

Repetition: Kapitel VIII. Potenzreihen

VIII.5. Anwendungen

Für viele Funktionen f gilt, dass ihre Taylorreihe um einen gegebenen Punkt x_0 in einem nichttrivialen Intervall um x_0 konvergiert und dort die Funktion f darstellt.

(Zwar gilt diese Regel für viele Funktionen, aber nicht für alle. Klar ist, dass eine Funktion, die sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt, unendlich oft differenzierbar sein muss. Aber es ist umgekehrt nicht richtig, dass sich jede unendlich oft differenzierbare Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt. Allerdings sind diese Ausnahmen eher pathologischer Natur und spielen bei Anwendungen im Normalfall keine grosse Rolle. (Für Gwundrige: Wir haben bei unseren Bemerkungen über analytische (d.h. komplex differenzierbare) Funktionen festgestellt, dass diese automatisch unendlich oft differenzierbar seien; in diesem Bereich (im Komplexen!) lässt sich dann der Satz beweisen, dass sich jede *analytische* Funktion in eine in einem nichttrivialen Bereich konvergente Potenzreihe entwickeln lässt.)

Da man mit konvergenten Potenzreihen sehr einfach rechnen kann, nämlich wie mit Polynomen (= “endliche” Potenzreihen), so liefern Potenzreihen eine neue Art, mit Funktionen umzugehen. Dies ist deshalb besonders interessant, weil es viele Funktionen gibt, die zwar nicht elementar (durch eine Formel der üblichen Art) ausdrückbar sind, sich aber durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lassen.

Test *Man nenne Beispiele von Funktionen, die sich nicht “elementar” darstellen lassen, für die aber eine Potenzreihe ohne weiteres berechnet werden kann.* (Abschnitt 5, Seiten 22-33.)

Wer Weisheit erwirbt, erwirbt Kummer, und wer sich viele Gedanken macht, muss sich viel ärgern.

Prediger Salomo 1.18