

### 3 Das Volumenintegral

Das Volumenintegral ist analog zum Gebietsintegral definiert. Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings darin, dass der Graph des Integranden für eine anschauliche Interpretation nicht mehr herangezogen werden kann.

**Definition** Es sei eine stetige Funktion  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$  gegeben und ein endlicher räumlicher Bereich  $B$ . Das **Volumenintegral**

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV$$

ist dann wie folgt definiert (siehe Figur 1):

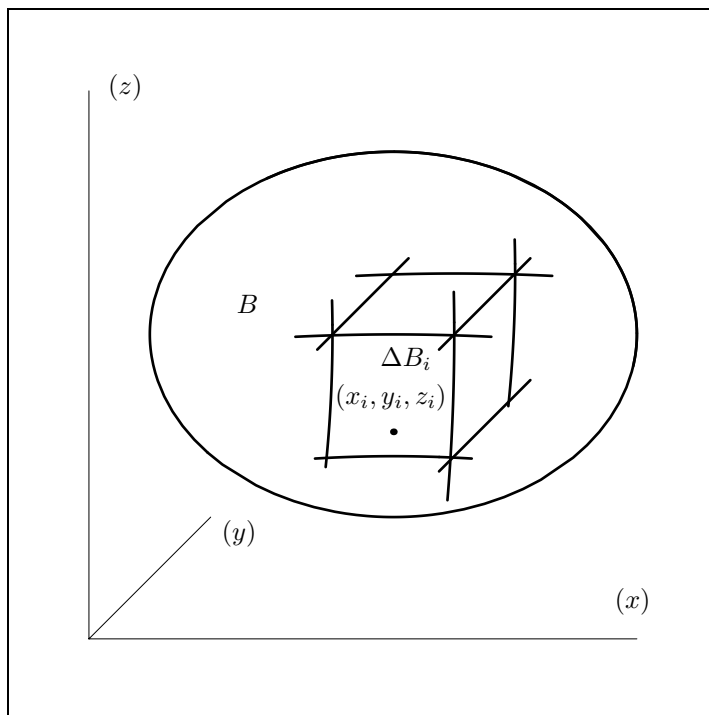


FIG. 1 :  
Zur Definition des  
Volumenintegrals

- (a) Teile  $B$  (durch Flächen, die durch differenzierbare Funktionen gegeben sind) in Teilbereiche  $\Delta B_i$  mit Volumen  $\Delta V_i$  ein,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- (b) Wähle in jedem  $\Delta B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  einen Punkt  $(x_i, y_i, z_i)$ . Die Feinheit der Einteilung ist der Durchmesser der kleinsten Kugel, welche in der Lage ist, jeden einzelnen der Teilbereiche  $\Delta B_i$  zu überdecken.
- (c) Bilde die Riemann'sche Summe

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i .$$

- (d) Das Volumenintegral ist definiert als Grenzwert

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim \left( \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \right) ,$$

wobei eine Folge von Einteilungen von  $B$  zugrunde zu legen ist, deren Feinheit gegen Null strebt.

Es gilt auch hier das mathematische Resultat, dass der Wert des Limes nicht von der gewählten Einteilungsfolge abhängig ist.

Da uns anschaulich der Graph der Funktion  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$  nicht zur Verfügung steht, suchen wir nach einer anderen einfachen Interpretation für das Volumenintegral. Eine von vielen Möglichkeiten ist die folgende. Es sei  $B$  ein dreidimensionaler Körper; dessen Dichte im Punkte  $(x, y, z)$  werde durch die Funktion  $\rho(x, y, z)$  beschrieben. Dann ist  $\rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$  approximativ die in  $\Delta B_i$  vorhandene Masse, und die Riemann'sche Summe

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

liefert eine Approximation für die Masse des Körpers. Die Approximation ist offensichtlich umso besser, je feiner die Einteilung von  $B$  ist. Die Gesamtmasse ist somit durch den Grenzübergang gegeben, d.h. sie ist gleich:

$$M = \iiint_B \rho(x, y, z) dV .$$

Volumenintegrale treten in vielen weiteren Zusammenhängen auf, einige davon werden wir in den folgenden Beispielen oder auch später in dieser Vorlesung kennenlernen.

**Beispiel** Es ist das Trägheitsmoment  $\Theta$  eines homogenen (Dichte  $\rho$ ) Würfels mit Kantenlänge  $a$  gesucht und zwar um eine durch den Mittelpunkt des Würfels und den Mittelpunkt einer Seitenfläche gehenden Achse.

Wählen wir das Koordinatensystem wie in der Figur 2, so gilt für das Trägheitsmoment um die  $z$ -Achse laut Definition

$$\Theta = \rho \iiint_W (x^2 + y^2) dV .$$

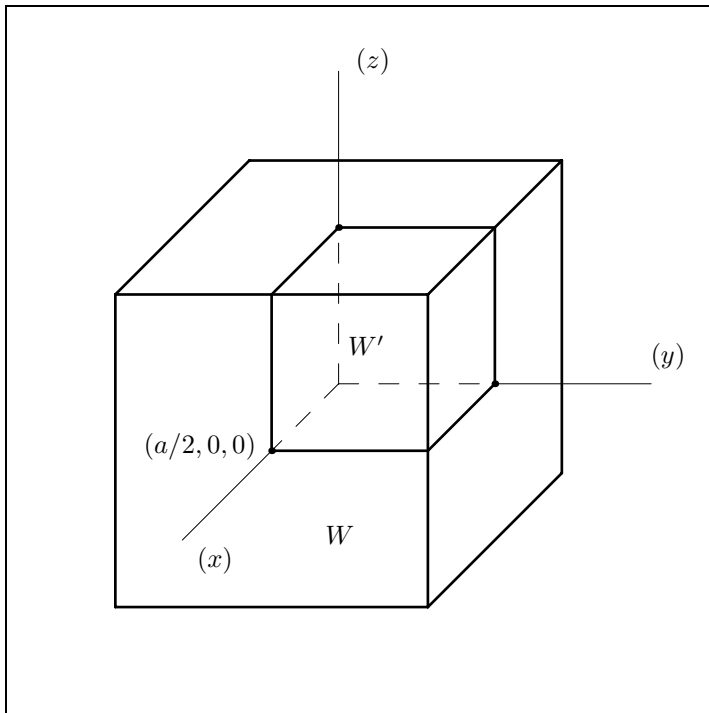


FIG. 2:  
Trägheitsmoment eines Würfels

Aus Symmetriegründen ist der Beitrag an  $\Theta$  von jedem der acht Teilwürfel in den Oktanten des Koordinatensystems gleich gross, so dass gilt

$$\Theta = 8 \rho \iiint_{W'} (x^2 + y^2) dV ,$$

wo  $W'$  der Teilwürfel im 1. Oktanten ist. Analog wie beim Gebietsintegral berechnen wir das Volumenintegral durch Zurückführung auf gewöhnliche Integrationen: Wir wandeln das Volumenintegral in ein *dreifaches Integral* um. Schrittweise erhalten wir (siehe Figur 3):

- Anteil einer “dünnen” Säule an das Trägheitsmoment des Würfels  $W'$

$$\rho dx dy \int_0^{a/2} (x^2 + y^2) dz ,$$

- Anteil einer “dünnen Scheibe” an das Trägheitsmoment als “Summe” der Anteile der Säulen

$$\rho dx \int_0^{a/2} dy \int_0^{a/2} (x^2 + y^2) dz ,$$

- Trägheitsmoment des Würfels  $W'$  als “Summe” der Anteile der Scheiben

$$\rho \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy \int_0^{a/2} (x^2 + y^2) dz .$$

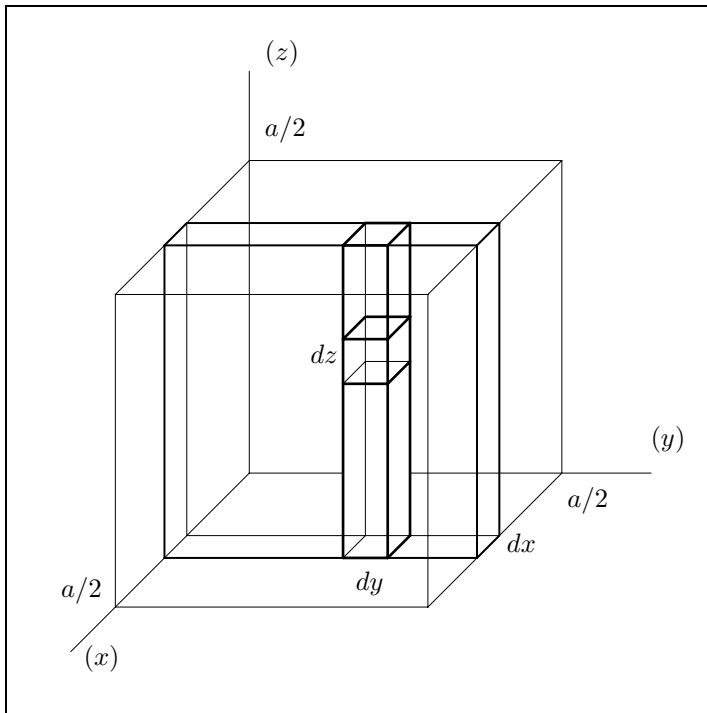


FIG. 3:  
Berechnung des  
Integrals über  $W'$

Damit erhalten wir das Trägheitsmoment  $\Theta$  als ein dreifaches Integral, welches sich ohne weiteres berechnen lässt:

$$\begin{aligned}
 \Theta &= 8 \rho \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy \int_0^{a/2} (x^2 + y^2) dz \\
 &= 8 \rho \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy \left[ x^2 z + y^2 z \right]_0^{a/2} \\
 &= 8 \rho \frac{a}{2} \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy (x^2 + y^2) \\
 &= 8 \rho \frac{a}{2} \int_0^{a/2} dx \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{a/2} \\
 &= 8 \rho \frac{a}{2} \int_0^{a/2} dx \left( \frac{x^2 a}{2} + \frac{a^3}{3 \cdot 8} \right) \\
 &= 8 \rho \frac{a}{2} \left[ \frac{ax^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^3 x}{3 \cdot 8} \right]_0^{a/2} \\
 &= 8 \rho \frac{a}{2} \cdot \frac{a^4}{3 \cdot 8}
 \end{aligned}$$

$$= \rho \frac{a^5}{6} .$$

**Beispiel** Gesucht ist das Trägheitsmoment  $\Theta$  um die  $x$ -Achse des homogenen Tetraeders  $T$  mit Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

Es gilt laut Definition

$$\Theta = \rho \iiint_T (y^2 + z^2) dV .$$

Die mathematische Aufgabe besteht darin, dieses Volumenintegral in ein dreifaches Integral umzuwandeln. Wir gehen dabei ähnlich vor wie im obigen Beispiel (siehe Figur 4).

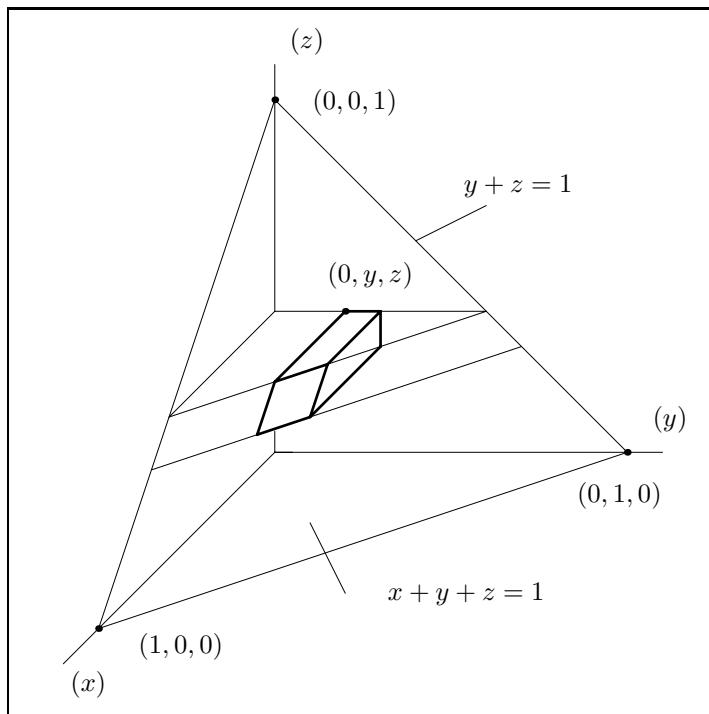


FIG. 4:  
Trägheitsmoment eines  
Tetraeders

- Für festes  $(y, z)$  betrachten wir die "Säule" in Richtung der  $x$ -Achse. Ihr Anteil an das Trägheitsmoment ist

$$\rho dz dy \int_0^{1-y-z} (y^2 + z^2) dx .$$

Die Grenzen für die Integration sind  $x = 0$  (Punkt in der  $(y, z)$ -Ebene) und der  $x$ -Wert des zu  $y$  und  $z$  gehörigen Punktes auf der Ebene  $x + y + z = 1$ , also  $x = 1 - y - z$ .

- Für festes  $z$  betrachten wir die "Scheibe" parallel zur  $(x, y)$ -Ebene. Ihr Anteil an das Trägheitsmoment  $\Theta$  ist die "Summe" der Anteile aller "Säulen" für festgehaltenes  $z$ , also

$$\rho \, dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} (y^2 + z^2) \, dx .$$

Die Grenzen für die  $y$ -Integration sind:  $y = 0$  und der  $y$ -Wert, des zu  $z$  gehörigen Punktes auf der Geraden  $y + z = 1$ , also  $y = 1 - z$ .

- Das ganze Trägheitsmoment  $\Theta$  ist die "Summe" der Anteile aller dieser "Scheiben":

$$\Theta = \rho \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} (y^2 + z^2) \, dx .$$

Wir erhalten nun der Reihe nach

$$\begin{aligned} \Theta &= \rho \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[ y^2 x + z^2 x \right]_0^{1-y-z} \\ &= \rho \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (y^2 - y^3 - y^2 z + z^2 - z^2 y - z^3) \\ &= \rho \int_0^1 dz \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^3 z}{3} + z^2 y - \frac{z^2 y^2}{2} - z^3 y \right]_0^{1-z} \\ &= \frac{\rho}{12} \int_0^1 dz \left[ 4y^3 - 3y^4 - 4y^3 z + 12z^2 y - 6z^2 y^2 - 12z^3 y \right]_0^{1-z} \\ &= \frac{\rho}{12} \int_0^1 (7z^4 - 16z^3 + 12z^2 - 4z + 1) \, dz \\ &= \frac{\rho}{12} \left( \frac{7}{5} - 4 + 4 - 2 + 1 \right) \\ &= \frac{\rho}{30} . \end{aligned}$$

Auch bei Volumenintegralen lohnt es sich manchmal, ein neues Koordinatensystem einzuführen. Wir betrachten hier zuerst den Fall von Kugelkoordinaten.

**Beispiel** Es ist das Volumen einer Kugel  $K$  mit Radius  $R$  zu berechnen.

Wir führen ein Kugelkoordinatensystem ein, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt (siehe Figur 5). Dann gilt offenbar

$$V = \iiint_K 1 \, dV .$$

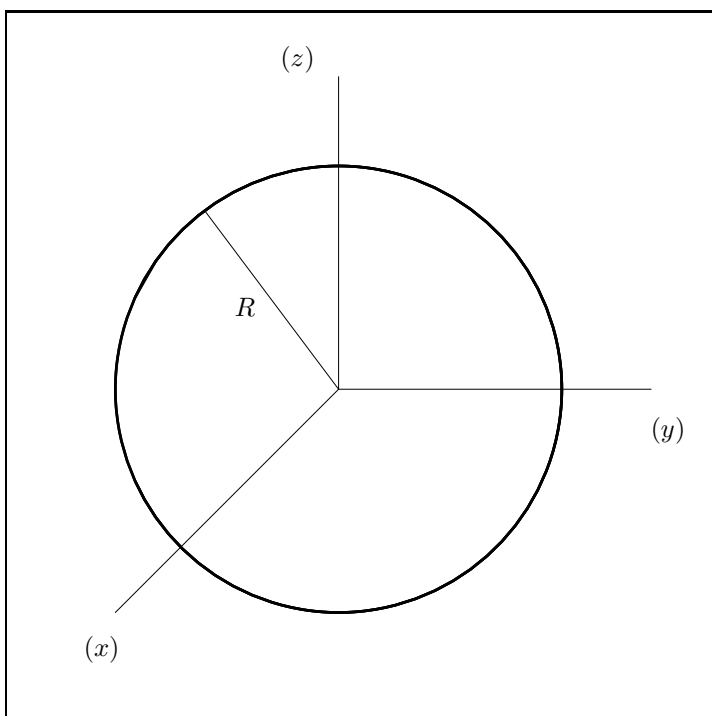


FIG. 5:  
Volumen einer Kugel

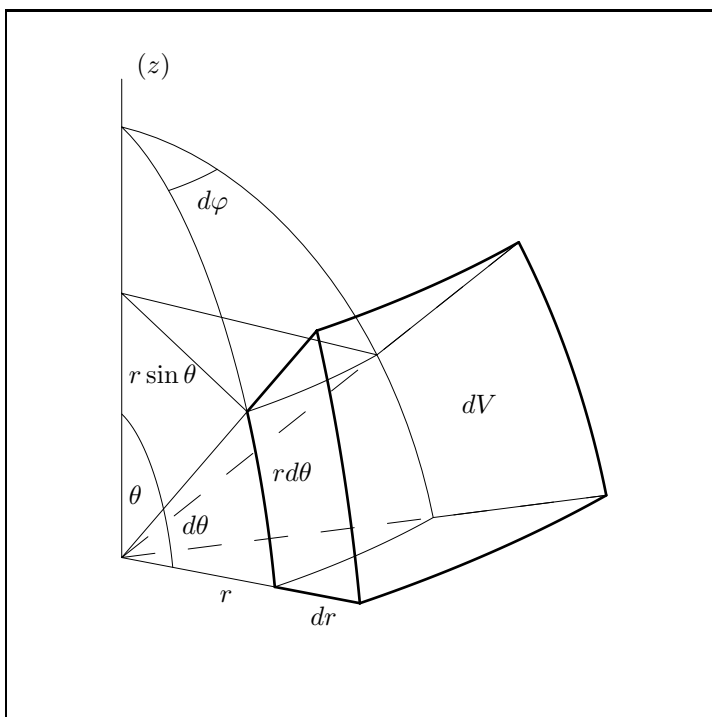


FIG. 6:  
Das Volumenelement bei  
Kugelkoordinaten

Wie man aus der Figur 6 entnimmt, drückt sich das Volumenelement in Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \theta)$  durch

$$\begin{aligned} dV &= dr (r d\theta) (r \sin \theta) d\varphi \\ &= r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

aus. Wandeln wir das Volumenintegral in ein dreifaches Integral über  $r, \theta, \varphi$  (in dieser Reihenfolge) um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^2 \sin \theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{R^3}{3} \sin \theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^3}{3} 2 \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 . \end{aligned}$$

Damit wird ein altes, allen wohlbekanntes Resultat bestätigt.

**Beispiel** Es ist die Gravitationskraft einer homogenen Kugel mit Radius  $a$ , Dichte  $\rho$  auf einen Massenpunkt  $m$  im Abstand  $h$  ( $h \geq a$ ) vom Mittelpunkt der Kugel zu berechnen.

Wir wählen ein Kugelkoordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt der Kugel und den Massenpunkt  $m$  im Punkt mit den kartesischen Koordinaten  $(0, 0, h)$  (siehe Figur 7). Die von der Teilmasse  $\rho \cdot dV$  der Kugel herrührende, auf  $m$  wirkende Teilkraft  $d\vec{K}$  ist auf  $dV$  zugerichtet. Für den Betrag von  $d\vec{K}$  gilt nach Newton

$$|d\vec{K}| = \gamma \frac{m}{R^2} \rho dV .$$

Die resultierende Totalkraft  $\vec{K}$  ist die “Summe” dieser Teilkräfte über alle Volumenelemente  $dV$  der Kugel, also das Volumenintegral über die Kugel. Aus Symmetriegründen wird  $\vec{K}$  parallel zur  $z$ -Achse (gegen den Mittelpunkt der Kugel zu gerichtet) sein, so dass für die “Summen”bildung nur die dritte Komponente von  $d\vec{K}$  eine Rolle spielt.

Man liest aus der Figur 8 die folgenden Beziehungen ab

$$\begin{aligned} R &= \left( (h - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \right)^{1/2} = (r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{1/2} , \\ \cos \alpha &= \frac{h - r \cos \theta}{R} . \end{aligned}$$

Damit lässt sich  $dK_3$  vollständig in Kugelkoordinaten ausdrücken; man erhält



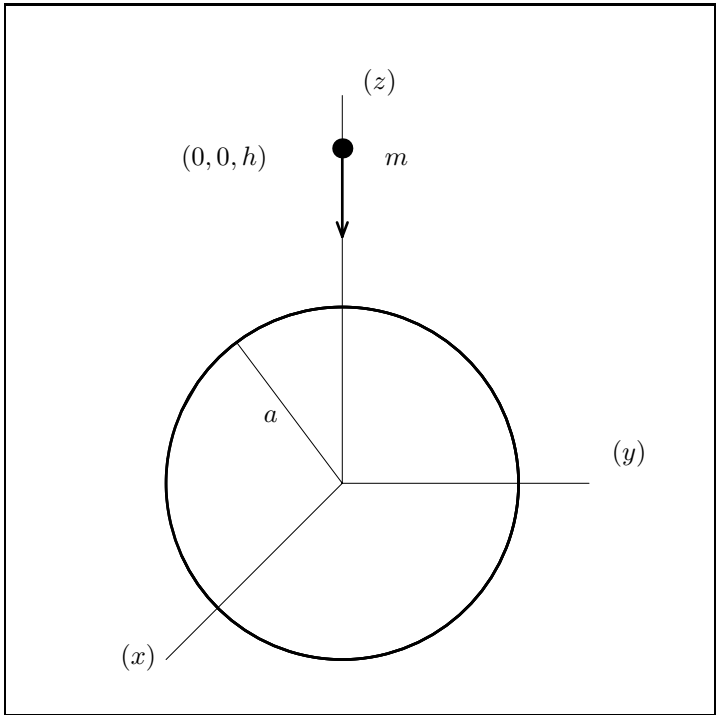


FIG. 7:  
Gravitationskraft einer Kugel

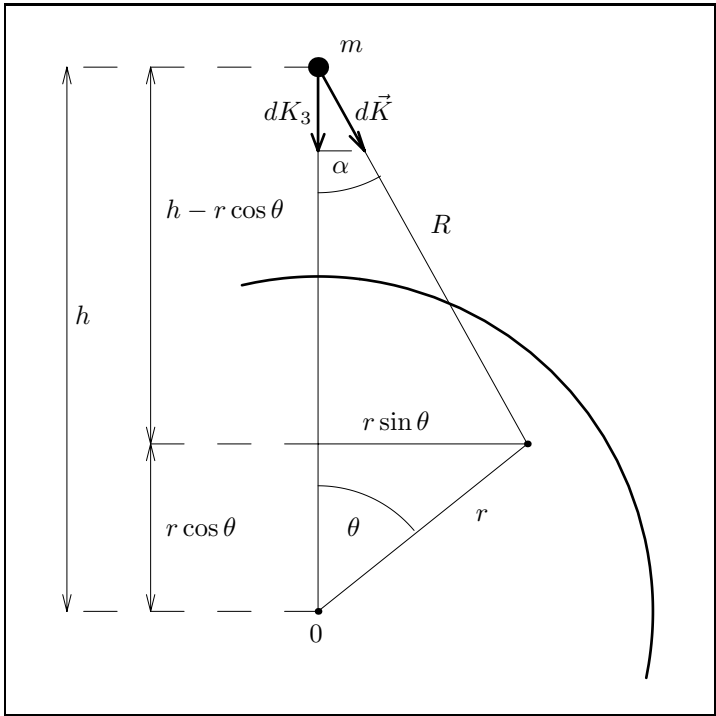


FIG. 8:  
Zur Berechnung der  
Gravitationskraft einer Kugel

$$dK_3 = -\gamma m \rho \frac{h - r \cos \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{3/2}} r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta .$$

Damit folgt durch Integration über die Kugel und gleichzeitiger Umwandlung in ein dreifaches Integral in Kugelkoordinaten

$$K = -\gamma m \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_0^\pi \frac{h - r \cos \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{3/2}} r^2 \sin \theta \, d\theta .$$

Wir berechnen zuerst die beiden Summanden  $I_1$  und  $I_2$  des inneren Integrals. Es gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= hr^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{3/2}} d\theta \\ &= -\frac{2hr^2}{2rh} \left[ (r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{-1/2} \right]_0^\pi \\ &= -r \left( (r^2 + h^2 + 2rh)^{-1/2} - (r^2 + h^2 - 2rh)^{-1/2} \right) \\ &= -r \left( \frac{1}{h+r} - \frac{1}{h-r} \right) , \quad \text{da } h \geq r , \\ &= \frac{2r^2}{h^2 - r^2} . \end{aligned}$$

Der zweite Summand lautet

$$I_2 = -r^3 \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{3/2}} d\theta .$$

Wir wenden in einem ersten Schritt partielle Integration an. Wir setzen

$$u' = \frac{\sin \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{3/2}} , \quad v = \cos \theta$$

und erhalten

$$u = -\frac{1}{rh} (r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{-1/2} , \quad v' = -\sin \theta .$$

Damit folgt

$$I_2 = -r^3 \left[ -\frac{1}{rh} (r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{-1/2} \cos \theta \right]_0^\pi + \frac{r^3}{rh} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{1/2}} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^2}{h} \left( -\frac{1}{r+h} - \frac{1}{h-r} \right) + \frac{2r^2}{2rh^2} \left[ (r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)^{1/2} \right]_0^\pi \\
&= -\frac{r^2}{h} \frac{2h}{h^2 - r^2} + \frac{r}{h^2} (r+h - (h-r)) \\
&= -\frac{2r^2}{h^2 - r^2} + \frac{2r^2}{h^2} .
\end{aligned}$$

Nach der Integration über  $\theta$  erhält man demzufolge

$$\begin{aligned}
K &= -\gamma m \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \left( \frac{2r^2}{h^2} \right) \\
&= -\gamma m \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2}{3} \frac{a^3}{h^2} \\
&= -\gamma m \rho \left( \frac{4\pi}{3} a^3 \right) \frac{1}{h^2} \\
&= -\gamma m M \frac{1}{h^2} ,
\end{aligned}$$

wobei wir mit  $M$  die Gesamtmasse der homogenen Kugel bezeichnet haben.

Dies ist ein beachtenswertes Resultat: die auf den Massenpunkt  $m$  wirkende Gravitationskraft einer homogenen Kugel lässt sich berechnen, indem man sich die Gesamtmasse der Kugel in deren Zentrum konzentriert denkt.

In einem weiteren Beispiel betrachten wir schliesslich noch Zylinderkoordinaten.

**Beispiel** Gesucht ist das Trägheitsmoment eines homogenen (Dichte 1) Kreiszylinders der Höhe  $h$  und dem Radius  $a$  um einen Durchmesser seines Grundkreises.

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Kreiszylinder auf der  $(x, y)$ -Ebene steht und dass seine Achse mit der  $z$ -Achse zusammenfällt (siehe Figur 9). Es ist dann das Trägheitsmoment  $\Theta$  um die  $x$ -Achse zu bestimmen. Laut Definition gilt

$$\Theta = \iiint_Z (y^2 + z^2) dV .$$

Dem Problem angepasst wählen wir jetzt Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$ . Wie wir wissen, gilt

$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos \varphi \\
y &= \rho \sin \varphi \\
z &= z .
\end{aligned}$$

Ausserdem entnimmt man der Figur 10, dass das Volumenelement sich durch

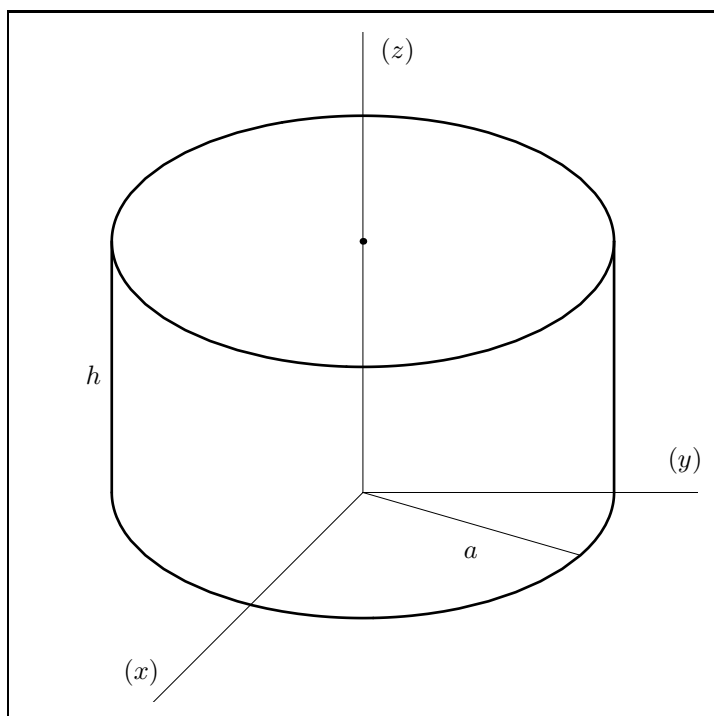


FIG. 9:  
Trägheitsmoment eines  
Kreiszylinders um einen  
Durchmesser des Grundkreises

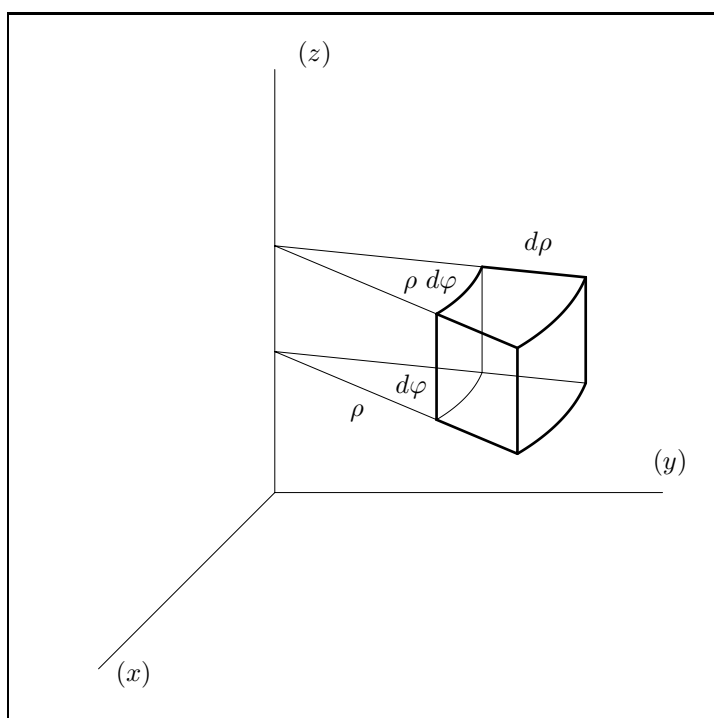


FIG. 10:  
Volumenelement bei  
Zylinderkoordinaten

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

ausdrückt. Wandelt man nun das Volumenintegral in ein dreifaches Integral über die Zylinderkoordinaten  $z, \rho, \varphi$  (in dieser Reihenfolge) um, so erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} \Theta &= \iiint_Z (z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \int_0^h dz \, \rho(z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \, \rho \left[ \frac{z^3}{3} + \rho^2 z \sin^2 \varphi \right]_0^h \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \, \rho \left( \frac{h^3}{3} + \rho^2 h \sin^2 \varphi \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{h^3 \rho^2}{2 \cdot 3} + \frac{h \rho^4}{4} \sin^2 \varphi \right]_0^a \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{h^3 a^2}{2 \cdot 3} + \frac{h a^4}{4} \sin^2 \varphi \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi h^3 a^2 + \frac{1}{4} \pi h a^4 . \end{aligned}$$

Wir werden im nächsten Abschnitt noch einmal auf Koordinatentransformationen bei Gebiets- und Volumenintegralen zurückkommen und sie dort in einer etwas formaleren Weise behandeln.