

2 Potenzreihen

Unter einer **Potenzreihe** verstehen wir eine Reihe der Form

$$(2.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wobei wir nur den Fall betrachten, wo die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots reelle Zahlen sind. Die Menge der x -Werte, für die die Potenzreihe (2.1) konvergiert, heisst ihr *Konvergenzbereich*. Im Konvergenzbereich definiert eine Potenzreihe eine Funktion, deren Werte sich mit beliebiger Genauigkeit numerisch bestimmen lassen.

Beispiel Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ist eine Potenzreihe mit $a_k = 1$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Ihr Konvergenzbereich ist das Intervall $(-1, +1)$. In diesem Intervall liefert die geometrische Reihe eine andere Beschreibung für die Funktion $x \rightarrow 1/(1 - x)$.

Nicht immer lässt sich die Summe einer Potenzreihe auf so einfache Weise angeben. Dazu trägt nicht nur die uns schon bekannte allgemeine Schwierigkeit bei, die Summe einer Reihe zu bestimmen, sondern es ist oft so, dass konvergierende Potenzreihen Funktionen beschreiben, die sich mit den sonst üblichen, elementaren Funktionszeichen nicht ausdrücken lassen. Beispiele dazu werden wir weiter unten explizit kennenlernen.

Über den Konvergenzbereich einer Potenzreihe kennt der Mathematiker einen einfachen schönen Satz, den wir hier ohne Beweis aufführen (siehe Figur 1).

Satz *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall mit 0 als Mittelpunkt.

Man nennt die halbe Länge des Konvergenzintervalles auch etwa *Konvergenzradius*. Über das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten in den Endpunkten des Konvergenzintervalles lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen: Alle überhaupt möglichen Fälle treten bei konkreten Potenzreihen auch wirklich auf.

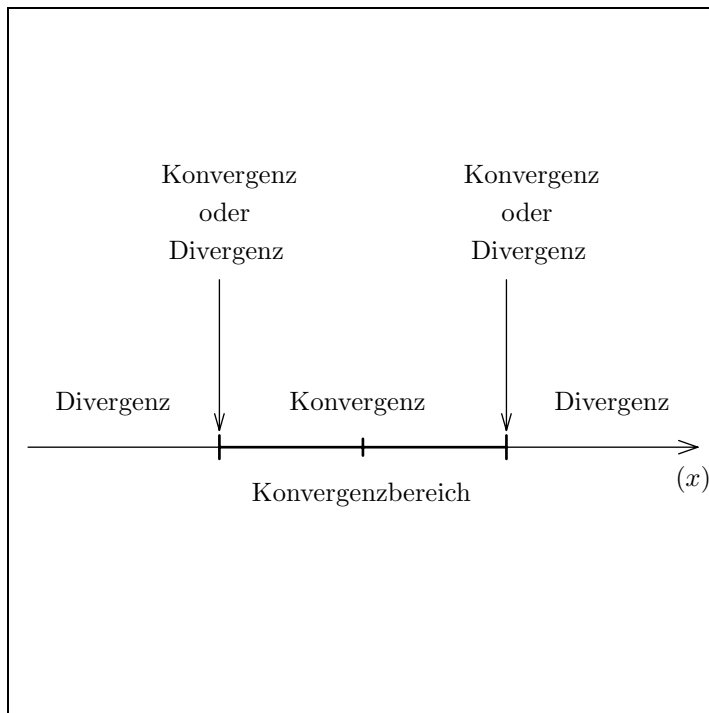


FIG. 1:
Der Konvergenzbereich einer
Potenzreihe ist ein offenes,
halboffenes oder abge-
schlossenes Intervall.

Wichtig ist nun, dass sich Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzintervalles harmlos verhalten. Es gilt der folgende zentrale und bequeme(!) Satz, den wir hier ebenfalls ohne Beweis aufführen.

Satz *Im Innern des Konvergenzintervalles darf man mit Potenzreihen wie mit Polynomen rechnen. Insbesondere darf man gliedweise addieren, subtrahieren, multiplizieren, differenzieren und integrieren.*

Beispiel Für $|x| < 1$, d.h. im Konvergenzintervall der geometrischen Reihe gilt

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} \frac{1}{1-x} = (1-x+x^2-\dots)(1+x+x^2+\dots) = 1+x^2+x^4+\dots$$

Beispiel Für $|x| < 1$, d.h. im Konvergenzintervall der geometrischen Reihe gilt

$$(2.2) \quad \log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1-t+t^2-\dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

In den Randpunkten stellte man hier fest: Für $x = -1$ erhält man die harmonische Reihe, man hat also Divergenz. Für $x = +1$ erhält man die alternierende harmonische Reihe, man hat also

Konvergenz. Man kann ferner zeigen, dass die Gleichung (2.2) auch für den Randpunkt $x = 1$ gilt. Daraus ergibt sich als Summe der alternierenden harmonischen Reihe $\log 2$.

Beispiel Gehen wir aus von der für $|t| < 1$ konvergenten Reihe

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots ,$$

so liefert die Integration für $|x| < 1$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots .$$

Zum Schluss dieses Abschnittes merken wir noch an, dass man auch Potenzreihen mit Mittelpunkt x_0 , $x_0 \neq 0$ betrachten kann. Setzt man nämlich in der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

für t die Differenz $x - x_0$ ein, so erhält man die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k ,$$

eine *Potenzreihe mit Mittelpunkt* x_0 . Natürlich ist der Konvergenzbereich einer solchen Reihe ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall mit Mittelpunkt x_0 .

Beispiel Die Funktion $x \rightarrow 1/(x+2)$ soll, wenn möglich, in eine Potenzreihe mit Mittelpunkt $x_0 = 1$ entwickelt werden. Wir erreichen dieses Ziel wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} &= \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3} \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{3^3}(x-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für $|(x-1)/3| < 1$ d.h. im Intervall $(-2, 4)$.