

4 Zur Transformation von Gebiets- und Volumenintegralen

Unsere Überlegungen zur Transformation von Gebiets- und Volumenintegralen in neue Koordinatensysteme geben uns Gelegenheit, noch etwas näher auf Koordinatentransformationen im allgemeinen einzugehen. Zu diesem Zweck betrachten wir zuerst den zweidimensionalen Fall noch etwas genauer. Neben dem kartesischen (x, y) -Koordinatensystem stellen wir uns in der Ebene ein (u, v) -Koordinatensystem vor. Der durch das Paar (u, v) im neuen Koordinatensystem beschriebene Punkt habe die durch die Funktionen

$$(4.1) \quad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v)$$

bestimmten kartesischen Koordinaten (x, y) (siehe Kapitel IV, Abschnitt 8).

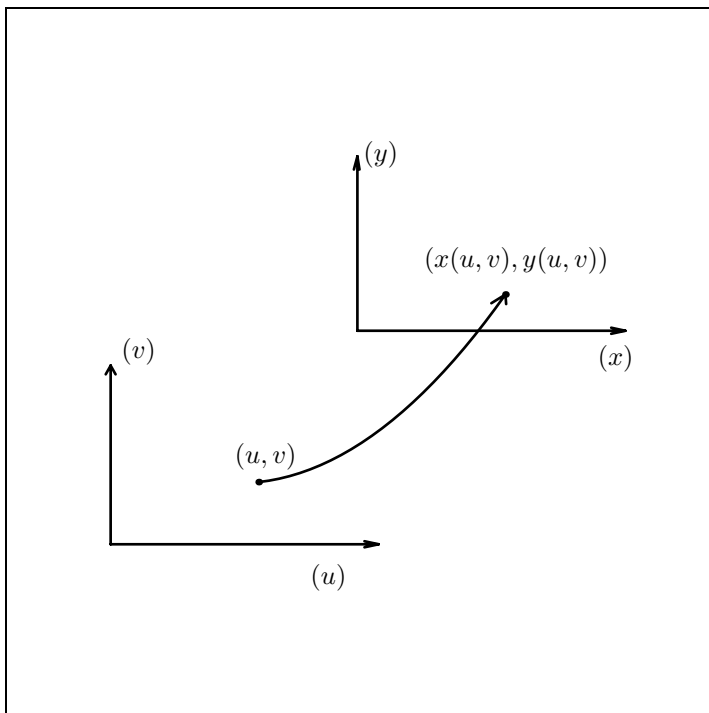


FIG. 1 :
Koordinatentransformation in
der Ebene als Abbildung

Wir können nun - und dies ist eine wichtige, hier zum erstenmal auftretende Idee - eine *künstliche* (u, v) -Ebene betrachten und die Funktionen (4.1) als eine Abbildung der (u, v) -Ebene in die

(x, y) -Ebene ansehen (siehe Figur 1): Dem Punkt (u, v) in der (u, v) -Ebene wird der Punkt (x, y) mit

$$x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v)$$

in der (x, y) -Ebene zugeordnet. (Statt ‘Abbildung’ könnte man natürlich ebenso gut auch ‘Funktion’ sagen; wir haben eine Funktion vor uns, die auf den Punkten der (u, v) -Ebene definiert ist und die als Werte Punkte in der (x, y) -Ebene annimmt).

Beispiel Im Falle von Polarkoordinaten (ρ, φ) gilt bekanntlich

$$x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \ , \ y = y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \ .$$

Dem Punkt (ρ, φ) in der (ρ, φ) -Ebene wird der Punkt $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ zugeordnet (siehe Figuren 2,3). Durch die Koordinatentransformation wird der Streifen $0 \leq \varphi < 2\pi$ auf die ganze (x, y) -Ebene abgebildet. Das Bild der *Rechtecks* $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ist der *Kreis* um den Ursprung mit Radius a . (Man beachte, dass alle Punkte der φ -Achse auf den Nullpunkt der (x, y) -Ebene abgebildet werden. In diesen Punkten ist die Koordinatentransformation - wie man sagt - *singulär*.)

Die Abbildung von der (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene lässt sich gut veranschaulichen, indem man die Bilder der Parallelen zur u - bzw. v -Achse betrachtet. Die (horizontale) Gerade $v = v_0$ geht in die durch die Parameterdarstellung

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0)) = \vec{r}(u, v_0)$$

gegebene Kurve in der (x, y) -Ebene über, und die (vertikale) Gerade $u = u_0$ in die Kurve

$$v \rightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v)) = \vec{r}(u_0, v) \ .$$

Diese Kurven heissen **Koordinatenlinien** des neuen Koordinatensystems (siehe Figuren 4,5).

Beispiel Im Falle von Polarkoordinaten sind die Koordinatenlinien einerseits vom Nullpunkt ausgehende Strahlen (φ konstant), andererseits Kreise um den Ursprung (ρ konstant) (siehe Figuren 2,3).

Wir stellen uns nun vor, dass uns in der (x, y) -Ebene ein Bereich B gegeben ist, der als Integrationsbereich eines Gebietsintegrals auftritt. Verwendet man zur Berechnung des Integrals das (u, v) -Koordinatensystem, so ist für die Riemann’sche Summe der Bereich B durch die u - bzw. v -Koordinatenlinien einzuteilen. Es ist dann der Flächeninhalt dF des “Flächenelementes” dB zu bestimmen, welches dadurch entsteht, dass u um du und v um dv wächst. Approximativ ist dB ein Parallelogramm, welches durch die Vektoren \vec{AB} und \vec{AC} aufgespannt wird (siehe Figur 6). Nun gilt wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

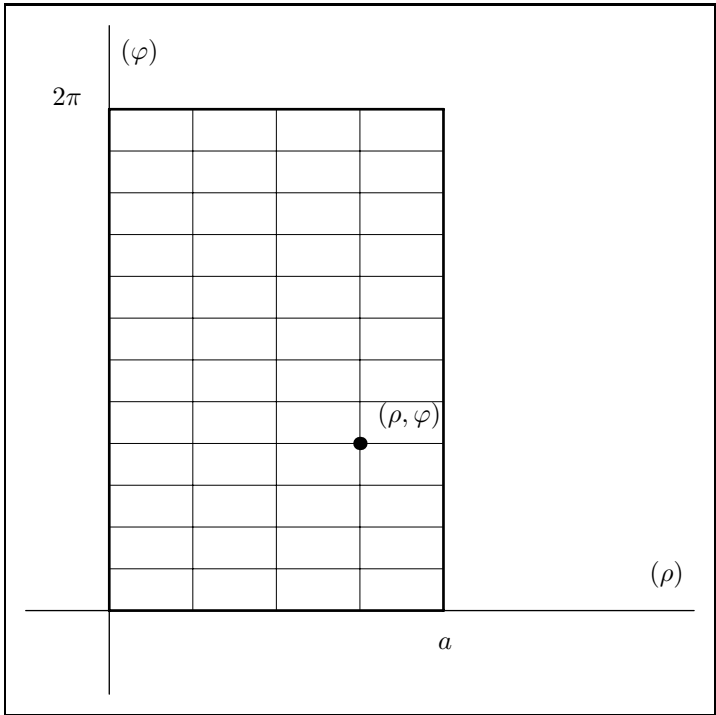


FIG. 2:
Polarkoordinaten, (ρ, φ) -Linien

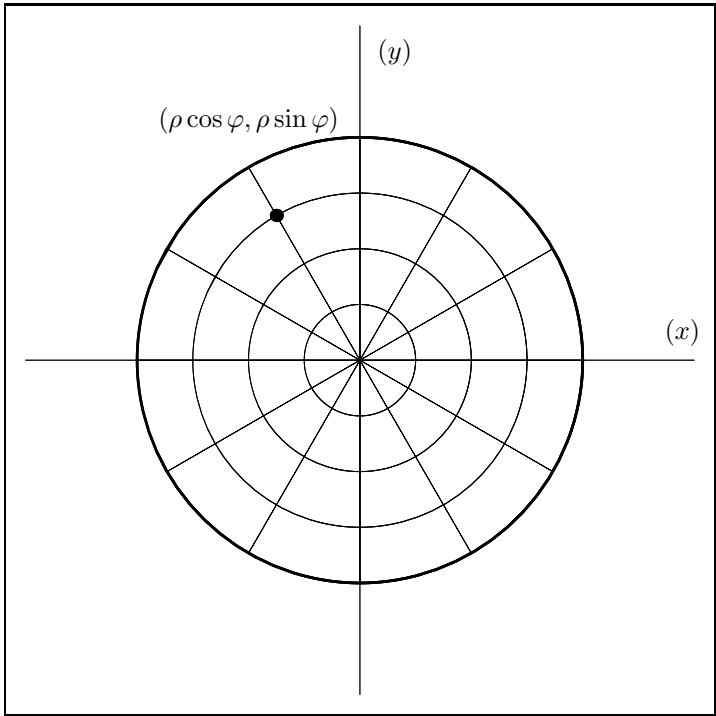


FIG. 3:
Polarkoordinaten,
Koordinatenlinien

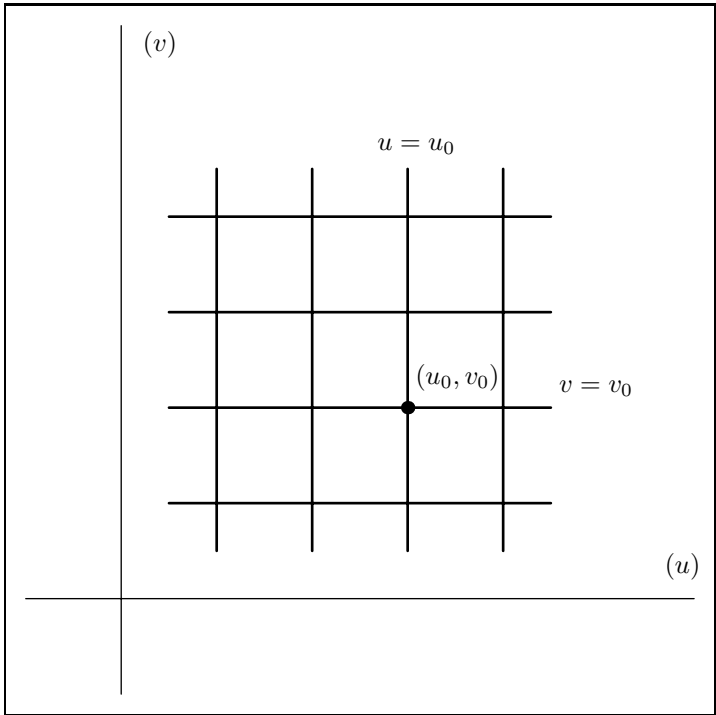


FIG. 4:
Koordinatentransformation,
 (u, v) -Ebene

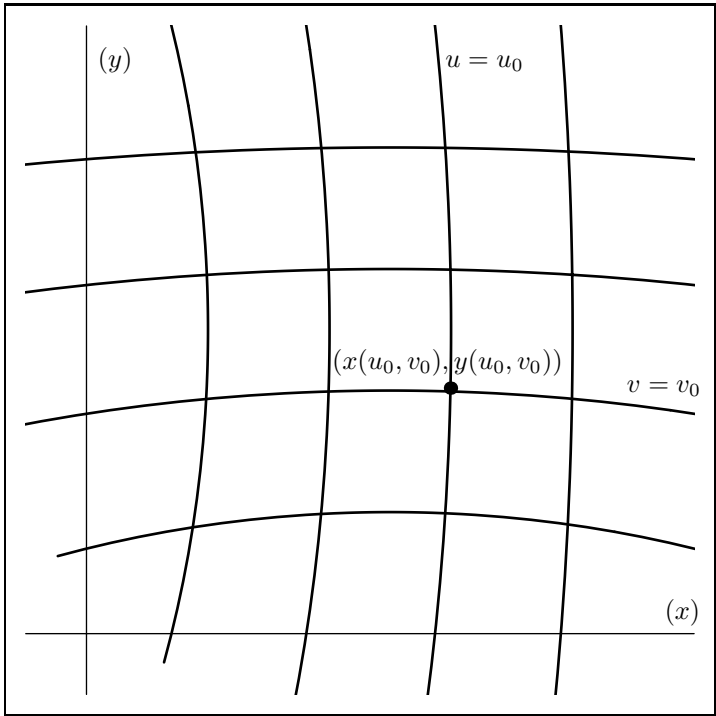


FIG. 5:
Koordinatenlinien

$$\vec{AB} = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) \sim \vec{r}_u(u, v) du = (x_u(u, v), y_u(u, v)) du$$

$$\vec{AC} = \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) \sim \vec{r}_v(u, v) dv = (x_v(u, v), y_v(u, v)) dv .$$

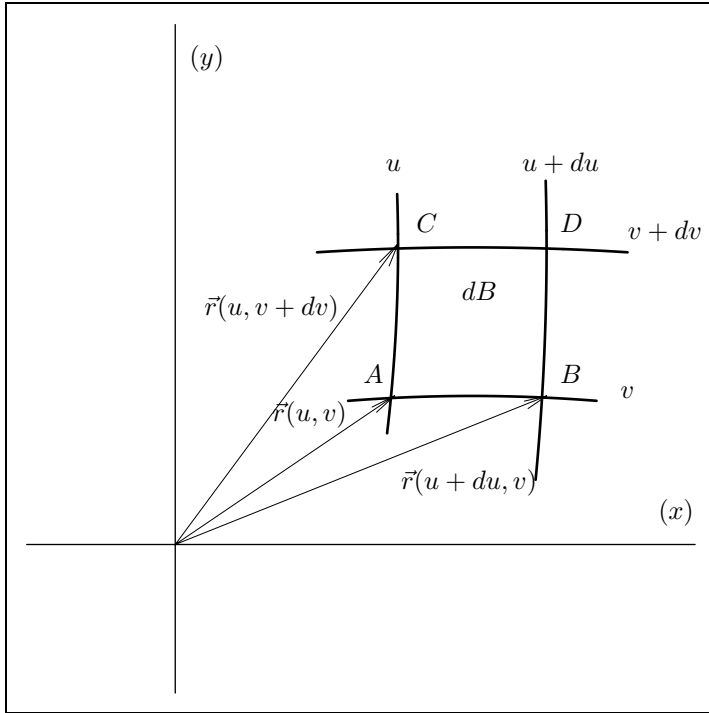


FIG. 6:
Flächenelement bei
Koordinatentransformationen

Damit kann der Flächeninhalt dF des “Parallelogrammes” dB mit Hilfe des Vektorproduktes bestimmt werden:

$$dF = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv .$$

In Komponenten drückt sich der Betrag des Vektorproduktes durch den Absolutbetrag der Determinante der zweireihigen Matrix

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} .$$

aus. Damit erhält man

$$dF = \left| \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \right| du dv .$$

Dies ist das **Flächenelement** (besser wäre *Element des Flächeninhaltes*) im (u, v) -Koordinatensystem.

Beispiel Im Falle von Polarkoordinaten (ρ, φ) ergibt sich

$$\begin{aligned} x_\rho &= \cos \varphi & , & & x_\varphi &= -\rho \sin \varphi \\ y_\rho &= \sin \varphi & , & & y_\varphi &= \rho \cos \varphi . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\det \begin{bmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{bmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

und damit

$$dF = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

in Übereinstimmung mit der in Abschnitt 2 auf heuristische Weise hergeleiteten Formel.

Beispiel Es ist das polare Flächenträgheitsmoment einer Ellipse mit Halbachsen a und b um ihren Mittelpunkt zu bestimmen.

Wir geben uns die Ellipse im kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Das polare Flächenträgheitsmoment ist definiert durch

$$J_0 = \iint_B (x^2 + y^2) \, dF ,$$

wo B den Bereich der Ellipse angibt. Wir führen nun ein dem gestellten Problem besonders angepasstes Koordinatensystem (s, t) ein, indem wir direkt die Transformationsformeln angeben. Sie lauten:

$$\begin{aligned} x &= as \cos t \\ y &= bs \sin t . \end{aligned}$$

Die Koordinatenlinien sind einerseits vom Nullpunkt ausgehende Strahlen (t konstant), andererseits Ellipsen mit Mittelpunkt im Ursprung (s konstant) (siehe Figur 7). Um das Flächenelement in den neuen Koordinaten zu bestimmen, berechnen wir die partiellen Ableitungen

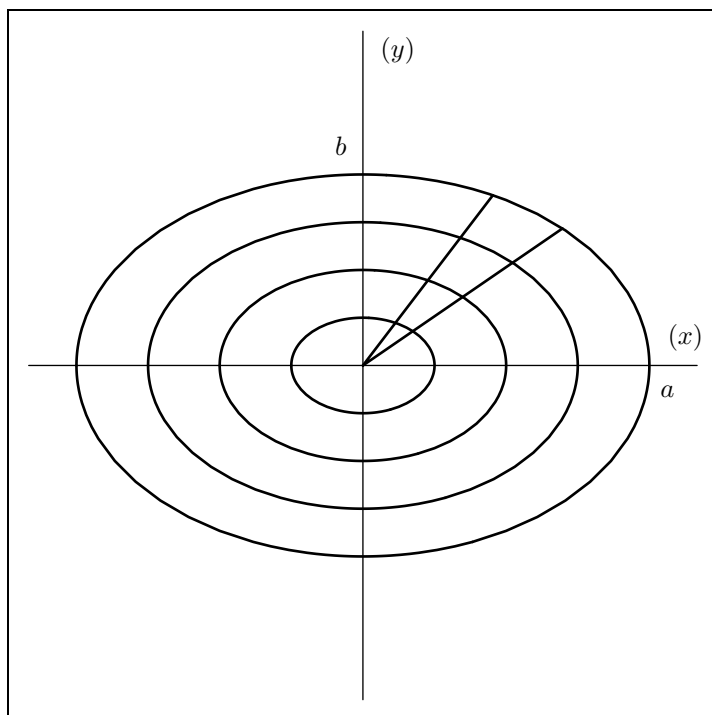


FIG. 7:
Der Ellipse angepasstes
Koordinatensystem

$$\begin{aligned} x_s &= a \cos t & , & & x_t &= -a s \sin t \\ y_s &= b \sin t & , & & y_t &= b s \cos t \end{aligned}$$

und bilden daraus die Matrix

$$\begin{bmatrix} a \cos t & -a s \sin t \\ b \sin t & b s \cos t \end{bmatrix} .$$

Deren Determinante hat den Wert

$$abs \cos^2 t + abs \sin^2 t = abs ,$$

so dass wir erhalten

$$dF = abs \, ds \, dt .$$

Das Gebietsintegral lässt sich damit vollständig in den neuen Koordinaten (s, t) ausdrücken. Offenbar wird die Ellipse B ausgeschöpft, wenn s und t über das *Rechteck* $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t < 2\pi$

variiert. (Eine Gebietsintegration über ein Rechteck ist besonders einfach; aus diesem Grund haben wir natürlich gerade das (s, t) -Koordinatensystem gewählt.) Wir erhalten der Reihe nach

$$\begin{aligned} J_0 &= \iint_B (x^2 + y^2) dF \\ &= \int_0^1 ds \int_0^{2\pi} dt (a^2 s^2 \cos^2 t + b^2 s^2 \sin^2 t) abs \\ &= \int_0^1 ds (\pi s^2 (a^2 + b^2) abs) \\ &= \pi \frac{ab}{4} (a^2 + b^2) . \end{aligned}$$

Als Spezialfall erhalten wir das uns bereits bekannte polare Flächenträgheitsmoment des Kreises

$$J_0 = \pi \frac{r^4}{2} .$$

Es lohnt sich, noch eine Weile bei diesen Koordinatentransformationen zu verweilen. Betrachten wir noch einmal die Abbildung des aus du und dv gebildeten ("kleinen") Rechtecks in der (u, v) -Ebene in das Flächenstück dB . Approximativ geht dabei der Vektor (du, dv) in den Vektor

$$(dx, dy) = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv = (x_u du + x_v dv, y_u du + y_v dv)$$

über. Mit der Notation der linearen Algebra schreiben wir dies in der Form

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} .$$

Wir lesen daraus ab, dass die zur (komplizierten) Koordinatentransformation im Punkt (u, v) gehörige Abbildung durch die (einfache) lineare Abbildung approximiert wird, welche durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix heisst **Funktionalmatrix** oder *Jacobimatrix* (C. G. J. Jacobi 1804 -1851); wir bezeichnen sie durch das Symbol

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} .$$

Die Approximation geschieht hier offensichtlich in einem ähnlichen Sinn wie früher bei der linearen Ersatzfunktion: eine *komplizierte* Funktion wird durch eine *lineare* Funktion approximiert. Die durch die Funktionalmatrix im Punkte (u, v) gegebene lineare Abbildung ist die

“lineare Ersatzfunktion an der Stelle (u, v) ” der durch die Koordinatentransformation definierten Abbildung von der (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene.

Beispiel Wir kehren kurz - sicher zur Überraschung des Lesers - zum Roboterarm zurück, den wir in Kapitel I, Abschnitt 2 eingeführt haben (siehe Figur 8). Die Lage des Arbeitskopfes im (x, y) -Koordinatensystem wurde damals in Abhängigkeit der Winkel (φ, ψ) durch die Funktionen

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi + r \cos(\varphi - \psi) \\y &= R \sin \varphi + r \sin(\varphi - \psi)\end{aligned}$$

beschrieben. Wir können deshalb im Arbeitsbereich B des Roboters die Winkel φ und ψ als neue Koordinaten betrachten. Die obigen Formeln beschreiben dann eine Koordinatentransformation im Arbeitsbereich des Roboters und damit eine Abbildung eines Teils der (φ, ψ) -Ebene (siehe Figur 9) in die (x, y) -Ebene. Offenbar wird das Rechteck $0 \leq \varphi, \psi \leq \pi$ in den Bereich B abgebildet. Die Funktionalmatrix beschreibt in jedem Punkt des Rechtecks eine lineare Abbildung, welche die zur Koordinatentransformation gehörige Abbildung in diesem Punkt approximiert. Die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} = \begin{bmatrix} x_\varphi & x_\psi \\ y_\varphi & y_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi - r \sin(\varphi - \psi) & r \sin(\varphi - \psi) \\ R \cos \varphi + r \cos(\varphi - \psi) & -r \cos(\varphi - \psi) \end{bmatrix}.$$

Werden nun die Winkel φ und ψ gemäss den Funktionen $t \rightarrow \varphi(t)$ und $t \rightarrow \psi(t)$ zeitlich verändert, so beschreibt der Arbeitskopf des Roboters im Arbeitsbereich einen Weg, der durch

$$t \rightarrow (x(\varphi(t), \psi(t)), y(\varphi(t), \psi(t)))$$

gegeben ist. Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Arbeitskopfes ergibt sich durch Ableitung nach t mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel. Man erhält

$$\vec{v}(t) = (x_\varphi \dot{\varphi} + x_\psi \dot{\psi}, y_\varphi \dot{\varphi} + y_\psi \dot{\psi}).$$

Ohne Schwierigkeiten stellt man fest, dass sich der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ durch eine Matrixmultiplikation ergibt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\varphi & x_\psi \\ y_\varphi & y_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.$$

Wir ersehen daraus, dass die Funktionalmatrix beschreibt, wie sich der “Geschwindigkeitsvektor” $(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$ in der (φ, ψ) -Ebene in den Geschwindigkeitsvektor (\dot{x}, \dot{y}) des Arbeitskopfes in der (x, y) -Ebene abbildet.

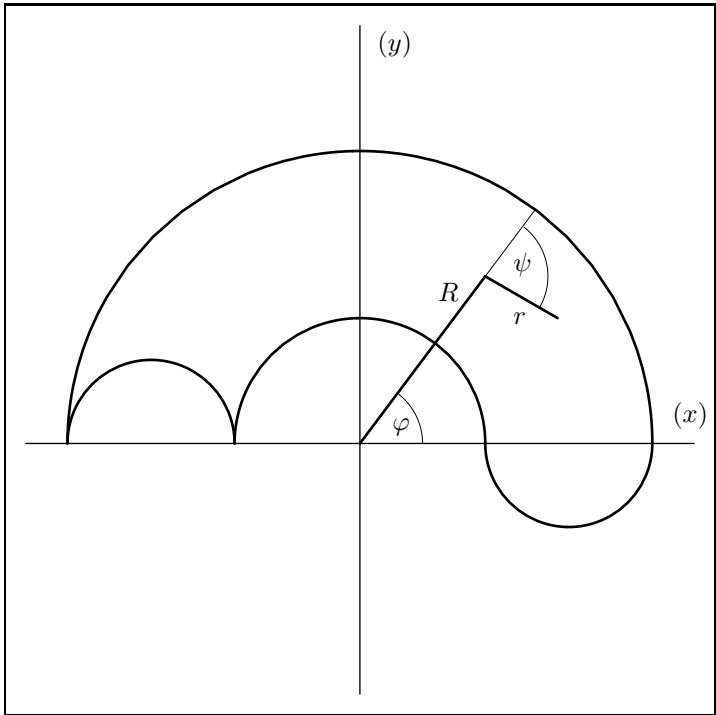


FIG. 8:
Roboterarm

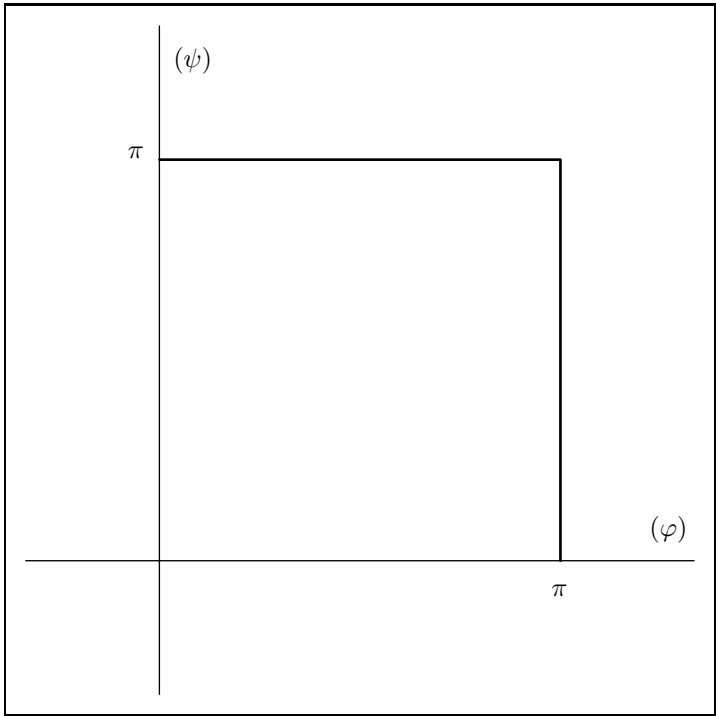


FIG. 9:
 (φ, ψ) -Ebene

Wie man aus der linearen Algebra weiss, beschreibt die Determinante einer Matrix die Volumen- bzw. Flächenverzerrung bei der zugehörigen Abbildung. Wir entnehmen daraus, dass die Determinante (**Funktionaldeterminante**)

$$\det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

im Punkte (u, v) die Flächenverzerrung bei der Abbildung der (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene beschreibt. Aus diesem Grund muss - wie wir bereits gesehen haben - bei Gebietsintegralen das Flächenelement

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

benützt werden.

Spezielle Aufmerksamkeit verdienen bei Koordinatentransformationen diejenigen Punkte in denen die Funktionaldeterminante Null ist. In solchen Punkten ist die durch die Funktionalmatrix beschriebene lineare Abbildung singulär, und die Koordinatentransformation ist ausgeartet. Ein Beispiel wird durch das Polarkoordinatensystem im Nullpunkt geliefert. Hier ist die Koordinatentransformation bekanntlich nicht in beiden Richtungen eindeutig. In gewissen Rechnungen muss auf diese Ausnahmepunkte besonders Rücksicht genommen werden.

Beispiel Auch im Zusammenhang mit Robotern spielen diese Punkte eine grosse Rolle. Berechnen wir für den oben betrachteten Roboter die Funktionaldeterminante, so ergibt sich

$$\det \begin{bmatrix} -R \sin \varphi - r \sin(\varphi - \psi) & r \sin(\varphi - \psi) \\ R \cos \varphi + r \cos(\varphi - \psi) & -r \cos(\varphi - \psi) \end{bmatrix} = Rr \sin \psi .$$

Diese Determinante ist Null für $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$. Dies entspricht dem vollständig gestreckten bzw. ganz zusammengefalteten Roboterarm. In diesen Punkten ist die Funktionalmatrix also singulär. Die lineare Algebra sagt nun, dass die zu einer solchen Matrix gehörige lineare Abbildung nicht alle Vektoren als Bilder liefert. Wir haben aber gesehen, dass die Bilder gerade die möglichen Geschwindigkeitsvektoren des Arbeitskopfes sind. Wir folgern daraus, dass in den Punkten mit $\psi = 0$ bzw. $\psi = \pi$ der Arbeitskopf unseres Roboters nicht beliebige Geschwindigkeitsvektoren zulässt. Punkte dieser Art sind *Ausnahmepunkte* und verdienen bei Roboteranwendungen immer besondere Aufmerksamkeit.

Wir gehen zum Schluss noch auf den dreidimensionalen Fall ein und betrachten neben dem kartesischen (x, y, z) -Koordinatensystem ein neues (u, v, w) -Koordinatensystem. Die Koordinatentransformation wird durch die Gleichungen

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

beschrieben. Hält man eine der neuen Koordinaten fest, so beschreiben diese Funktionen die sogenannten **Koordinatenflächen**.

Beispiel Im Falle von Kugelkoordinaten r, φ, θ lauten die Gleichungen bekanntlich

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta . \end{aligned}$$

Die Koordinatenflächen sind für $r = r_0$ Kugeloberflächen, für $\varphi = \varphi_0$ Halbebenen, welche die z -Achse enthalten, und für $\theta = \theta_0$ Halbkegel mit der z -Achse als Achse.

Lässt man im (u, v, w) -Koordinatensystem u um du , v um dv und w um dw wachsen, so wird der Quader mit Kanten du, dv, dw im (u, v, w) -Raum auf einen (‘‘krummkantigen’’) Quader im (x, y, z) -Raum abgebildet (siehe Figur 10). Dessen Volumen können wir approximativ berechnen, indem wir analog wie im zweidimensionalen Fall vorgehen. Setzen wir wie üblich

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) ,$$

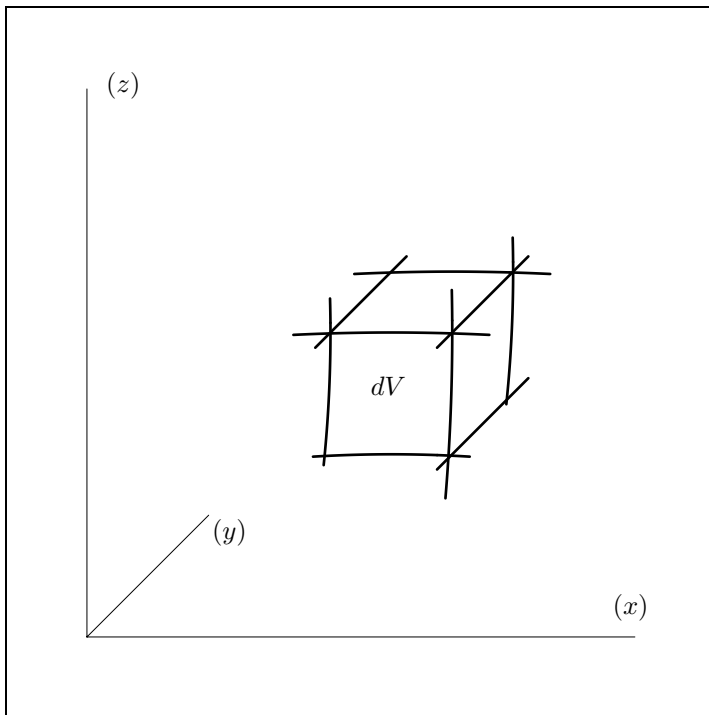


FIG. 10:
Volumenelement bei
Koordinatentransformationen

so gilt

$$\begin{aligned}\vec{r}(u+du, v, w) - \vec{r}(u, v, w) &\sim \vec{r}_u(u, v, w) du, \\ \vec{r}(u, v+dv, w) - \vec{r}(u, v, w) &\sim \vec{r}_v(u, v, w) dv, \\ \vec{r}(u, v, w+dw) - \vec{r}(u, v, w) &\sim \vec{r}_w(u, v, w) dw.\end{aligned}$$

Das Volumen des von $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$, $\vec{r}_w dw$ aufgespannten Quaders ist dann als Absolutbetrag des gemischten Produktes

$$(\vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv) \cdot \vec{r}_w dw = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_w du dv dw$$

gegeben. Wie wir gesehen haben, entspricht dieses gemischte Produkt der Determinante der aus den Komponenten der drei Vektoren gebildeten Matrix

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_w = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}.$$

Damit ist das Volumenelement genau wie das Flächenelement durch die Funktionaldeterminante ausgedrückt. Es gilt

$$dV = \left| \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \right| du dv dw.$$

Beispiel Im Falle von Kugelkoordinaten rechnet man ohne Schwierigkeit nach

$$\det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{bmatrix} = -r^2 \sin \theta,$$

so dass das Volumenelement der Kugelkoordinaten durch

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

gegeben ist, in Übereinstimmung mit unserem früheren Resultat.