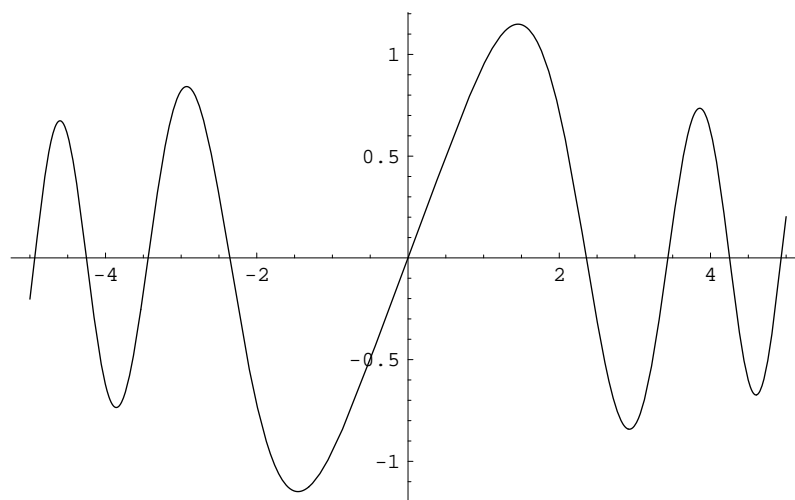


## U. Stammbach: Analysis I/II

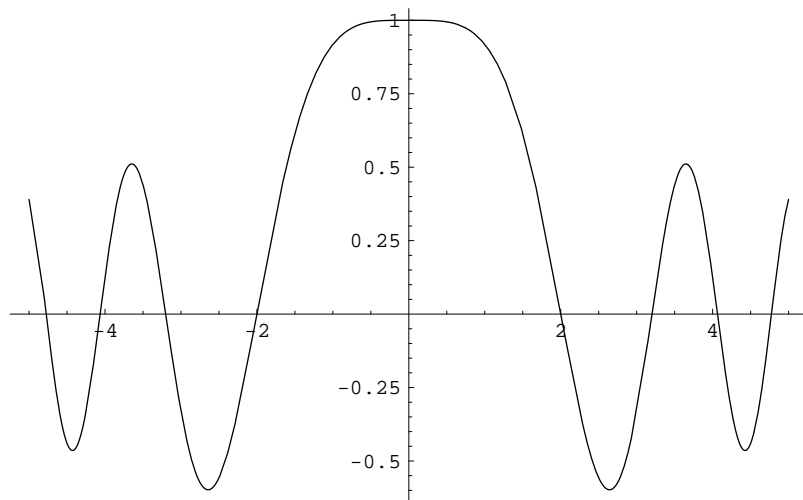
Einige Mathematica-Graphiken zur Differentialgleichung  $y'' + x^2y = 0$ .

Im Skript (Kap. VIII, p. 32/33) wurde die Differentialgleichung  $y'' + x^2y = 0$  diskutiert. Ganz zu Beginn der Diskussion wurde dort erwähnt, dass sich die Lösungen nicht elementar ausdrücken lassen. Trotzdem ist es uns mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes gelungen die Lösung zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$  zu berechnen. Wir nennen in der Folge die dort erhaltenen Lösung  $Y_1 : x \rightarrow Y_1(x)$ .



Ein analoges Verfahren lässt sich offensichtlich durchführen, um *spezielle* Lösungen zu beliebig vorgegebene Anfangsbedingungen zu erhalten. Zusätzlich stellt sich natürlich auch die Frage, wie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung beschrieben werden kann. Insbesondere ist man an *qualitativen* Aussagen interessiert, so möchte man z.B. wissen, ob jede Lösung den in der Graphik Fig. 7 sichtbaren Schwingungscharakter hat.

Unsere Differentialgleichung 2. Ordnung  $y'' + x^2y = 0$  ist linear und homogen. Deshalb wissen wir, dass die Lösungen einen Vektorraum der Dimension zwei bilden (siehe Kap. VII, p. 75, Satz 9.2). Eine Lösungsfunktion  $Y_1$ , nämlich diejenige zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  kennen wir bereits. Um eine Basis des Lösungsraumes zu erhalten, benötigen wir deshalb nur noch eine davon linear unabhängige zweite Lösung. Es ist klar, dass wir eine solche erhalten, wenn wir die Anfangsbedingungen anders wählen, nämlich linear unabhängig von den obigen. Es genügt deshalb, noch die Lösung zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  zu berechnen. Dies geschieht wie im Skript durch den entsprechenden Potenzreihenansatz; wir nennen die so erhaltene Lösung  $Y_0 : x \rightarrow Y_0(x)$ . Aus der Mathematica-Graphik ist zu sehen, dass auch diese Lösung den uns schon bekannten Schwingungscharakter aufweist.



Man beachte schliesslich, dass *jede* Lösung der Differentialgleichung als Linearkombination der beiden eben konstruierten speziellen Lösungen  $Y_0(x)$  und  $Y_1(x)$  erhalten wird. Die entsprechende Linearkombination lässt sich sogar direkt angeben: Zur Anfangsbedingung  $y(0) = A_0, y'(0) = A_1$  gehört die Lösung

$$y(x) = A_0 Y_0(x) + A_1 Y_1(x) .$$

Aus der Tatsache, dass die beiden Basisfunktionen  $Y_0$  und  $Y_1$  Schwingungscharakter aufweisen, ergibt sich also nun, dass dies für *jede* Lösung der Differentialgleichung der Fall ist. Illustriert wird dies durch die folgenden Beispiele, wo wir für  $(A_0, A_1)$  der Reihe nach  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(5, 1)$  gesetzt haben.

