

5 Anwendungen

In diesem letzten Abschnitt besprechen wir eine Reihe von Situationen, in denen die Idee der Potenzreihenentwicklung einer Funktion die Bearbeitung eines Problems jeweils einen Schritt weiterbringt.

Beispiel Es ist der Ellipsenumfang zu berechnen. Die Ellipse, $a \geq b$ (siehe Figur 1), sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

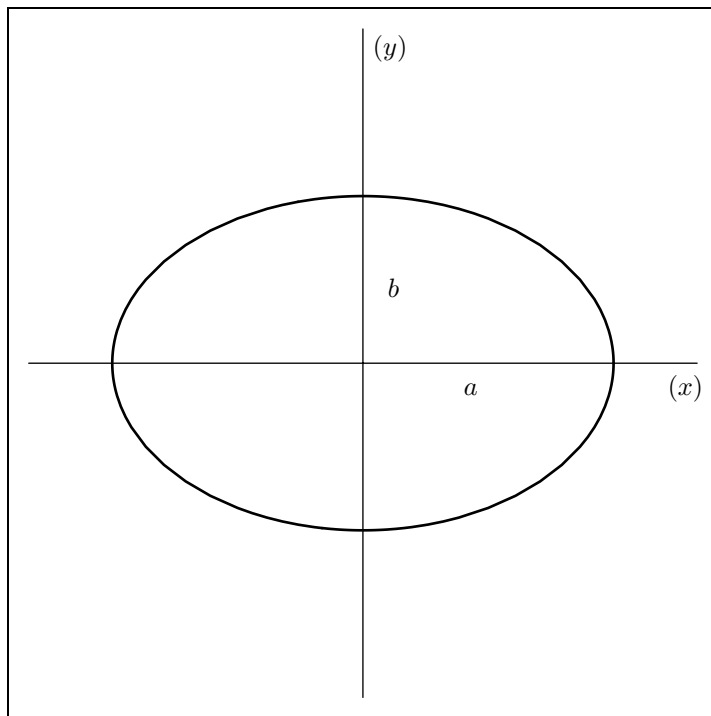


FIG. 1 :
Zum Umfang der Ellipse

Der Umfang ergibt sich dann mit der Formel für die Bogenlänge (Kapitel III, Abschnitt 8) zu

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \cos^2 t} \, dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} \, dt .$$

Dabei haben wir

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

gesetzt. Es ist also $0 \leq k^2 < 1$. Das hier auftretende Integral ist (für $k \neq 0$) nicht elementar lösbar. Es ist ein sogenanntes *elliptisches Integral zweiter Art*. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung des Integranden kann man aber den Wert des Integrals als Reihe darstellen. Wir benützen dazu die für $|x| < 1$ gültige Reihenentwicklung

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

Setzen wir $x = k^2 \cos^2 t$, so erhalten wir

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2}k^2 \cos^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4}k^4 \cos^4 t - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \cos^6 t - \dots \right) dt.$$

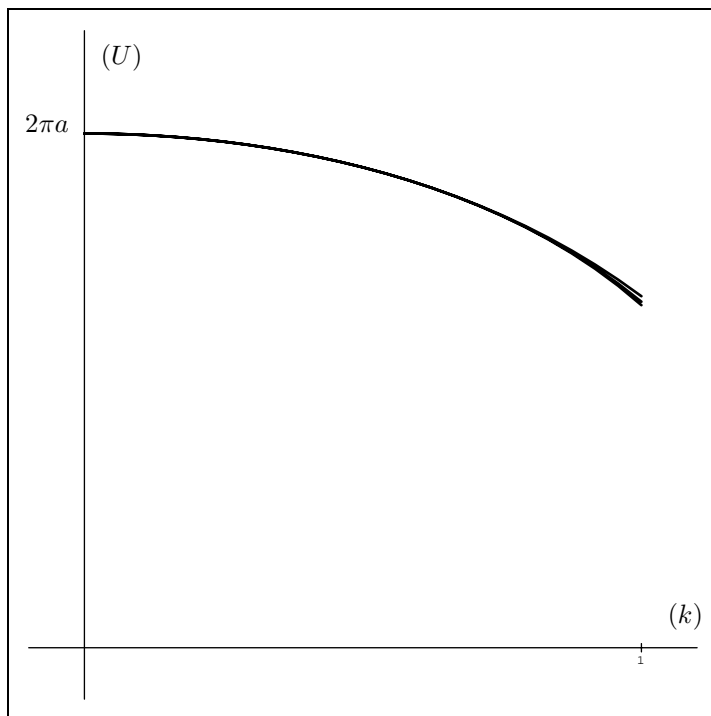


FIG. 2 :
Der Umfang der Ellipse
dargestellt als Reihe in k

Die gliedweise Integration liefert dann wegen

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}$$

(Kapitel III, Abschnitt 6) eine Darstellung von U in Reihenform (siehe Figur 2)

$$U = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots \right].$$

Die Reihe konvergiert für kleine k , d.h. für Ellipsen, die “kreisähnlich” sind, recht schnell und kann für die Berechnung des Umfanges ohne weiteres verwendet werden.

Beispiel Es ist die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (ohne Linearisieren) zu berechnen. Wir haben bereits früher gesehen, dass im linearisierten Problem die Schwingungsdauer überraschenderweise unabhängig ist vom Maximalausschlag. Dies gilt – wie wir hier zeigen werden – für die *nicht* linearisierte Schwingung des mathematischen Pendels nicht mehr.

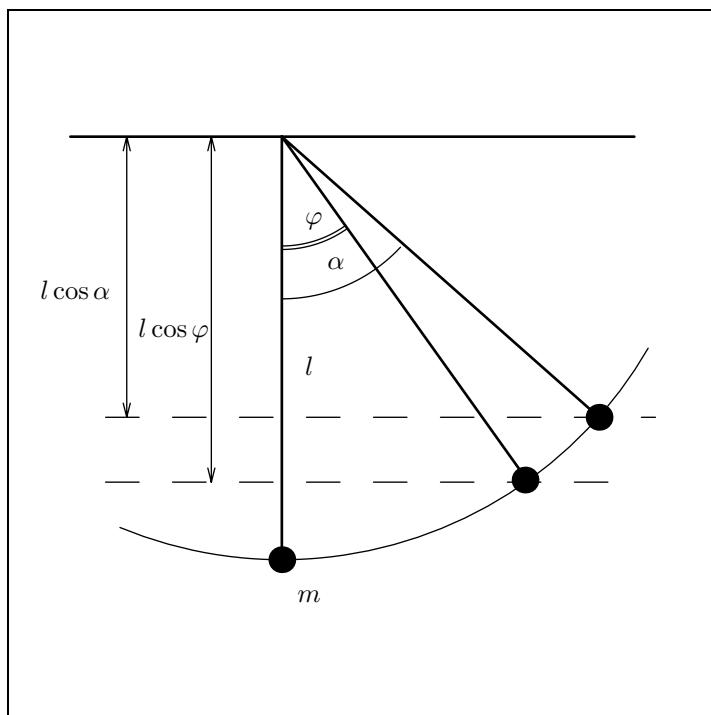


FIG. 3:
Zur Anwendung des
Energiesatzes auf das
mathematische Pendel

Statt mit der in Kapitel VII, p. 98 hergeleiteten Differentialgleichung zweiter Ordnung zu arbeiten, wenden wir den Energiesatz an. Ist α der maximale Ausschlag des Pendels (siehe Figur 3), so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = mgl(\cos \varphi - \cos \alpha) .$$

(Die frühere Differentialgleichung zweiter Ordnung wird daraus durch Ableitung nach t zurück-erhalten!) Es folgt daraus die Differentialgleichung (erster Ordnung)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}$$

für die Funktion $t \rightarrow \varphi(t)$. Sie lässt sich separieren. Man erhält

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} ,$$

und die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels lässt sich als Integral hinschreiben

$$T = 4 \int_0^{T/4} dt = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} .$$

In diesem Integral machen wir die Substitution

$$\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin u$$

und setzen

$$k = \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 1 - 2k^2 \\ \cos \varphi &= 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 1 - 2k^2 \sin^2 u \\ \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi &= k \cos u du \\ \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) &= \left(1 - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^{1/2} = (1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2} \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2k \cos u \, du}{(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2} (1 - 2k^2 \sin^2 u - 1 + 2k^2)^{1/2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}} .\end{aligned}$$

Von diesem letzteren Integral ist bekannt, dass es nicht elementar lösbar ist; es handelt sich um ein sogenanntes *elliptisches Integral erster Art*. Ähnlich wie im ersten Beispiel benützen wir die für $|x| < 1$ gültige Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots ,$$

um den Integranden in Reihenform darzustellen. Setzen wir $x = k^2 \sin^2 u$, so folgt

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 u + \dots \right) du .$$

Mit dem bekannten Resultat

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}$$

erhalten wir die Schwingungsdauer in Reihenform

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

mit $k = \sin(\alpha/2)$. Für kleine α (kleiner Maximalausschlag) ist also der aus der linearisierten Theorie bekannte Wert

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

eine gute Näherung.

Beispiel Gesucht sind die Funktionswerte der Gauss'schen Fehlerfunktion. Die Gauss'sche Fehlerfunktion ist gegeben durch

$$\Phi : x \rightarrow \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

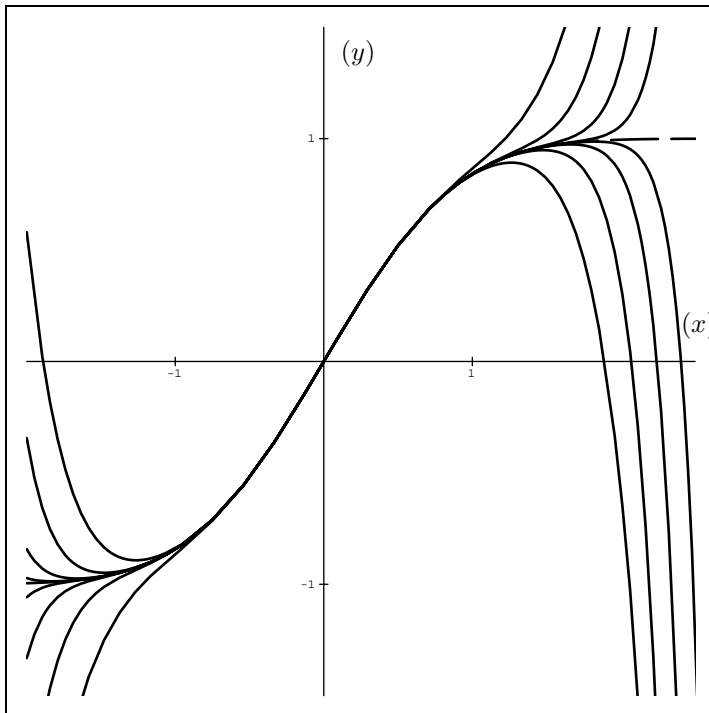


FIG. 4:
Die Berechnung der Gauss'schen
Fehlerfunktion mit Hilfe einer
Reihenentwicklung; die Kurve
 $y = \Phi(x)$ ist gestrichelt
eingezeichnet

Das Integral ist bekanntlich nicht elementar lösbar (Kapitel III, Abschnitt 2). Eine Reihenentwicklung des Integranden und anschliessendes gliedweises Integrieren liefert den Funktionswert von Φ in Reihenform. Aus

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

erhalten wir

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \cdots .$$

Daraus folgt (siehe Figur 4)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \cdots \right) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!}x^5 - \frac{1}{7 \cdot 3!}x^7 + \cdots \right) .$$

Beispiel Als Kurve, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge zunimmt, haben wir die Klotoiden kennengelernt (Kapitel III, Abschnitt 8). Sie ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\left| \begin{array}{lcl} x(l) & = & \int_0^l \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \\ y(l) & = & \int_0^l \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \end{array} \right|$$

Die beiden Integrale (Fresnel'sche Integrale) lassen sich nicht elementar ausdrücken. Ähnlich wie oben erhalten wir mit einer Reihendarstellung des Integranden wenigstens eine Reihendarstellung für x und y .

Die Cosinus- und Sinus-Reihen liefern unmittelbar

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) &= 1 - \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{t^8}{2^4 \cdot 4!} - \frac{t^{12}}{2^6 \cdot 6!} + \cdots, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) &= \frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{2^3 \cdot 3!} + \frac{t^{10}}{2^5 \cdot 5!} - \cdots, \end{aligned}$$

so dass man erhält (siehe Figur 5)

$$\begin{aligned} x &= l - \frac{l^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} + \frac{l^9}{9 \cdot 2^4 \cdot 4!} - \frac{l^{13}}{13 \cdot 2^6 \cdot 6!} + \cdots, \\ y &= \frac{l^3}{3 \cdot 2} - \frac{l^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \frac{l^{11}}{11 \cdot 2^5 \cdot 5!} - \cdots. \end{aligned}$$

Die Reihen konvergieren für kleine l sehr rasch, so dass sie ohne weiteres für die Berechnung von x und y verwendet werden können.

Beispiel Misst man mit einem freihängenden Messband eine horizontale Distanz, so ist der abgelesene Wert mit einem Fehler behaftet, weil das Messband durchhängt (siehe Figur 6). Gesucht ist eine Abschätzung dieses Fehlers.

Die Lage des Messbandes sei durch die Funktion $x \rightarrow f(x)$ beschrieben. Für die Länge des Messbandes (Bogenlänge) gilt dann die differentielle Beziehung

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Die Differenz $ds - dx$ liefert das Differential du des Fehlers u . Wir erhalten

$$du = ds - dx = (\sqrt{1 + (f'(x))^2} - 1) dx.$$

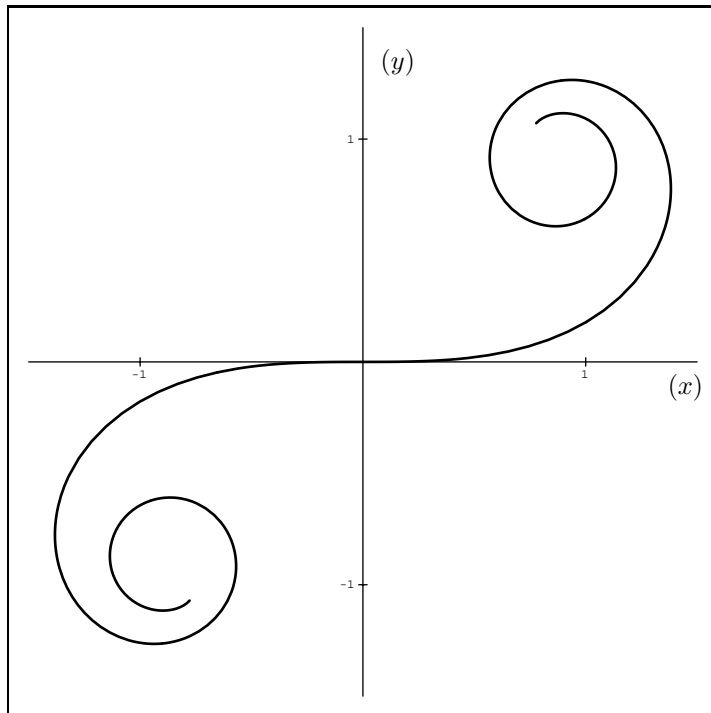


FIG. 5:
Die Klottoide; für die Zeichnung
sind die ersten 13 nichttrivialen
Glieder der Reihenentwicklung
verwendet worden

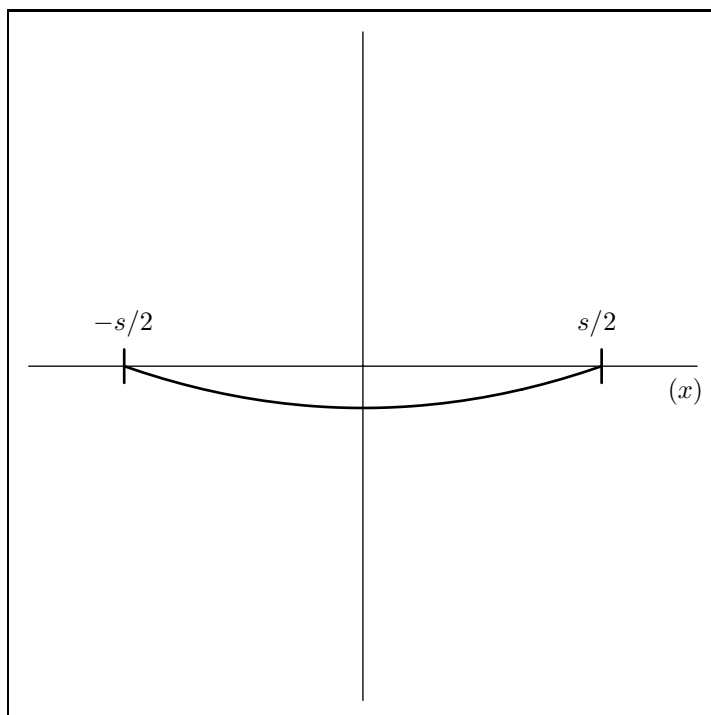


FIG. 6:
Zur Behandlung des
freihängenden Messbandes

Da $|f'(x)|$ klein ist, approximieren wir die Wurzel durch die ersten beiden Terme der Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \sim 1 + \frac{1}{2}(f'(x))^2 .$$

Damit folgt

$$du = \frac{1}{2}(f'(x))^2 dx .$$

Für den Fehler u auf der ganzen Länge des Messbandes gilt somit

$$u = \int_0^{s/2} (f'(x))^2 dx .$$

Laut Mechanik hat man $f(x) = \frac{1}{a} \cosh(ax) - b$. Dabei ist die Grösse a durch die Erdbeschleunigung g , die Längendichte ρ und durch die Seilspannung σ gegeben, nämlich

$$a = \frac{g\rho}{\sigma} .$$

Damit folgt $f'(x) = \sinh(ax)$. Da wir nur an einer Approximation interessiert sind, entwickeln wir den Integranden von

$$\int_0^{s/2} (f'(x))^2 dx$$

in eine Potenzreihe und begnügen uns mit dem ersten nichttrivialen Term. Wegen

$$f'(x) = \sinh(ax) = ax + \frac{(ax)^3}{3!} + \dots$$

erhalten wir

$$(f'(x))^2 = a^2 x^2 + \frac{2}{3!} a^4 x^4 + \dots .$$

Daraus folgt als Approximation für den Fehler u

$$u = \int_0^{s/2} (f'(x))^2 dx \sim \int_0^{s/2} a^2 x^2 dx = \frac{1}{24} a^2 s^3 .$$

Der Messfehler ist insbesondere proportional zu ρ^2 , $1/\sigma^2$ und s^3 .

Beispiel Die Differentialgleichung

$$(5.1) \quad y' = ay$$

hat bekanntlich

$$x \rightarrow y(x) = Ce^{ax}$$

als Lösung. Wir wollen hier zeigen, dass man eine Potenzreihenentwicklung dieser Funktion erhält, indem man direkt in der Differentialgleichung einen Potenzreihenansatz benützt. Dieses Vorgehen kann natürlich nur dann Erfolg haben, wenn die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung überhaupt eine Potenzreihendarstellung zulassen. Wir wissen bereits, dass dies im Beispiel (5.1) der Fall ist. Für viele andere Differentialgleichungen können die Mathematiker diese Eigenschaft der Lösungsfunktionen mit Hilfe von allgemeinen Sätzen nachweisen (siehe dazu weiter unten). Unser einfaches Beispiel dient nur dazu, das Verfahren zu illustrieren. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung (5.1) ein. Wir erhalten

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots = ac_0 + ac_1x + ac_2x^2 + \dots$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 &= ac_0 \\ 2c_2 &= ac_1 \\ 3c_3 &= ac_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Suchen wir die durch die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ eindeutig bestimmte Lösung, so gilt $c_0 = 1$ und damit der Reihe nach

$$\begin{aligned} c_1 &= a \\ c_2 &= \frac{a^2}{2!} \\ c_3 &= \frac{a^3}{3!} \\ c_4 &= \frac{a^4}{4!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Reihendarstellung der Lösung lautet also, keineswegs überraschend,

$$y(x) = 1 + ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + \cdots .$$

Von dieser wissen wir aus andern Gründen bereits, dass sie für alle x konvergiert.

Beispiel Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y = 0$$

Gesucht ist die durch die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ eindeutig bestimmte Lösung.

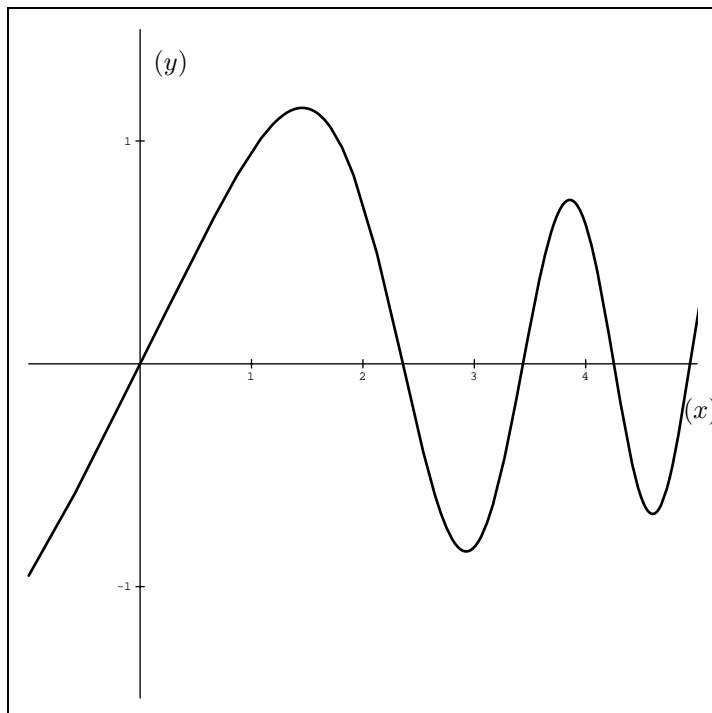


FIG. 7:
Die Lösungskurve der
Differentialgleichung
 $y'' + x^2 y = 0$ mit $y(0) = 0$ und
 $y'(0) = 1$; für die Zeichnung
sind die ersten 20 nicht-
verschwindenden Terme der
Taylorentwicklung verwendet
worden.

Man kann zeigen, dass die Lösungsfunktionen der (linearen, homogenen(!)) Differentialgleichung nicht elementar darstellbar sind. Deshalb besteht erhebliches Interesse an einer anderen Darstellung, z.B. an einer Potenzreihenentwicklung. Eine solche ist in der Tat möglich. Es gilt nämlich der mathematische Satz, dass sich die Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung immer in eine Potenzreihe mit Mittelpunkt x_0 entwickeln lassen, wenn die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung ebenfalls Potenzreihenentwicklungen mit Mittelpunkt x_0 zulassen. Dies ist in unserem Beispiel trivialerweise der Fall.

Wir machen also den Ansatz

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots , \\ y''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$(2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \cdots) + x^2(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots) = 0$$

und ein Koeffizientenvergleich führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2c_2 &= 0 \\ 2 \cdot 3c_3 &= 0 \\ 3 \cdot 4c_4 + c_0 &= 0 \\ 4 \cdot 5c_5 + c_1 &= 0 \\ 5 \cdot 6c_6 + c_2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen erhalten wir dann die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, \dots rekursiv

$$\begin{array}{lll} c_0 = 0 & c_1 = 1 & c_2 = 0 \quad c_3 = 0 \\ c_4 = 0 & c_5 = -1/4 \cdot 5 & c_6 = 0 \quad c_7 = 0 \\ c_8 = 0 & c_9 = 1/4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 & c_{10} = 0 \quad c_{11} = 0 \\ c_{12} = 0 & c_{13} = -1/4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13 & c_{14} = 0 \quad c_{15} = 0 \end{array}$$

Die Reihendarstellung der gesuchten Funktion lautet also (siehe Figur 7)

$$y(x) = x - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \cdots$$

Der oben zitierte allgemeine Satz besagt, dass diese Reihe wenigstens für kleine x konvergiert; in der Tat konvergiert sie sogar für alle x und zwar sehr rasch.