

## 1 Zu Konvergenz und Divergenz von Reihen

Die (unendliche) **Reihe**

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \quad a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R},$$

besitzt die *Glieder*  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und die *Partialsummen*  $s_0, s_1, s_2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Konvergiert die Folge  $s_0, s_1, s_2, \dots$  der Partialsummen gegen  $s$ , so heisst die Reihe (1.1) *konvergent*, und  $s$  heisst deren *Summe*. Dann schreiben wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$

Divergiert die Folge der Partialsummen, so heisst die Reihe (1.1) *divergent*.

**Beispiel** Die geometrische Reihe mit Faktor  $x$ ,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

besitzt die Glieder  $a_k = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Sie konvergiert für  $|x| < 1$  (siehe Kapitel I, Abschnitt 1). In diesem Fall ist ihre Summe gegeben durch

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Für  $|x| \geq 1$  divergiert die geometrische Reihe. Im Bereich der Konvergenz, d.h. im Intervall  $(-1, +1)$  definiert die geometrische Reihe eine Funktion, nämlich  $x \rightarrow 1/(1-x)$  (siehe Kapitel I, Abschnitt 1).

**Beispiel** Für  $|x| < 1$  gilt offenbar

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

**Beispiel** Für  $|x| < 1$  gilt offenbar

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots .$$

**Beispiel** Die sogenannte harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert (siehe Kapitel I, Abschnitt 1).

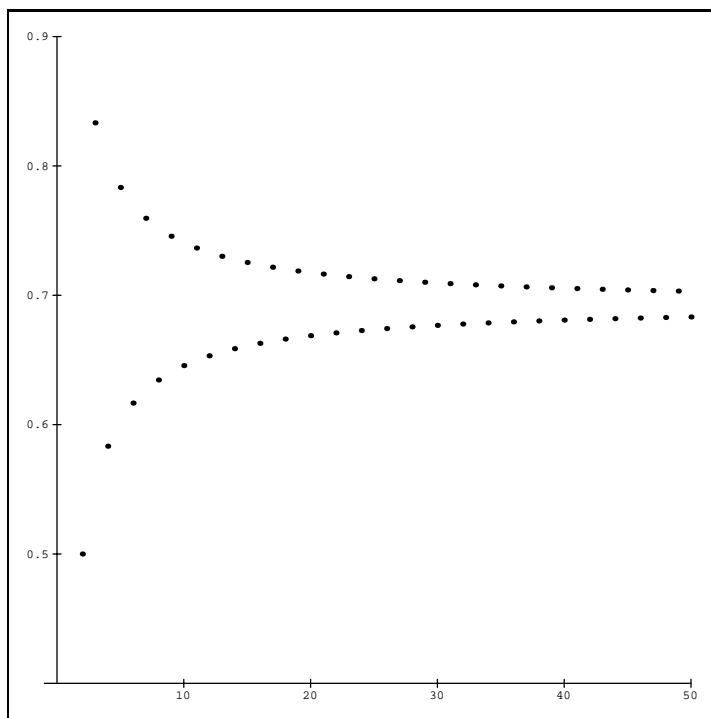


FIG. 1 :  
Die Partialsummen  
der alternierenden  
harmonischen Reihe

**Beispiel** Die sogenannte alternierende harmonische Reihe (siehe Figur 1)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert. Um dies einzusehen, bemerken wir zuerst das Folgende. Wegen

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} = s_{n-1} + (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

gilt

$$s_n - s_{n-1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} .$$

Tragen wir die Werte der Partialsummen als Punkte auf der Zahlgeraden ab, so ist der Schritt von  $s_{n-1}$  zu  $s_n$  wegen dem Vorzeichen alternierend einmal nach links und dann nach rechts zu tun. Ausserdem strebt die Schrittlänge mit zunehmendem  $n$  gegen Null. Die Folge der Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihen konvergiert deshalb, und zwar liegt offenbar der Limes  $s$  für jedes  $n$  zwischen  $s_{n-1}$  und  $s_n$ . Wie gross dieses  $s$  ist, lässt sich numerisch angenähert bestimmen; allerdings konvergiert die alternierende harmonische Reihe sehr langsam. Wir werden weiter unten diese Summe auf überraschende Weise, d.h. nicht “nur” numerisch beschreiben können.

Wir entnehmen diesen wenigen Beispielen sofort die zwei folgenden allgemeinen Erkenntnisse.

**Satz** Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$  (gegen  $s$ ), so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

In der Tat gilt ja  $s_n - s_{n-1} = a_n$  und ein Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0 .$$

Die harmonische Reihe zeigt, dass aus  $|a_n| < |a_{n-1}|$  für alle  $n$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

nicht notwendigerweise folgt, dass die Reihe konvergiert. Die Überlegung, die wir im Falle der alternierenden harmonischen Reihe angestellt haben, liefert aber das folgende nützliche Resultat.

**Satz** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$  sei alternierend (die Vorzeichen wechseln ab). Gilt ausserdem  $|a_n| < |a_{n-1}|$  für alle  $n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , so konvergiert die Reihe.