

3 Das Taylorsche Polynom

Als Vorbereitung betrachten wir hier zuerst das folgende einfache Problem. Für ein Polynom n -ten Grades $x \rightarrow P(x)$, schreiben wir den Wert $P(x_0)$ in x_0 und die Werte der ersten n Ableitungen

$$P'(x_0), P''(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0)$$

vor. Gesucht sind die $n + 1$ Koeffizienten von P . Der Ansatz

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

liefert offenbar das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_0 + b_1x_0 + b_2x_0^2 + b_3x_0^3 + \dots + b_nx_0^n &= P(x_0) \\ b_1 + 2b_2x_0 + 3b_3x_0^2 + \dots + nb_nx_0^{n-1} &= P'(x_0) \\ &\vdots \\ n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1b_n &= P^{(n)}(x_0) . \end{aligned}$$

Dieses lässt sich leicht lösen, indem man mit der letzten Gleichung beginnt. Wir verzichten hier auf die explizite Angabe der Lösungen und verfolgen statt dessen noch einen weiteren Lösungsweg, der von einem andern Ansatz für $P(x)$ ausgeht. Wir setzen

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n .$$

Da die Ableitungen von $x \rightarrow P(x)$ durch

$$\begin{aligned} P'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ P''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ &\vdots \\ P^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1a_n \end{aligned}$$

gegeben sind, erhalten wir für die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ohne Schwierigkeit

$$a_0 = P(x_0), \quad a_1 = P'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2}P''(x_0), \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0) .$$

Beispiel Gesucht ist das Polynom dritten Grades mit $P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 6$. Nach obigem erhalten wir

$$P(x) = 6 + \frac{6}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = x^3 + 3x + 2 .$$

Gegeben sei nun eine Funktion $x \rightarrow f(x)$, und es sei x_0 ein (innerer) Punkt des Definitionsbereiches von f . Als eine der ersten Anwendungen der Differentialrechnung haben wir gelernt (siehe Kapitel II, Abschnitt 2), die Funktion f in x_0 zu “linearisieren”, d.h. die Funktion f durch diejenige lineare Funktion P zu ersetzen, die in x_0 denselben Wert annimmt wie f , $P(x_0) = f(x_0)$, und dort auch die gleiche erste Ableitung besitzt, $P'(x_0) = f'(x_0)$. Dies ist für das Polynom P ersten Grades gerade das oben diskutierte Problem. Wir erhalten für P

$$(3.1) \quad x \rightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) ,$$

in Übereinstimmung mit der uns schon bekannten Formel für die lineare Ersatzfunktion. Wir erinnern auch daran, dass die lineare Ersatzfunktion (3.1) in der Umgebung von x_0 die Funktion f gut approximiert.

Allgemeiner können wir nun natürlich auch nach dem Polynom n -ten Grades $x \rightarrow P_n(x)$ fragen, welches in x_0 denselben Wert annimmt wie f , $P_n(x_0) = f(x_0)$ und dort auch die gleichen n ersten Ableitungen besitzt

$$P'_n(x_0) = f'(x_0), \quad P''_n(x_0) = f''(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0) .$$

Offenbar ist P_n gegeben durch

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Das Polynom P_n heisst das **Taylorpolynom** n -ten Grades von f in x_0 . Das Taylorpolynom ersten Grades ist die lineare Ersatzfunktion. Man könnte deshalb statt vom Taylorpolynom n -ten Grades auch vom *Ersatzpolynom n -ten Grades* sprechen. Neben der linearen Approximation hat man somit auch eine *quadratische* Approximation ($n = 2$), und allgemeiner eine Approximation n -ten Grades.

Beispiel Für die Sinusfunktion $x \rightarrow \sin x$ bestimme man das Taylorpolynom P_2 zweiten Grades in $x_0 = \pi/6$. Wir erhalten (siehe Figur 1)

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 .
 \end{aligned}$$

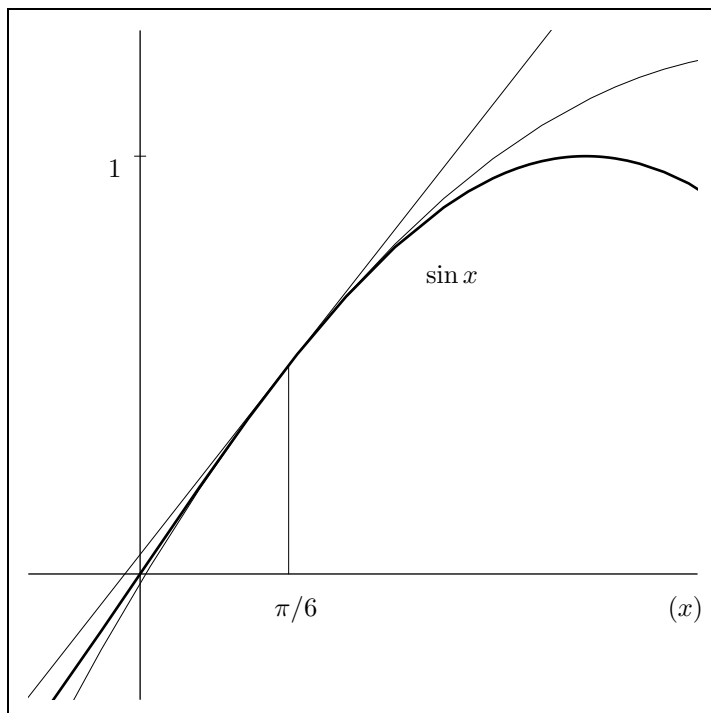


FIG. 1 :
Das lineare und quadratische
Taylorpolynom für
 $x \rightarrow \sin x$ in $x_0 = \pi/6$

Man vermutet natürlich, dass das Taylorpolynom n -ten Grades von f in x_0 die Funktion f in der Umgebung von x_0 “gut” approximieren, und zwar “umso besser”, je höher der Grad n des Taylorpolynoms ist. Für sehr viele Funktionen ist das tatsächlich der Fall. Wir illustrieren den Sachverhalt an den folgenden beiden Beispielen.

Beispiel Gegeben sei die Funktion $f : x \rightarrow e^x$. Wegen $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ erhalten wir für das Taylorpolynom n -ten Grades P_n in $x_0 = 0$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n .$$

Unsere Vermutung bestätigend stellen wir fest, dass P_n für f eine “gute” Approximation ist und zwar eine “umso bessere” (d.h. insbesondere in einem umso grösseren Intervall mit Mittelpunkt

$x_0 = 0$) je grösser der Grad n des Taylorpolynoms P_n ist. Die Figuren 2,3,4 machen diesen Sachverhalt auch optisch klar.

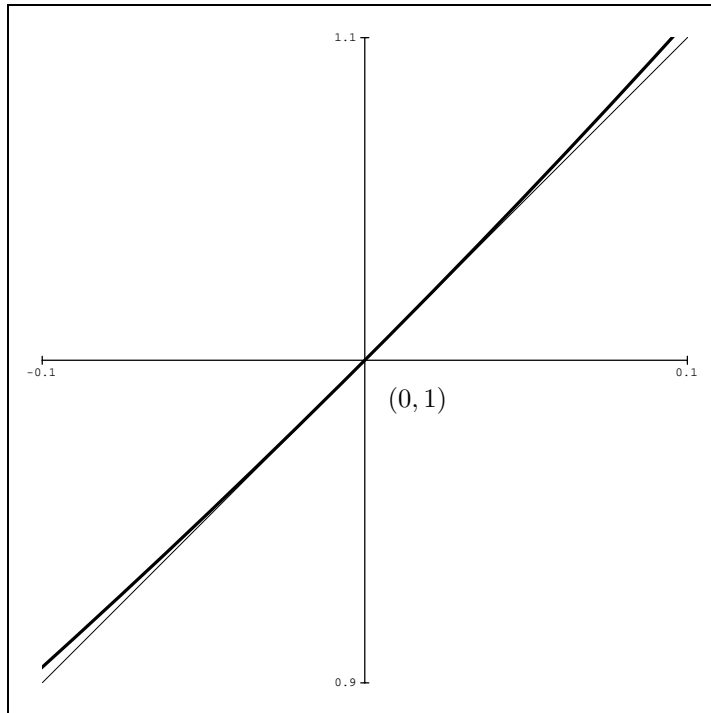


FIG. 2:
Die lineare Ersatzfunktion
von $x \rightarrow e^x$ in $x_0 = 0$ ist im
Intervall $[-0.1, 0.1]$ eine
gute Approximation

Beispiel Gegeben sei die Funktion $f : x \rightarrow \cos x$ und $x_0 = 0$. Wegen

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x, \quad \dots$$

ist das Taylorpolynom $(2n)$ -ten Grades von f in x_0 gegeben durch

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Auch hier stellt man fest, dass P_{2n} für f eine “gute” Approximation ist: Das zu $x_0 = 0$ symmetrisch liegende Intervall, in dem die Approximation von $\cos x$ durch $P_{2n}(x)$ “gut” ist, wird dabei mit wachsendem Grad des Polynoms immer grösser und grösser (siehe Figur 2 in Abschnitt 4).

Wie für die lineare Ersatzfunktion, so kann die Mathematik auch für die höheren Taylorpolynome Aussagen über die “Güte” der Approximation d.h. über den “Fehler” $f(x) - P_n(x)$ machen. Auf diese sogenannten *Restgliedabschätzungen* gehen wir hier aber nicht ein.

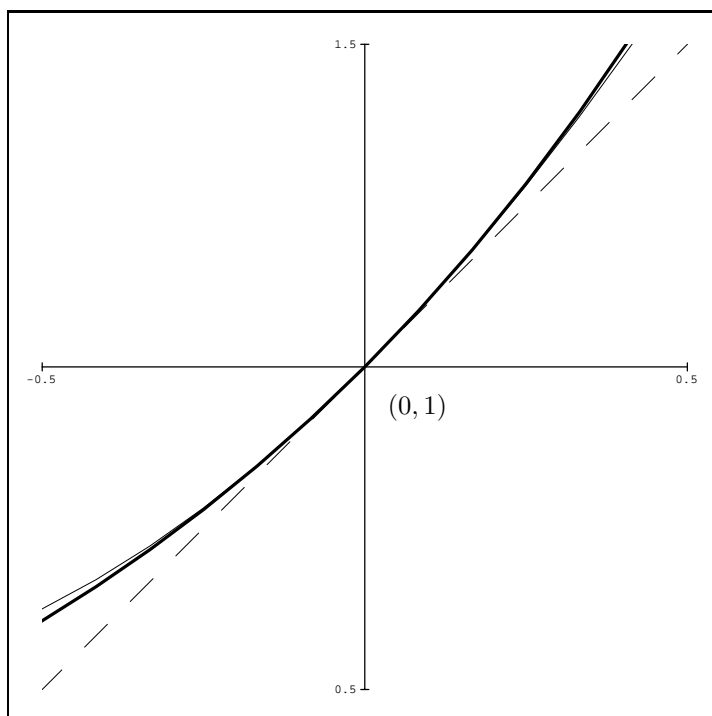


FIG. 3:
Im Intervall $[-0.5, 0.5]$ ist die Approximation durch die lineare Ersatzfunktion von $x \rightarrow e^x$ in $x_0 = 0$ nicht mehr genügend gut, hingegen ist die Approximation durch die quadratische Ersatzfunktion noch befriedigend

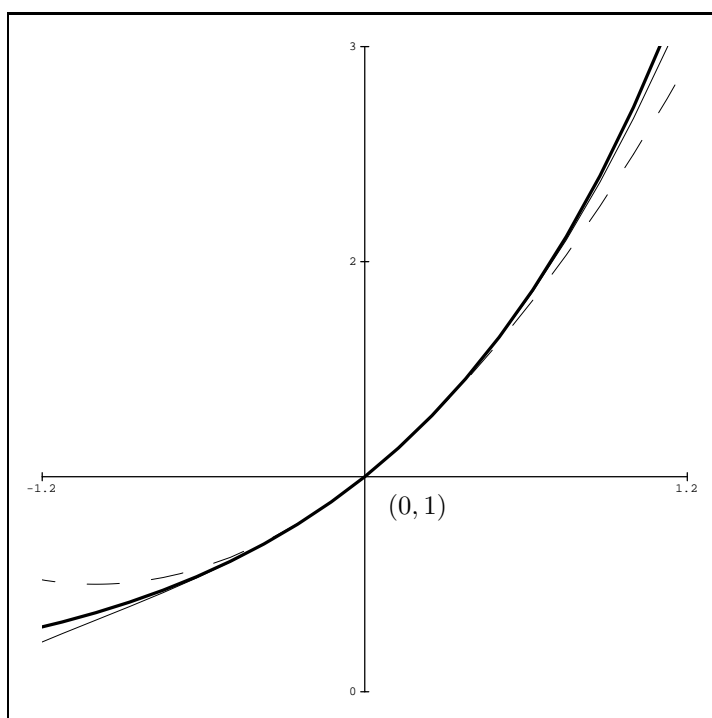


FIG. 4:
Im Intervall $[-1.2, 1.2]$ genügt auch die quadratische Ersatzfunktion von $x \rightarrow e^x$ in $x_0 = 0$ nicht mehr, erst die kubische liefert eine befriedigende Approximation