

## 2 Koordinatentransformationen bei Gebietsintegralen

Wir beginnen hier mit einem Beispiel, das zeigt, wie die geschickte Wahl eines dem Problem angepassten neuen Koordinatensystems die Berechnung eines Gebietsintegrals erleichtern kann.

**Beispiel** Aus einer Kugel mit Radius  $a$  wird ein Loch in der Form eines geraden Kreiszylinders mit Grundkreisradius  $a/2$  herausgebohrt und zwar so, dass die Achse des Kreiszylinders den Kugelmittelpunkt enthält. Wie gross ist das Volumen des herausgebohrten Teils der Kugel?

Wir geben uns die Kugel durch  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  und wählen die  $z$ -Achse als Zylinderachse (siehe Figur 1). Der Grundkreis des Zylinders wird durch

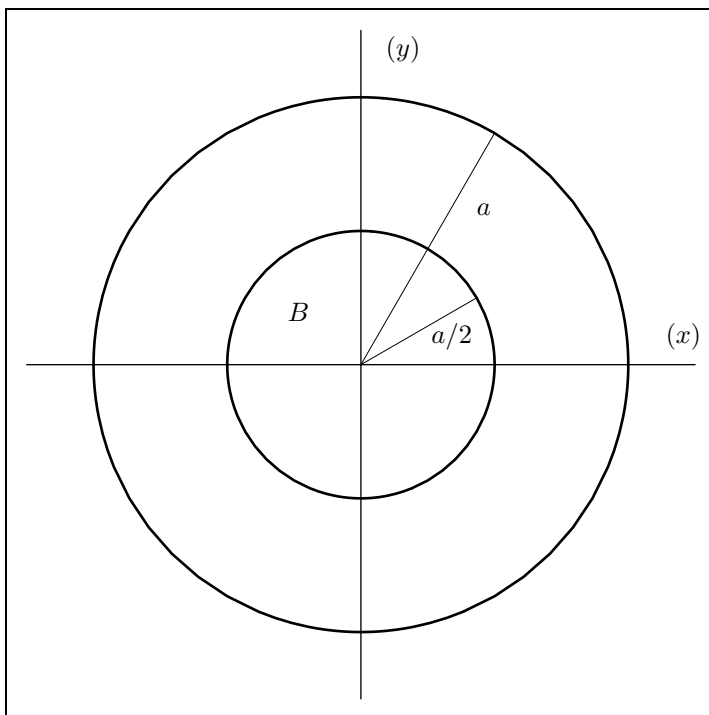


FIG. 1 :  
Zentrale zylindrische  
Ausbohrung der Kugel

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

beschrieben. Das gesuchte Volumen  $V$  ist dann durch das Gebietsintegral

$$2 \iint_B \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dF$$

gegeben, wo  $B$  die Grundfläche des Zylinders bezeichnet. Dieses Gebietsintegral kann in ein Doppelintegral umgewandelt werden:

$$V = 2 \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{+\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy .$$

Im Prinzip lassen sich die hier auftretenden zwei Integrationen durchführen, allerdings sind - wie man leicht sieht - die dazu notwendigen Rechnungen sehr umständlich.

Eine bessere, weil einfachere Art, das Problem anzugehen, besteht darin, zuerst ein angepasstes Koordinatensystem einzuführen. Wegen der Rotationssymmetrie bezüglich der  $z$ -Achse bietet sich dafür natürlich ein Zylinderkoordinatensystem an mit Polarkoordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene. Wegen  $x^2 + y^2 = \rho^2$  darf man schreiben

$$V = 2 \iint_B \sqrt{a^2 - \rho^2} dF .$$

Für die Berechnung denkt man sich das Gebiet  $B$  durch die Koordinatenlinien der Polarkoordinaten eingeteilt. Eine heuristische Überlegung zeigt, dass der Flächeninhalt des "Flächenelementes" in Polarkoordinaten durch (siehe Figur 2)

$$dF = \rho d\rho d\varphi$$

gegeben ist. Für die Berechnung des Gebietsintegrals halte man nun zuerst  $\varphi$  fest, integriere über  $\rho$  und anschliessend über  $\varphi$ . Man erhält auf diese Weise für  $V$  ein Doppelintegral, das sich auf die übliche Art und Weise berechnen lässt:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a/2} \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ -\frac{1}{3}(a^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^{a/2} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{3}{4}a^2 \right)^{3/2} + \frac{1}{3}(a^2)^{3/2} \right) \\ &= a^3 \frac{4\pi}{3} \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6} \pi a^3 . \end{aligned}$$

**Beispiel** Es sei die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  gegeben. Es werde ein Loch in der Form eines geraden Kreiszylinders mit Radius  $a/2$  und Achse parallel zur  $z$ -Achse herausgebohrt, wobei die Zylinderachse die  $(x, y)$ -Ebene im Punkt  $(a/2, 0)$  trifft (siehe Figur 3).

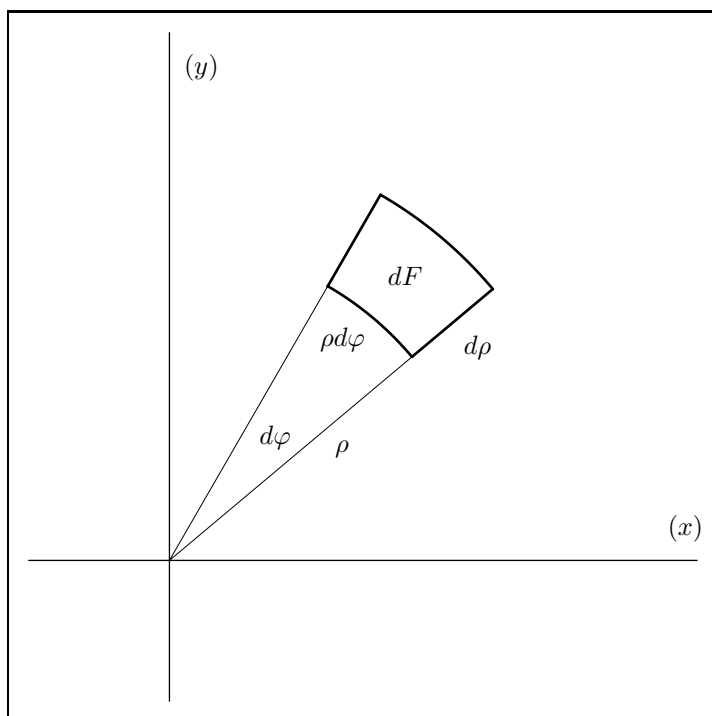


FIG. 2:  
Flächenelement in  
Polarkoordinaten

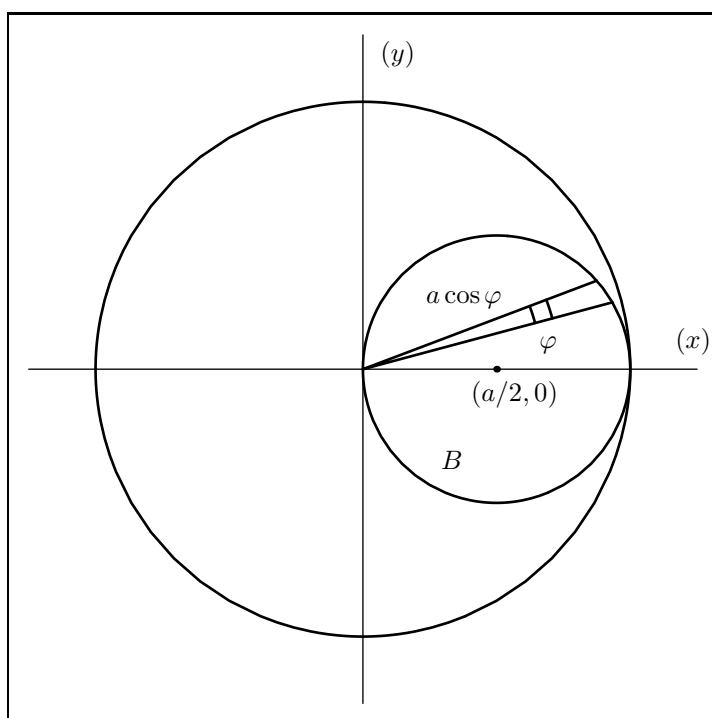


FIG. 3:  
Tangentiale zylindrische  
Ausbohrung der Kugel

Wiederum rechnen wir in Polarkoordinaten (obschon das Problem nicht achsensymmetrisch ist):

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_B \sqrt{a^2 - \rho^2} \, dF \\
 &= 4 \iint_{B'} \sqrt{a^2 - \rho^2} \, dF \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2} \, \rho \, d\rho \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^{a \cos \varphi} \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \left( -\frac{1}{3} a^3 (1 - \cos^2 \varphi)^{3/2} + \frac{1}{3} a^3 \right) d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{6\pi - 8}{9} a^3 .
 \end{aligned}$$

**Beispiel** Gesucht ist das polare Flächenträgheitsmoment eines Kreisringes um den Mittelpunkt.

Wir wählen das Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Kreisringes und verwenden Polarkoordinaten.

$$J_0 = \iint_B \rho^2 \, dF = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \rho^2 \rho \, d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_a^b = \frac{\pi}{2} (b^4 - a^4) .$$

**Beispiel** Das sogenannte Fehlerintegral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

spielt in der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wichtige Rolle. Wir haben in Kapitel III, Abschnitt 13 die Existenz dieses Integrals nachgewiesen. Die Berechnung scheiterte aber daran, dass die Stammfunktion von

$$x \rightarrow e^{-x^2}$$

nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar ist. Die folgende Überlegung liefert diesen Wert auf dem Umweg über ein Gebietsintegral. (Wegen der auftretenden uneigentlichen Integralen ist

vom mathematischen Standpunkt aus unser Vorgehen etwas forsch; dafür kommt die zugrunde liegende Idee aber besser zur Geltung. Zur Beruhigung des Lesers können wir anfügen, dass der Mathematiker unser Vorgehen mit geringem zusätzlichen Aufwand rechtfertigen kann.)

Wir beginnen damit, dass wir nicht  $J$  selbst, sondern  $J^2$  zu berechnen versuchen.

$$\begin{aligned}
 J^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy \\
 &= \iint_{\text{ganze Ebene}} e^{-(x^2+y^2)} dF \\
 &= \iint_{\text{ganze Ebene}} e^{-\rho^2} dF \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^{\infty} \\
 &= \pi .
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Dieses Beispiel zeigt sehr schön, wie ein Koordinatenwechsel einem Problem mit einem Schlag ein anderes Gesicht geben kann.