konvergiert.

Die Koeffizienten der Tangensreihe gehorchen interessanten, aber komplizierten Bildungsgesetzen, auf die wir hier nicht eingehen. Leicht lässt sich allerdings aus dem Gleichungssystem herleiten, dass die Koeffizienten mit *geradem Index* alle verschwinden. Ganz ähnlich liegt die Sache bei der Sinus-Reihe, wo ebenfalls nur die Koeffizienten mit ungeradem Index auftreten, während bei der Cosinus-Reihe nur Koeffizienten mit geradem Index von Null verschieden sind. In der Tat gilt ganz allgemein der folgende Satz.

**Satz** Die Taylorentwicklung um  $x_0 = 0$  einer ungeraden Funktion enthält nur Terme mit ungeradem Index; die Taylorentwicklung um  $x_0 = 0$  einer geraden Funktion enthält nur Terme mit geradem Index.

*Beweis* Wir beweisen nur die Aussage über ungerade Funktionen. Das entsprechende Resultat über gerade Funktionen wird analog erhalten. Ist  $f$  eine ungerade Funktion, so gilt definitionsgemäss

$$(4.3) \quad f(-x) = -f(x) .$$

Insbesondere ist  $f(0) = 0$ . Leitet man die Beziehung (4.3) ab, so erhält man

$$(4.4) \quad -f'(-x) = -f'(x) .$$

d.h.  $f'$  ist eine gerade Funktion. Eine zweite Ableitung liefert dann aus (4.4) sofort

$$(4.5) \quad -f''(-x) = f''(x)$$

d.h.  $f''$  ist wiederum eine ungerade Funktion, insbesondere gilt  $f''(0) = 0$ . Es folgt also, dass alle Ableitungen *gerader* Ordnung von  $f$  ungerade Funktionen sind, und dass diese deshalb in  $x_0 = 0$  den Wert Null annehmen. In der Taylorentwicklung der ungeraden Funktion  $f$  um  $x_0 = 0$  können deshalb nur Terme mit ungeradem Index vorkommen.