

Periodische Funktionen.

Wir betrachten hier Funktionen, die periodisch sind, wobei wir der Einfachheit halber vor allem den Fall der Periode 2π behandeln. Eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ heisst *periodisch mit Periode 2π* , oder einfach *2π -periodisch*, wenn für alle x die Gleichung $f(x + 2\pi) = f(x)$ gilt. In offensichtlicher Weise sind die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot periodisch mit Periode 2π . Sind die Funktionen f und g 2π -periodisch, so sind $f \pm g$, $f \cdot g$ ebenfalls 2π -periodisch. Ferner ist mit f für jede ganze Zahl k die Funktion $x \rightarrow f(kx)$ auch 2π -periodisch. Somit sind für jedes ganzzahlige k die Funktionen $x \rightarrow \sin(kx)$ und $x \rightarrow \cos(kx)$ 2π -periodisch; sie sind sozusagen die Standardfunktionen dieser Art. *Die Theorie der Fourierreihen beschäftigt sich mit der Darstellung von Funktionen der Periode 2π als (unendliche) Linearkombinationen dieser Standardfunktionen.* Das Ziel ist also das folgende:

Gegeben sei die 2π -periodische Funktion f . Gesucht ist eine Darstellung von f in der Form einer konvergenten unendlichen Reihe

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Es stellt sich *zuerst* die Frage, welche 2π -periodischen Funktionen überhaupt eine derartige Darstellung zulassen. Die Mathematik kann zeigen, dass eine solche Darstellung zwar nicht immer existiert, aber doch für sehr viele der Funktionen, die in Anwendungen auftreten, möglich ist. Genauer: Es zeigt sich, dass die stückweise stetig differenzierbaren 2π -periodischen Funktionen im wesentlichen so dargestellt werden können. Die zugehörige mathematische Theorie ist recht involviert, und sie kann hier selbstverständlich nicht behandelt zu werden.

Viel einfacher ist der *zweite Teil* des Problems. Weiss man nämlich, dass f eine Darstellung der Form $(*)$ zulässt, so kann man die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots relativ leicht bestimmen. Der Grund dafür liegt in den von früher her bekannten *Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen*:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos nx \, dx &= \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = k = 0 \\ \pi & \text{für } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } n = k = 0 \\ \pi & \text{für } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos nx \, dx &= 0 \quad \text{für } k, n \geq 0 . \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Relationen erhält man nämlich:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos nx \, dx \\
&= \pi a_n .
\end{aligned}$$

Entsprechend liefert die Multiplikation mit $\sin nx$ und Integration von 0 bis 2π

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \pi b_n .$$

Wir haben damit das folgende Resultat erhalten:

Satz Die 2π -periodische Funktion f werde durch die konvergente trigonometrische Reihe

$$(*) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dargestellt. Dann gelten für die Koeffizienten a_n und b_n die Formeln

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx , \quad n \geq 0 , \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx , \quad n \geq 1 .
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_n, b_n heissen die *Fourierkoeffizienten*, und die Reihe $(*)$ heisst die *Fourierreihe* der Funktion f . Es ist klar, dass wegen der Periodizität an Stelle des Integrationsintervalles $[0, 2\pi]$ irgend ein Intervall der Länge 2π genommen werden kann.

Beispiel Gegeben sei die 2π -periodische Funktion, die im Intervall $[0, 2\pi]$ durch

$$f : x \rightarrow \begin{cases} x - \pi & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definiert ist. Gesucht ist die Fourierreihe von f . Die Fourierkoeffizienten ergeben sich wie folgt. Als Integrationsintervall wählt man hier mit Vorteil $[-\pi, +\pi]$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} (x - \pi) \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{\pi}^0 (-t + \pi) \cos nt \, dt + \int_0^{\pi} (x - \pi) \cos nx \, dx \right] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Dabei wurde im ersten Integral die Substitution $x = -t$ durchgeführt. Die gleiche Substitution verwendet man auch in der nächsten Rechnung.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^0 (-t + \pi) \sin nt \, dt + \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin nx \, dx . \end{aligned}$$

Das letztere Integral lässt sich mit partieller Integration weiter behandeln:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin nx , & v(x) &= x - \pi \\ u(x) &= -\frac{1}{n} \cos nx , & v'(x) &= 1 . \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[(x - \pi) \frac{(-\cos nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \pi \cdot \left(\frac{-1}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} . \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f lautet somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} \sin nx = -2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right) .$$

Es ergibt sich aus der hier nicht behandelten Theorie der Fourierreihen, dass die Reihe konvergiert und in der Tat die gegebene Funktion f darstellt.

Beispiel Die 2π -periodische Funktion f sei im Intervall $[-\pi, +\pi]$ durch

$$f : x \rightarrow \begin{cases} -A & \text{für } -\pi < x < 0 \\ A & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = -\pi, 0, \pi \end{cases} .$$

Mit Vorteil wählt man auch hier als Integrationsintervall $[-\pi, +\pi]$. Wie oben ergibt sich dann $a_n = 0$, denn die Integranden der hier zu berechnenden Integrale sind ungerade Funktionen.

Die Rechnung für b_n ergibt

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-A) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} A \sin nx \, dx \right] \\
 &= \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\
 &= \frac{2A}{\pi} \left[\frac{1}{n} (-\cos nx) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos nx) ,
 \end{aligned}$$

so dass man

$$b_n = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

erhält. Die Fourierreihe der Funktion f lautet also

$$\frac{4A}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Aus der allgemeinen Theorie der Fourierreihen ergibt sich auch hier, dass die Reihe überall konvergiert und die Funktion f darstellt.

Wir haben bis anhin nur 2π -periodische Funktionen angesehen. Natürlich kann man ähnlich auch Funktionen mit einer beliebigen Periodenlänge T behandeln. Die oben benützte Variable x ist dann zu ersetzen durch t mit $x = \frac{2\pi}{T} t$. Es gilt dann der analoge Satz:

Satz Die T -periodische Funktion f werde durch die konvergente trigonometrische Reihe

$$(*) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right)$$

dargestellt. Dann gelten für die Koeffizienten a_n und b_n die Formeln

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos \frac{2\pi n}{T} t \, dt , \quad n \geq 0 , \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \sin \frac{2\pi n}{T} t \, dt , \quad n \geq 1 .
 \end{aligned}$$

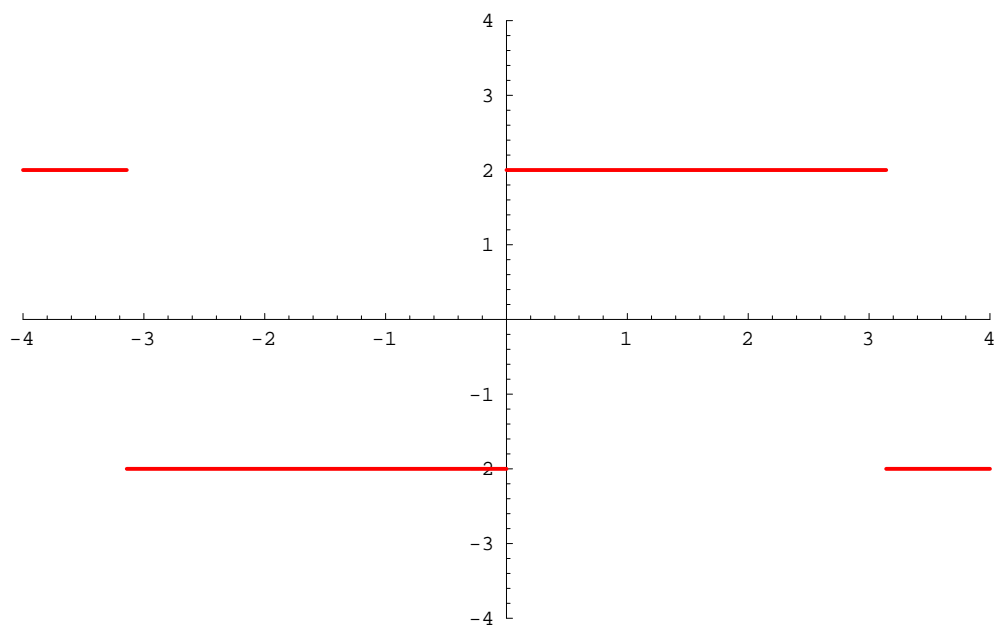
Ist die Ausgangsfunktion f stückweise stetig differenzierbar, so ist die Fourierreihe konvergent und sie stellt f im wesentlichen dar.

Es ist vielleicht hier der Ort die Einschränkung “*im wesentlichen*” zu erklären, die wir in der Einleitung verwendet haben. Sie bezieht sich auf die (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen der Funktion f . In diesen Stellen konvergiert die Fourierreihe immer gegen den Mittelwert des linken und rechten Grenzwertes von f . Ist a eine derartige Stelle, so konvergiert die Fourierreihe in a gegen

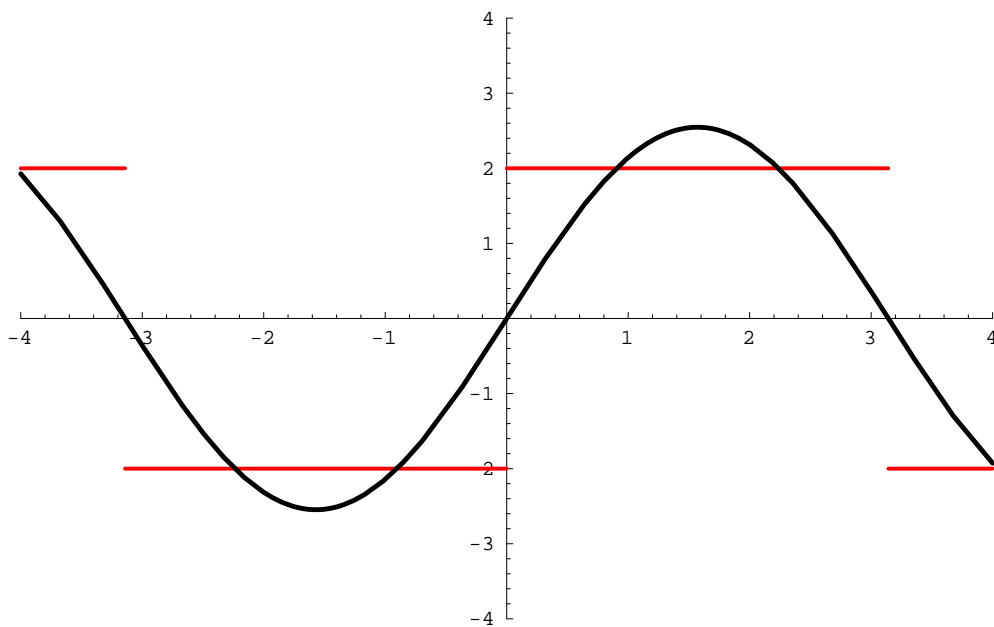
$$\frac{\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)}{2}.$$

In den oben behandelten Beispielen mussten deshalb die Funktionswerte an den Unstetigkeitsstellen so vorgegeben werden, wie das geschehen ist. Nur dann wird die Fourierreihe die Funktion f wirklich in *jedem* Punkt, auch in den Unstetigkeitsstellen, darstellen.

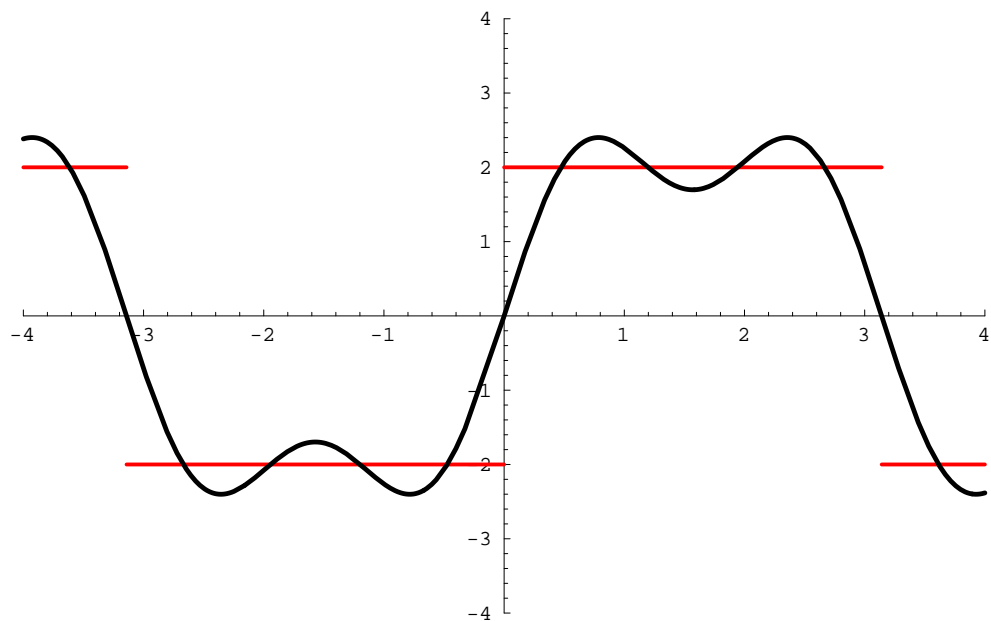
$$x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } 2i\pi < x < (2i+1)\pi, i \in \mathbb{Z} \\ -2 & \text{für } (2i+1)\pi < x < (2i+2)\pi, i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x = i\pi, i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



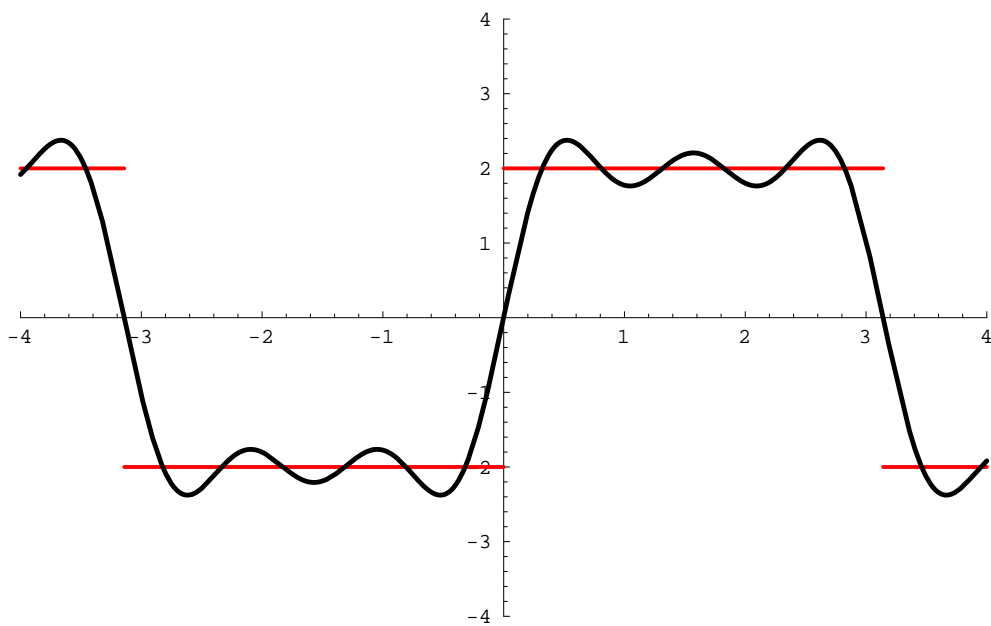
$$x \mapsto \frac{8}{\pi} \sin x$$



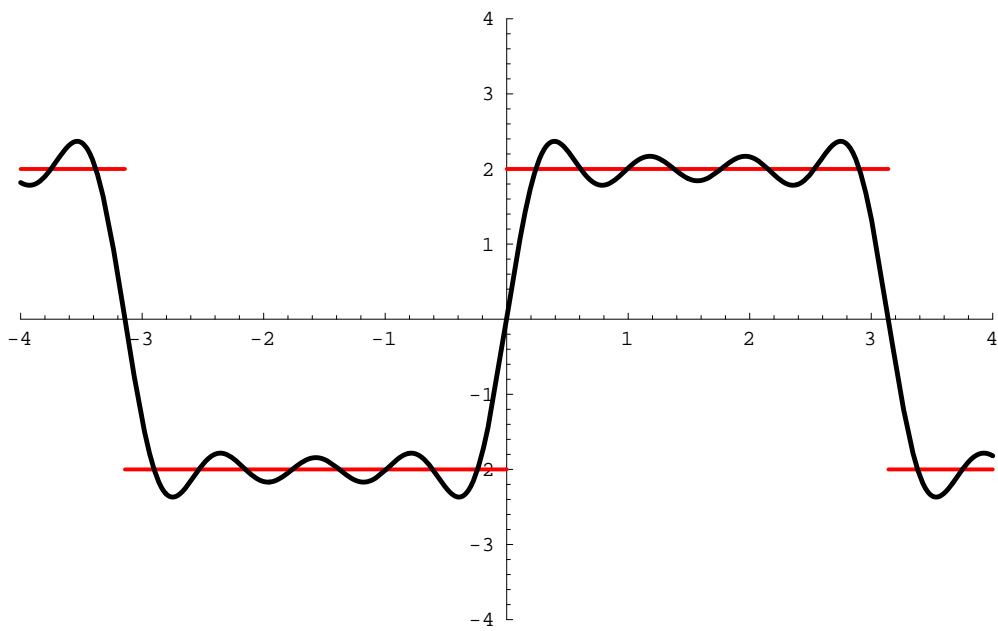
$$x \mapsto \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right)$$



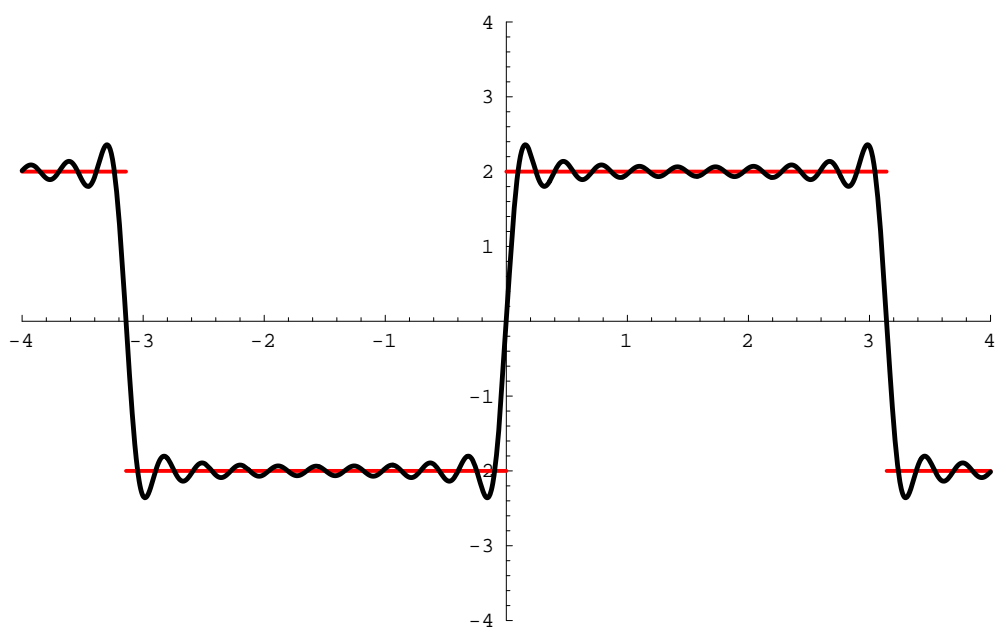
$$x \mapsto \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$$



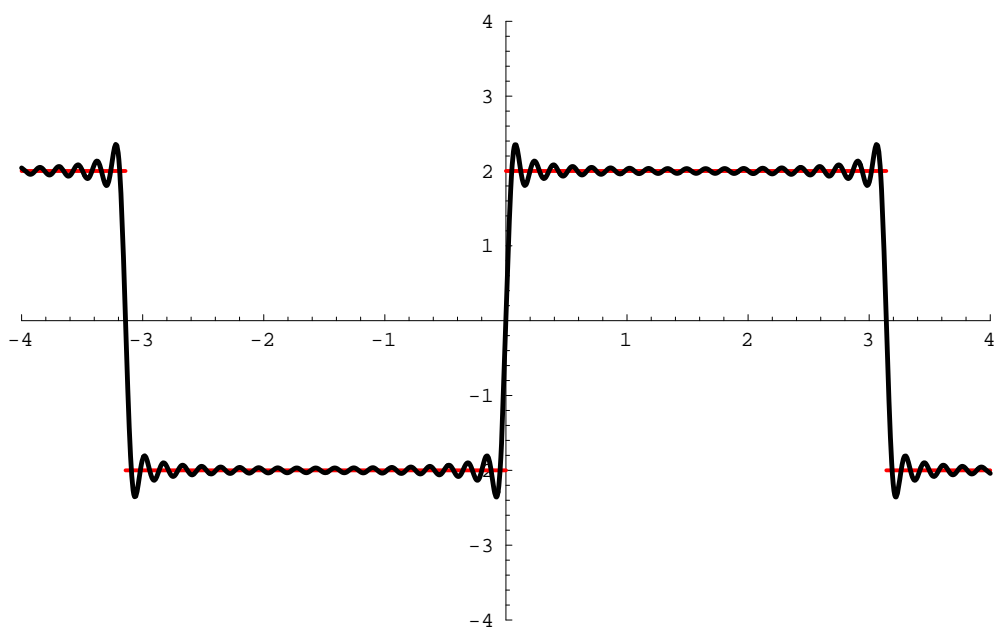
$$x \longmapsto \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} \right) = \frac{8}{\pi} \sum_{i=0}^3 \frac{\sin(2i+1)x}{2i+1}$$



$$x \mapsto \frac{8}{\pi} \sum_{i=0}^9 \frac{\sin(2i+1)x}{2i+1}$$



$$x \longmapsto \frac{8}{\pi} \sum_{i=0}^{19} \frac{\sin(2i+1)x}{2i+1}$$



$$x \longmapsto \frac{8}{\pi} \sum_{i=0}^{39} \frac{\sin(2i+1)x}{2i+1}$$

